Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 532.582 : 517.929.5

ПОЛНОТА РЕШЕНИЙ ФЛОКЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

С. А. Гуда

Аннотация. Доказывается полнота решений Флоке параболического уравнения, описывающего малые колебания системы жидкость — тело. Тело закреплено на своей оси симметрии внутри сосуда произвольной формы, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. Оно совершает крутильные колебания под действием момента упругой силы с периодической по времени жесткостью.

Ключевые слова: полнота решений Флоке, движение тела в вязкой жидкости.

Введение

Полнота решений Флоке позволяет утверждать, что всякое решение задачи Коши можно аппроксимировать равномерно по времени $t \in [0; +\infty)$ с любой степенью точности линейными комбинациями собственных и присоединенных решений Флоке. Вопрос о полноте решен лишь для очень немногих задач математической физики (см. [1–5]). Зачастую неизвестно, существует ли хотя бы один показатель Флоке. Есть пример уравнения вида

$$\dot{\mathrm{w}} + A\mathrm{w} + B(t)\mathrm{w} = 0 \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве с полным самосопряженным оператором A и малым T-периодическим возмущением $B(t)$, не имеющего ни одного решения Флоке (см. [6]), т. е. обладающего нильпотентным оператором монодромии.

В работе А. И. Милославского [2] (см. также [7, 8]) доказана теорема о полноте решений Флоке уравнения (1), одно из условий которой требует, чтобы на положительном луче вещественной оси существовали достаточно большие промежутки, не содержащие собственных значений оператора A (в англоязычной литературе это условие именуют «spectral gap condition»). Упомянутый выше пример с нильпотентным оператором монодромии служит для того, чтобы показать, что данное условие строгое. В некоторых случаях существование промежутков в спектре оператора A следует из асимптотики собственных значений на бесконечности. Это, к сожалению, не касается ни задачи о колебаниях тела в жидкости, ни линеаризованных на периодическом решении уравнений Навье — Стокса в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. В случае квадратной или кубической области течения жидкости, когда собственные значения оператора Стокса считаются явно, это условие выполняется лишь для оператора B с достаточно малой нормой. Это доказано в работе [3], где исследуется полнота решений Флоке для нестационарного магнитного динамо.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 07–01–00099–а, 08–01–00895) и программы «Развитие сети национальных университетов» (К-07-Т-112/10).

Полнота решений Флоке стационарного уравнения $\dot{\mathrm{w}} + A\mathrm{w} = 0$ с несамосопряженным оператором A следует из полноты системы корневых векторов оператора A. Если A представим в виде суммы полного самосопряженного оператора A_0 и подчиненного ему оператора A_1, то полноту его корневых векторов можно доказать при помощи теоремы Келдыша [9]. Самосопряженность главного оператора A_0 позволяет в теореме Келдыша локализовать спектр возмущенного оператора A в секторе с малым углом раствора и вывести оценку резольвенты вне данного сектора. Оценка резольвенты внутри сектора получается применением теоремы Фрагмена — Линделёфа (см. [10]).

Задача о малых крутильных колебаниях тела в жидкости под действием упругой силы с периодической по времени жесткостью описывается дифференциальным уравнением вида $\dot{\mathrm{w}} + A\mathrm{w} + B(t)\mathrm{w} = 0$. Спектральную задачу для его решений Флоке $\mathrm{w}(t) = e^{-\sigma t}\widetilde{\mathrm{w}}(t)$ (где $(-\sigma)$ — показатель Флоке, $\widetilde{\mathrm{w}}$ — периодическая функция) можно трактовать как задачу на собственные значения для оператора $L = \frac{\partial}{\partial t} + A + B(t)$, действующего в пространстве периодических вектор-функций. Введем обозначение $L_0 = \frac{\partial}{\partial t} + A$, тогда $L = L_0 + B(t)$. Спектр операторов L и L_0 $i\omega$-периодический, причем у невозмущенного оператора L_0 он расположен в правой полуплоскости, и собственные значения с достаточно большой действительной частью лежат на прямых $\operatorname{Im}\sigma = \omega k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Это следует из результатов [11]. В задаче о колебаниях тела в вязкой жидкости удалось доказать, что данные закономерности наблюдаются и у возмущенного оператора L. Более того, выполняется оценка резольвенты оператора L, только теперь не вне малого сектора, как в теореме Келдыша, а во всей левой полуплоскости и в правой полуплоскости между прямыми, на которых расположены собственные значения. Эта оценка позволила в теореме 1.1 провести рассуждения теоремы Келдыша с заменой сектора полосой и доказать полноту корневых векторов оператора L.

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 доказывается теорема 1.1 о полноте корневых векторов абстрактного оператора. Она предъявляет существенно более слабые требования к спектру оператора A, чем теорема Милославского [2]. Однако вместо этого необходимо вывести оценку резольвенты оператора L на лучах $\operatorname{Re}\sigma > 0$, $\operatorname{Im}\sigma = \omega/2 + \omega k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В § 2 при помощи доказанной теоремы устанавливается полнота решений Флоке задачи о колебаниях тела в жидкости. Никаких ограничений на параметры системы типа малости не накладывается.

