Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 517.955

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С ИНЪЕКТИВНЫМ СИМВОЛОМ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА L^2 В ОБЛАСТИ

И. В. Шестаков, А. А. Шлапунов

Аннотация. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, имеющая бесконечно гладкую границу ∂D. Описаны необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши в пространстве Лебега $L^2(D)$ в области D для произвольного дифференциального оператора A с инъективным главным символом. Кроме того, с использованием базисов со свойством двойной ортогональности построена формула Карлемана, восстанавливающая (вектор-) функцию из класса Лебега $L^2(D)$ по ее данным Коши на открытом (в топологии ∂D) связном множестве $\Gamma \subset \partial D$ и значениям Au в области D, если последние принадлежат $L^2(\Gamma)$ и $L^2(D)$ соответственно.

Ключевые слова: некорректная задача Коши, формулы Карлемана.

Как известно, задача Коши для эллиптической системы A, вообще говоря, некорректна (см., например, [1]). Однако она естественно возникает в приложениях: в гидродинамике — как задача Коши для голоморфных функций, в геофизике — как задача Коши для оператора Лапласа, в теории упругости — как задача Коши для системы Ламе и т. д. (см., например, книгу [2] и библиографию в ней). Задача активно изучалась в течение всего XX в. (см., например, [3–10] и др.); в частности, она послужила одним из стимулов развития теории условно корректных задач.

В настоящей работе мы представляем подход, развитый в [9] для *однородной* задачи