§ 1. Абстрактная теорема о полноте

Здесь будут использованы обозначения и свойства симметрично нормированных идеалов $\mathfrak{S}_p$, $\mathfrak{S}_\Pi$ и $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$ из гл. 3 в [12]. В теореме о полноте потребуется класс операторов $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$ с последовательностью $\Pi = \{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\pi_n = (1 + \ln n)^{-1}$. Так же, как в [12, гл. 3, § 14, п. 4, предложение 1^0], доказывается, что последовательность Π регулярна, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{n} \pi_k = O(n\pi_n)$ при $n \to \infty$. Тогда из [12, гл. 3, § 14, п. 3, теорема 14.2] следует, что идеал $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$ совпадает с классом всех вполне непрерывных операторов L, s-числа которых удовлетворяют условию $s_n(L) = o(\pi_n)$ при $n \to \infty$. Так как s-числа операторов идеала $\mathfrak{S}_p$ суть величины порядка $o(n^{-1/p})$ при $n \to \infty$, то $\mathfrak{S}_p \subset \mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$, $1 \le p < \infty$.

Теорема 1.1. *Пусть выполняются следующие условия.*

I. $\mathfrak{H}$ — *сепарабельное гильбертово пространство,* $L : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ — *оператор с компактной резольвентой.*

II. *Резольвентное множество* $\varrho(L)$ *оператора* L *содержит* $\Upsilon = \left(\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \Gamma_k\right) \cup \{\sigma \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\sigma \le a_0\}$ *при некотором* $a_0 \in \mathbb{R}$. *Непрерывные непересекающиеся кривые* $\Gamma_k = \{a + i\gamma_k(a) \mid a \ge a_0\}$ *таковы, что функции* $\gamma_k(a)$ *имеют пределы при* $a \to +\infty$:

$$\lim_{a\to+\infty} \gamma_k(a) = \frac{\omega}{2} + \omega k, \quad \omega > 0,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

III. *Существует такое число* $N \ge 0$, *что резольвента* $(\sigma I - L)^{-1}$ *оператора* L *допускает оценку*

$$\|(\sigma I - L)^{-1}\| \le C(|\sigma| + 1)^N, \quad \sigma \in \Upsilon. \tag{1.1}$$

IV. *При некотором (тогда и при любом)* $\sigma_0 \in \varrho(L)$ *резольвента* $(\sigma_0 I - L)^{-1}$ *принадлежит идеалу* $\mathfrak{S}_{\Pi}^{(0)}$ *с последовательностью* $\Pi = \{(1 + \ln n)^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Тогда система корневых векторов оператора L *полна в* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{E}$ — замыкание линейной оболочки всех корневых векторов оператора L. Покажем, что $\mathfrak{E} = \mathfrak{H}$. Доказательство проведем от противного. Допустим, что $\mathfrak{E} \ne \mathfrak{H}$. Будем считать, что оператор L обратим (иначе перейдем к рассмотрению оператора $\widetilde{L} = L - \widetilde{\sigma} I$ с некоторым $\widetilde{\sigma} \in \varrho(L)$). Введем обозначения: $M = L^{-1}$, P — ортопроектор на подпространство $\mathfrak{E}$, $Q = I - P$. Оператор $M_1 = QMQ$ вольтерров (см. [12, гл. 1, § 4 лемма 4.2]), следовательно, оператор-функция $(I - \sigma M_1)^{-1}$ целая. В соответствии с равенством[1)] $(I - \sigma M_1)^{-1} = Q(I - \sigma M)^{-1} Q + P$ и условием III она подчиняется оценке

$$\|(I - \sigma M_1)^{-1}\| \le C_1(|\sigma| + 1)^{N+1}, \quad \sigma \in \Upsilon. \tag{1.2}$$

Покажем, что данное неравенство выполняется во всей комплексной плоскости. Таким образом, будет доказано, что оператор-функция $(I - \sigma M_1)^{-1}$ для вполне непрерывного вольтеррова оператора M_1 имеет полюс *конечного* порядка в точке $\sigma = \infty$, что невозможно, если, конечно, $\mathfrak{E}^{\perp} \ne \{0\}$ (см. [13, гл. 3, § 3, теорема 6.13]). Таким образом, мы придем к противоречию.

Для доказательства оценки (1.2) в области

$$G_k = \{a + ib \mid a \ge a_0,\ \gamma_k(a) < b < \gamma_{k+1}(a)\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

воспользуемся теоремой Фрагмена — Линделёфа (см. [10, гл. 3, § 3.4, теорема 3.4.4*]). Применим данную теорему к субгармонической[2)] функции

$$\Phi(\sigma) = \ln^{+}(\|(I - \sigma M_1)^{-1}\|\, |\sigma - a_0 + 1|^{-N-1}).$$

Проверим выполнение условий

$$\Phi(\sigma) \le C_2, \quad \sigma \in \partial G_k, \tag{1.3}$$

$$e^{-\varkappa a}\Phi(a + ib) \rightrightarrows 0,\ a \to +\infty, \quad \gamma_k(a) < b < \gamma_{k+1}(a) \tag{1.4}$$

[1)]доказательство равенства можно найти в [12, гл. 1 § 1, предложении 2^0]

[2)]Функция Φ субгармоническая как логарифм нормы гармонической оператор-функции.

при некотором $\varkappa < \pi/\omega$. Первое из них удовлетворяется в силу (1.2). Докажем соотношение (1.4). Согласно теореме Мацаева (см. [14, теорема 2]) неванлинновская характеристика $T(r)$ роста оператор-функции $(I - \sigma M_1)^{-1}$

$$T(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \|(I - re^{i\phi} M_1)^{-1}\| \, d\phi$$

подчиняется оценке

$$T(r) \le C_3(\varepsilon) \left(1 + \varsigma(r_1) \ln \frac{r_1}{s_1(M_1)}\right), \quad r_1 = (1+\varepsilon) r,$$

где $\varsigma(r_1)$ — количество s-чисел оператора M_1, бо́льших $1/r_1$, $s_1(M_1)$ — наибольшее s-число. В силу условия IV $M_1 \in \mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$, следовательно, функция ς имеет вид

$$\varsigma(r) = \exp(\alpha_{\varsigma(r)} r), \tag{1.5}$$

где последовательность α_n определяется равенством $\alpha_n = s_n(M_1) \ln n$, причем $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Оценивая норму оператор-функции $(I - \sigma M_1)^{-1}$ через ее неванлинновскую характеристику и применяя (1.5), придем к соотношению

$$\ln^+ \|(I - \sigma M_1)^{-1}\| \le C_4(\varepsilon) \left(1 + \varsigma(r_2) \ln \frac{r_2}{s_1(M_1)}\right) = o(e^{\delta r}), \quad r \to \infty,$$

для всех $\delta > 0$. Здесь $r = |\sigma|$, $r_2 = (1+\varepsilon) r_1 = (1+\varepsilon)^2 r$. Таким образом, функция Φ удовлетворяет условию (1.4). Из теоремы Фрагмена — Линделёфа следует, что функция Φ подчиняется неравенству (1.3) во всей области G_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Таким образом, точка $\sigma = \infty$ не является существенно особой для оператор-функции $(I - \sigma M_1)^{-1}$. Это приводит к противоречию с тем, что оператор M_1 вполне непрерывен и вольтерров. $\square$

§ 2. Задача о колебаниях тела в жидкости

2.1. Уравнения совместного движения жидкости и тела. Рассмотрим совместную задачу о движении твердого тела D_r в ограниченном контейнере D_c, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью. Тело подчинено связи — закреплено на своей оси симметрии OO' таким образом, что может лишь поворачиваться вокруг нее. Предположим также, что, помимо силы вязкого трения, на тело действует упругий вращательный момент M_{elastic} с периодической по времени жесткостью: $M_{\text{elastic}} = -\widetilde{\varkappa}(1 + h(\widetilde{\omega} t))\varphi$, где $\widetilde{\varkappa}$ — среднее значение жесткости, $h(\tau)$ — 2π-периодическая относительная модуляция с нулевым средним: $\int_0^{2\pi} h(\tau)\, d\tau = 0$, $\widetilde{\omega}$ — круговая частота модуляции и φ — угол отклонения тела от положения равновесия.

Малые колебания такой системы описываются уравнениями (все величины здесь безразмерные)

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta \vec{u}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0, \tag{2.1}$$

$$\vec{u}|_{S_r} = r\dot{\varphi} \vec{e}_\phi, \quad \vec{u}|_{S_c} = 0, \tag{2.2}$$

$$\ddot{\varphi} - M(\vec{u}) + \varkappa(1 + h(\omega t))\varphi = 0, \tag{2.3}$$

где $\vec{u}$ — поле скорости жидкости; p — давление; S_r, S_c — поверхности тела и сосуда; $\vec{e}_\phi$ — один из трех координатных ортов $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z), привязанной к оси тела; $\varkappa = \widetilde{\varkappa}/\bigl(J^{1/5}\nu^2\rho_f^{4/5}\bigr)$ — безразмерное среднее значение коэффициента жесткости; $\omega = \widetilde{\omega}J^{2/5}/\bigl(\nu\rho_f^{2/5}\bigr)$ — безразмерная круговая частота модуляции; J — момент инерции тела; ρ_f, ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости. Безразмерный момент $M(\vec{u})$ силы вязкого трения вычисляется по формуле

$$M(\vec{u}) = -\int\limits_{S_r} r\Sigma_{ij}(\vec{u})n_i e_{\phi j}\, dS, \quad \Sigma_{ij}(\vec{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \tag{2.4}$$

n_i — компоненты внешней по отношению к жидкости нормали.

2.2. Дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве. Запишем задачу (2.1)–(2.3) в виде дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве. Введем пространство $\mathbb{S}_2(D_f)$ как замыкание по норме $\mathbb{L}_2(D_f)$ множества финитных гладких соленоидальных полей в области течения жидкости D_f. Фазовым пространством системы жидкость — тело является декартово произведение $\mathbb{H} = \mathbb{S}_2 \times \mathbb{R}^2$, состоящее из элементов $(\vec{u}, \varphi, \beta)^\tau$, где $\vec{u} \in \mathbb{S}_2(D_f)$, $(\varphi, \beta) \in \mathbb{R}^2$, β — угловая скорость вращения тела, символ τ означает транспонирование. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{H}$ определяется равенством

$$(\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2)_{\mathbb{H}} = \int\limits_{D_f} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2\, dx + \varphi_1\varphi_2 + \beta_1\beta_2. \tag{2.5}$$

Чтобы избавиться от давления в уравнении (2.1), подействуем на него ортопроектором Вейля $P : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{S}_2$ (см. [15, гл. 1, § 5]). Введем операторы A и $B(t)$, действующие на вектор $\mathrm{w} = (\vec{u}, \varphi, \beta)^\tau$ по правилам

$$A\mathrm{w} = \begin{pmatrix} -P\Delta\vec{u} \\ -\beta \\ -M(\vec{u}) + \varkappa\varphi \end{pmatrix}, \quad B(t)\mathrm{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varkappa h(\omega t)\varphi \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Область определения оператора A есть

$$\mathscr{D}(A) = \bigl\{(\vec{u}, \varphi, \beta)^\tau \in \mathbb{H} \mid \vec{u} \in \mathbb{W}_2^2(D_f),\ \mathrm{div}\vec{u} = 0,\ \vec{u}|_{S_r} = r\beta\vec{e}_\phi,\ \vec{u}|_{S_c} = 0\bigr\}, \tag{2.7}$$

где $\mathbb{W}_2^2(D_f)$ — пространство Соболева [16] вектор-функций, обладающих обобщенными производными до второго порядка включительно с суммируемыми квадратами. Теперь задачу (2.1)–(2.3) можно трактовать как дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$:

$$\dot{\mathrm{w}} + A\mathrm{w} + B(t)\mathrm{w} = 0. \tag{2.8}$$

Для дальнейшего нам понадобится оператор L, действующий в пространстве $\mathbb{L}_2(c_{\scriptscriptstyle T}, \mathbb{H})$ вектор-функций $\mathrm{w}(t)$, определенных на кольце $c_{\scriptscriptstyle T}$ длины $T = 2\pi/\omega$ со значениями в $\mathbb{H}$. Оператор L действует по правилу

$$L\mathrm{w} = \dot{\mathrm{w}} + A\mathrm{w} + B(t)\mathrm{w}. \tag{2.9}$$

Определим также невозмущенный оператор L_0 равенством

$$L_0\mathrm{w} = \dot{\mathrm{w}} + A\mathrm{w}. \tag{2.10}$$

Область определения операторов L и L_0 есть

$$\mathscr{D}(L) = \mathscr{D}(L_0) = \{\mathrm{w} \in \mathbb{L}_2(c_{\scriptscriptstyle T}, \mathbb{H}) \mid \dot{\mathrm{w}} \in \mathbb{L}_2(c_{\scriptscriptstyle T}, \mathbb{H}), \forall t \in c_{\scriptscriptstyle T}\ \mathrm{w}(t) \in \mathscr{D}(A)\}. \tag{2.11}$$

Вектор-функция $\mathrm{w}(t) = e^{-\sigma t}\widetilde{\mathrm{w}}(t)$ — решение Флоке ($-\sigma$ — показатель Флоке, $\widetilde{\mathrm{w}}$ — T-периодическая вектор-функция) тогда и только тогда, когда число σ является собственным значением оператора L, а $\widetilde{\mathrm{w}}$ — собственной вектор-функцией. Присоединенным решениям Флоке соответствуют присоединенные вектор-функции оператора L. Таким образом, вопрос о полноте решений Флоке эквивалентен полноте корневых векторов оператора L.

Здесь и далее будем предполагать, что $h \in \mathbb{L}_2[0;T]$ ($T = 2\pi/\omega$). Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{L}_2[0;T]$ определяется равенством

$$(\psi_1, \psi_2)_{\mathbb{L}_2[0;T]} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \psi_1\psi_2\,dt. \tag{2.12}$$

Комплексные расширения пространств $\mathbb{H}$, $\mathbb{L}_2(c_{_T}, \mathbb{H})$ и $\mathbb{L}_2[0;T]$ будем обозначать теми же символами. В скалярных произведениях (2.5) и (2.12) для комплексных векторов второй множитель следует всюду брать с комплексным сопряжением.

2.3. Полнота решений Флоке задачи о колебаниях тела в жидкости. Перед проверкой условий теоремы 1.1 о полноте сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

Рассмотрим задачу $\sigma\mathrm{w} - A\mathrm{w} = \Omega$ или

$$\sigma\vec{v} + P\Delta\vec{v} = \vec{E}, \quad \mathrm{div}\vec{v} = 0, \tag{2.13}$$

$$\vec{v}|_{S_r} = r\beta\vec{e}_\phi, \quad \vec{v}|_{S_c} = 0,$$

$$\sigma\psi + \beta = f^{(1)}, \tag{2.14}$$

$$\sigma\beta + M(\vec{v}) - \varkappa\psi = f^{(2)}, \tag{2.15}$$

где $\mathrm{w} = (\vec{v}, \psi, \beta)$, $\Omega = (\vec{E}, f^{(1)}, f^{(2)})$ — векторы пространства $\mathbb{H}$.

Лемма 2.1. *Для достаточно больших по модулю $\sigma \notin [0; +\infty)$ существует резольвента оператора A. Она действует по правилу $\mathrm{w} = (\sigma I - A)^{-1}\Omega$, где $\mathrm{w} = (\vec{v}, \psi, \beta)$,*

$$\vec{v} = \frac{\sigma}{d_0(\sigma)}M(R_\sigma\vec{E})\mathrm{S}R_\sigma\vec{\chi} + R_\sigma\vec{E} - \frac{f^{(1)}}{d_0(\sigma)}\mathrm{S}R_\sigma\vec{\chi} - \frac{\sigma f^{(2)}}{d_0(\sigma)}\mathrm{S}R_\sigma\vec{\chi}, \tag{2.16}$$

$$\psi = \frac{1}{d_0(\sigma)}M(R_\sigma\vec{E}) + \frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{1}{d_0(\sigma)}\right)f^{(1)} - \frac{f^{(2)}}{d_0(\sigma)}, \tag{2.17}$$

$$\beta = -\frac{\sigma}{d_0(\sigma)}M(R_\sigma\vec{E}) + \frac{f^{(1)}}{d_0(\sigma)} + \frac{\sigma f^{(2)}}{d_0(\sigma)}. \tag{2.18}$$

Функция d_0 определена в (2.23), $\mathrm{S} = -P\Delta$ — оператор Стокса с областью определения $\mathscr{D}(\mathrm{S}) = \{\vec{u} \in \mathbb{W}_2^2(D_f) \mid \vec{u}|_{S_r\cup S_c} = 0,\ \mathrm{div}\vec{u} = 0\}$, $R_\sigma = (\sigma I - \mathrm{S})^{-1}$, вектор-функция $\vec{\chi}$ — решение задачи (2.19), момент силы вязкого трения M определен в (2.4).

Доказательство. Выразим из уравнения (2.13) вектор-функцию $\vec{v}$ и найдем ее момент силы вязкого трения. Решение $\vec{v}$ будем искать в виде $\vec{v} = \beta\vec{\chi} + \vec{\theta}$, где $\vec{\chi}$ — решение краевой задачи

$$\Delta\vec{\chi} = \nabla q, \quad \mathrm{div}\vec{\chi} = 0, \quad \vec{\chi}|_{S_r} = r\vec{e}_\phi, \quad \vec{\chi}|_{S_c} = 0. \tag{2.19}$$

Вектор-функция $\vec{\theta}$ удовлетворяет однородным краевым условиям и уравнению

$$\sigma\vec{\theta} - \mathrm{S}\vec{\theta} = -\sigma\beta\vec{\chi} + \vec{E}. \tag{2.20}$$

Так как $\sigma \notin [0; +\infty)$, число σ не принадлежит спектру Σ_{S} оператора Стокса. Значит, задача (2.20) имеет единственное решение $\vec{\theta} = -\sigma\beta R_\sigma\vec{\chi} + R_\sigma\vec{E}$, и определена вектор-функция

$$\vec{v} = \beta\big(\vec{\chi} - \sigma R_\sigma\vec{\chi}\big) + R_\sigma\vec{E} = -\beta\mathrm{S}R_\sigma\vec{\chi} + R_\sigma\vec{E}. \tag{2.21}$$

Ее момент силы вязкого трения есть $M(\vec{v}) = \beta\widehat{\mu}(\sigma) + M(R_\sigma\vec{E})$, где $\widehat{\mu}(\sigma) = -M(\mathrm{S}R_\sigma\vec{\chi})$. Выражая из уравнения (2.14) компоненту β и подставляя ее в (2.15) вместе с найденным моментом $M(\vec{v})$, получим

$$d_0(\sigma)\psi = M(R_\sigma\vec{E}) + \frac{d_0(\sigma) - 1}{\sigma} f^{(1)} - f^{(2)}, \tag{2.22}$$

где

$$d_0(\sigma) = \sigma^2 + \sigma\hat{\mu}(\sigma) + \varkappa. \tag{2.23}$$

В соответствии с исследованиями, проведенными в [11, § 3], функция d_0 имеет не более двух нулей вне положительного луча действительной оси. Следовательно, для достаточно больших по модулю чисел $\sigma \notin [0; +\infty)$ уравнение (2.22) (и вместе с ним задача (2.13)–(2.15)) имеет единственное решение (2.16)–(2.18). □

Лемма 2.2. *Функция $|d_0|$ допускает оценку снизу*

$$|d_0(\sigma)| \geq C_1|\sigma|^2, \quad \sigma \in \{\sigma \in \mathbb{C} \mid |\sigma| \geq C_2\} \setminus \{a + ib \mid a > 0,\ |b| < C_3\sqrt{a}\ln a\}; \tag{2.24}$$

$$|d_0(\sigma)| \geq C_4 \operatorname{Re}\sigma |\operatorname{Im}\sigma|, \quad \sigma \in \{a + ib \mid a > 0,\ |b| \leq a\} \tag{2.25}$$

$$|d_0(\sigma)| \geq |\operatorname{Im}\sigma|\,|\sigma|\,\|\mathrm{S}R_\sigma\vec{\chi}\|^2, \quad |\sigma| \geq C_5 \tag{2.26}$$

с некоторыми константами C_1–C_5.

Доказательство леммы содержится в [17] (см. лемму 3.3 и неравенство (3.23)).

Лемма 2.3. *Пусть $\alpha > 0$. Тогда в секторе $|\arg\sigma| > \alpha$ для достаточно больших по модулю σ резольвента $(\sigma I - A)^{-1}$ допускает оценку*

$$\|(\sigma I - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\sigma|}. \tag{2.27}$$

Доказательство леммы можно найти в [11, § 3] или [17, § 3].

Введем в рассмотрение оператор F_σ, действующий в пространстве $\mathbb{L}_2[0; T]$, с матрицей $\{(F_\sigma)_{kj}\}_{k,j=-\infty}^{+\infty}$ в ортонормированном базисе Фурье $\{e^{i\omega nt}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$:

$$(F_\sigma)_{kj} = \big(F_\sigma e^{i\omega jt}, e^{i\omega kt}\big)_{\mathbb{L}_2[0;T]} = \frac{\varkappa h_{k-j}}{d_k(\sigma)}, \tag{2.28}$$

где h_k — компоненты Фурье функции h (заметим, что $h_0 = 0$), $d_k(\sigma) = d_0(\sigma - i\omega k)$, функция d_0 определена в (2.23).

Лемма 2.4. *Норма оператора F_σ подчиняется неравенству*

$$\|F_\sigma\| \leq \varkappa\|h\|_{\mathbb{L}_2}\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|d_k(\sigma)|^2}}. \tag{2.29}$$

Следствие 2.1. *Из лемм 2.2 и 2.4 следует оценка*

$$\|F_\sigma\| \le \frac{C_1}{|\operatorname{Im}\sigma|(|\operatorname{Re}\sigma|+1)}, \tag{2.30}$$

справедливая для σ: $|\sigma| \ge C_2$, с некоторыми константами C_1 и C_2.

Доказательство леммы 2.4 и следствия 2.1 можно найти в [17, § 3].

Лемма 2.5. *Оператор L, определенный в* (2.9), *удовлетворяет условиям* II *и* III (*с константой* $N = 0$) *теоремы* 1.1.

Доказательство. Покажем, что при некоторых a_0, $a_1 \in \mathbb{R}$ резольвентное множество $\varrho(L)$ оператора L содержит полуплоскость $\operatorname{Re}\sigma \le a_0$, а также лучи

$$\{\sigma = a + i(\omega/2 + \omega k) \mid a \ge a_1\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{2.31}$$

при некотором $a_1 \in \mathbb{R}$. Введем обозначение

$$\widetilde{\Upsilon}_{a_0 a_1} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \{\sigma = a + i(\omega/2 + \omega k) \mid a \ge a_1\} \cup \{\sigma \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\sigma \le a_0\}.$$

Запишем оператор $\sigma I - L$ в виде $\sigma I - L = (\sigma I - L_0)(I - (\sigma I - L_0)^{-1}B)$, где оператор L_0 определен в (2.10), оператор B — в (2.6). При помощи теоремы об операторе, близком к обратимому, докажем, что оператор $I - (\sigma I - L_0)^{-1}B$ обратим. В области $\operatorname{Re}\sigma \le a_0$ ключевую роль играет оценка резольвенты оператора A из леммы 2.3. На лучах (2.31) данная оценка не выполняется. Здесь придется учитывать специфику оператора B и тот факт, что на подпространстве $\operatorname{Lin}(0;0;1)$ вторая компонента ψ резольвенты (см. (2.17)) допускает оценки из леммы 2.2, которые лучше, чем (2.27).

2.4. Оценка оператора $(\sigma I - L_0)^{-1}B$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\sigma \le a_0$. Представим оператор B в виде $B = \widetilde{B}h$, где оператор $\widetilde{B}$ определяется равенством $\widetilde{B}\mathrm{w} = (0;0;\psi)^\tau$, $\mathrm{w} = (\vec{u}, \psi, \beta)^\tau$. Разложим выражение $(\sigma I - L_0)^{-1}B\mathrm{w}$ в ряд Фурье:

$$(\sigma I - L_0)^{-1}B\mathrm{w} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega k t} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_{k-j}((\sigma - i\omega k)I - A)^{-1}\widetilde{B}\mathrm{w}_j,$$

где w_j — компоненты Фурье вектор-функции $\mathrm{w}(t) = (\vec{u}(\cdot,t), \psi(t), \beta(t))^\tau$. Применяя неравенство Коши — Буняковского, выведем оценку для коэффициента при $e^{i\omega k t}$:

$$\left\| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_{k-j}((\sigma - i\omega k)I - A)^{-1}\widetilde{B}\mathrm{w}_j \right\|_{\mathbb{H}} \le \|((\sigma - i\omega k)I - A)^{-1}\widetilde{B}\| \|h\|_{\mathbb{L}_2} \|\mathrm{w}\|_{\mathbb{L}_2(c_T, \mathbb{H})}.$$

Следовательно, норма вектор-функции $(\sigma I - L_0)^{-1}B\mathrm{w}$ подчиняется оценке

$$\|(\sigma I - L_0)^{-1}B\mathrm{w}\|_{\mathbb{L}_2(c_T, \mathbb{H})} \le \|h\| \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|((\sigma - i\omega k)I - A)^{-1}\widetilde{B}\|^2} \|\mathrm{w}\|_{\mathbb{L}_2(c_T, \mathbb{H})}.$$

Пользуясь леммой 2.3, заключаем, что при некотором a_0 и всех σ: $\operatorname{Re}\sigma \le a_0$ справедливо неравенство

$$\|(\sigma I - L_0)^{-1}B\| \le C_1 \|h\| \|\widetilde{B}\| \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + (b - \omega k)^2}} \le \frac{C_2}{|a|},$$

где $\sigma = a + ib$. Отсюда следуют существование обратного оператора

$$(\sigma I - L)^{-1} = (I - (\sigma I - L_0)^{-1}B)^{-1}(\sigma I - L_0)^{-1} \tag{2.32}$$

и оценка его нормы

$$\|(\sigma I - L)^{-1}\| \le \frac{\|(\sigma I - L_0)^{-1}\|}{1 - \|(\sigma I - L_0)^{-1}B\|} \le \frac{C_3}{|\operatorname{Re}\sigma|} \tag{2.33}$$

с константой C_3, не зависящей от σ. При выводе (2.33) было использовано неравенство

$$\|(\sigma I - L_0)^{-1}\| \le \sup_k \|((\sigma - i\omega k)I - A)^{-1}\| \le \frac{C_4}{|\operatorname{Re}\sigma|}, \ \ \operatorname{Re}\sigma \le a_0. \tag{2.34}$$

2.5. Обратимость оператора $I - (\sigma I - L_0)^{-1}B$ на лучах (2.31). В соответствии с формулами (2.16)–(2.18) оператор $(\sigma I - A)^{-1}\widetilde{B}$ имеет вид

$$(\sigma I - A)^{-1}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\sigma}{d_0(\sigma)}\mathrm{S}R_\sigma\vec{\chi} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{d_0(\sigma)} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{d_0(\sigma)} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Запишем уравнение $\mathrm{w} - (\sigma I - L_0)^{-1}B\mathrm{w} = \Omega$ (где $\Omega = (\vec{E}(x,t), f^{(1)}(t), f^{(2)}(t))$) в базисе Фурье

$$\vec{v}_k + \frac{\sigma - i\omega k}{d_k(\sigma)}\mathrm{S}R_{\sigma - i\omega k}\vec{\chi}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_{k-j}\psi_j = \vec{E}_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.36}$$

$$\psi_k + \frac{1}{d_k(\sigma)}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_{k-j}\psi_j = f_k^{(1)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.37}$$

$$\beta_k - \frac{\sigma - i\omega k}{d_k(\sigma)}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_{k-j}\psi_j = f_k^{(2)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.38}$$

Отсюда видно, что для доказательства обратимости оператора $I - (\sigma I - L_0)^{-1}B$ достаточно найти функцию ψ из второй системы (2.37) и подставить в (2.36) и (2.38). На подпространстве $\mathbb{L}_2(c_T, \mathrm{Lin}((0,1,0)^\tau))$ пространства $\mathbb{L}_2(c_T, \mathbb{H})$ оператор $(\sigma I - L_0)^{-1}B$ совпадает с оператором F_σ, определенным в (2.28). В соответствии с (2.30) $\|F_\sigma\| \to 0$ при $\operatorname{Re}\sigma \to +\infty$ на лучах (2.31). Значит, существует число a_1 такое, что уравнения (2.37) разрешимы для всех $\omega > 0$ и $\operatorname{Re}\sigma > a_1$, и справедливо неравенство $\|\psi\| \le C_7\|f^{(1)}\|$. Оценим функции $\vec{v}$ и β в уравнениях (2.36) и (2.38):

$$\|\vec{v}\| \le \|h\|\,\|\psi\|\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|\sigma - i\omega k|^2}{|d_k(\sigma)|^2}\|\mathrm{S}R_{\sigma - i\omega k}\vec{\chi}\|^2} + \|\vec{E}\|, \tag{2.39}$$

$$\|\beta\| \le \|h\|\,\|\psi\|\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|\sigma - i\omega k|^2}{|d_k(\sigma)|^2}} + \|f^{(2)}\|. \tag{2.40}$$

В соответствии с неравенствами (2.24)–(2.26) бесконечные суммы в (2.39) и (2.40) ограничены равномерно по $\operatorname{Re}\sigma$ при $\operatorname{Re}\sigma \ge a_1$. Так доказываются существование обратного оператора $(I + (\sigma I - L_0)^{-1}B)^{-1}$ и оценка

$$\|(I + (\sigma I - L_0)^{-1}B)^{-1}\| \le C_8$$

при $\sigma \in \{a + i(\omega/2 + \omega k) \mid a \geq a_1\}$.

Таким образом, оператор $(\sigma I - L)^{-1}$ существует при $\sigma \in \widetilde{\Upsilon}_{a_0 a_1}$ и вычисляется по формуле (2.32), причем $\|(\sigma I - L)^{-1}\| \leq C_9$. Соединяя теперь лучи $\{a + i(\omega/2 + \omega k) \mid a \geq a_1\}$ с полуплоскостью $\{\operatorname{Re}\sigma \leq a_0\}$ непересекающимися кривыми, содержащимися в резольвентном множестве оператора L, получим искомое множество Υ (см. условие II теоремы 1.1). Итак, оценка резольвенты (1.1) доказана с константой $N = 0$. $\square$

Лемма 2.6. *Пусть оператор A, действующий в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, с областью определения $\mathscr{D}(A)$, обратим, причем обратный A^{-1} вполне непрерывен и принадлежит некоторому идеалу $\mathfrak{S}$ кольца ограниченных операторов в $\mathfrak{B}$. Пусть оператор B ограничен относительно A, оператор $A + B$ биективно отображает $\mathscr{D}(A)$ на $\mathfrak{B}$. Тогда $(A + B)^{-1} \in \mathfrak{S}$.*

Доказательство леммы можно найти в [17, § 3].

Лемма 2.7. *Резольвента оператора L компактна и принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_p$ при $p > \frac{5}{2}$.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 2.6. Представим оператор $\sigma I - L$ (см. (2.9)) в виде суммы $\sigma I - L = (\sigma I - L_1) + B_1$, где операторы L_1 и B_1 действуют в пространстве $\mathbb{L}_2(c_{\scriptscriptstyle T}, \mathbb{H})$ по правилам

$$L_1\mathrm{w} = \frac{d\mathrm{w}}{dt} + A_1\mathrm{w},\ A_1\mathrm{w} = \begin{pmatrix} -P\Delta\vec{v} \\ \psi \\ -M(\vec{v}) \end{pmatrix},\ B_1\mathrm{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi + \beta \\ -\varkappa(1 + h(\omega t))\psi \end{pmatrix},\ \mathrm{w} \in \mathscr{D}(L).$$

Проверим выполнение условий леммы 2.6. Как конечномерное возмущение оператора A оператор A_1 обладает компактной резольвентой. Пусть $\{\lambda_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ — его собственные значения. Для $\sigma \neq \lambda_n^{(1)} + i\omega k$ оператор $\sigma I - L_1$ обратим, причем обратный вполне непрерывен. Докажем, что $(\sigma I - L_1)^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 5/2$. В силу тождества Гильберта для резольвенты достаточно показать, что $L_1^{-1} \in \mathfrak{S}_p$.

Оператор A_1 самосопряжен. Это легче всего проверить, воспользовавшись второй формулой Грина для оператора $P\Delta$, записанной в виде

$$\int\limits_{D_f} \Delta\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\, dx + \beta_2 M(\vec{v}_1) = \int\limits_{D_f} \vec{v}_1 \cdot \Delta\vec{v}_2\, dx + \beta_1 M(\vec{v}_2), \tag{2.41}$$

где $\vec{v}_{1,2}$ — гладкие соленоидальные поля, удовлетворяющие краевым условиям $\vec{v}_j|_{S_r} = r\beta_j\vec{e}_\phi$, $\vec{v}_j|_{S_c} = 0$, $j = 1, 2$. Следовательно, оператор L_1^{-1} нормальный, и его s-числа суть $\{|\sigma - i\omega k - \lambda_n^{(1)}|^{-1}\}_{k=-\infty,n=1}^{+\infty}$. Задачу на собственные значения для оператора A_1 можно свести к дисперсионному уравнению так же, как это сделано в [11, § 3] для оператора A. Таким образом устанавливается, что асимптотика собственных чисел $\lambda_n^{(1)}$ оператора A_1 совпадает с асимптотикой собственных чисел λ_n оператора Стокса S:

$$\lambda_n^{(1)} \sim \lambda_n \sim \left(\frac{3\pi^2 n}{|D_f|}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad n \to \infty, \tag{2.42}$$

где $|D_f|$ — объем области течения жидкости. Нумеруя s-числа $|i\omega k + \lambda_n^{(1)}|^{-1}$ оператора L_1^{-1} по убыванию и пользуясь формулой (2.42), выведем неравенство $s_\ell(L_1^{-1}) \leq C/\ell^{2/5}$, $\ell \in \mathbb{N}$. Следовательно, $L_1^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 5/2$. В соответствии с леммой 2.6 этому идеалу принадлежит и резольвента оператора L. $\square$

Идеалы $\mathfrak{S}_p$ при $p < \infty$ вложены в идеал $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$ из теоремы 1.1, поэтому оператор L задачи о колебаниях тела в жидкости удовлетворяет условию IV теоремы о полноте. Таким образом, доказана

Теорема 2.1. *Система основных и присоединенных решений Флоке задачи* (2.1)–(2.3) *полна в пространстве* $\mathbb{L}_2(c_T, \mathbb{H})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yudovich V. I.* Eleven great problems of mathematical hydrodynamics. Hull, January, 2002. (Препринт/University of Hull; N 8).
2. *Милославский А. И.* К теории Флоке для параболических уравнений // Функцион. анализ и его прил. 1976. Т. 10, № 2. С. 80–81.
3. *Liu W., Haller G.* Inertial manifolds and completeness of eigenmodes for unsteady magnetic dynamos // Physica D. 2004. V. 194. P. 297–319.
4. *Kuchment P.* Floquet theory for partial differential equations. Basel: Birkhäuser, 1993.
5. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
6. *Милославский А. И.* Об убывании решений абстрактного параболического уравнения с операторным коэффициентом // Изв. СКНЦ ВШ, сер. Естественные науки. 1976. № 2. С. 11–15.
7. *Милославский А. И.* Теория Флоке для абстрактных параболических уравнений с периодическими коэффициентами. Дис. … канд. ф.-м. н. Ростов-на-Дону: РГУ. 1976.
8. *Милославский А. И.* Теория Флоке для абстрактных параболических уравнений. Базисность корневых подпространств оператора монодромии. М.: Деп. в ВИНИТИ. № 3073–75. 1975.
9. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 4. С. 15–41.
10. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
11. *Гуда С. А., Юдович В. И.* Совместная задача о вращении твердого тела в вязкой жидкости под действием упругой силы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 556–576.
12. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
13. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
14. *Мацаев В. И.* Об одном методе оценки резольвент несамосопряженных операторов // Докл. АН СССР. 1964. Т. 154, № 5. С. 1034–1037.
15. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в теории гидродинамической устойчивости. Ростов-на-Дону: РГУ, 1984.
16. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
17. *Гуда С. А.* Полнота решений Флоке задачи о колебаниях тела в жидкости. М.: Деп. ВИНИТИ. № 738–В2007 от 17.07.2007.

Статья поступила 12 февраля 2008 г.

Гуда Сергей Александрович
Южный федеральный университет,
факультет математики, механики и компьютерных наук,
кафедра вычислительной математики и математической физики,
ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону 344090
gudasergey@mail.ru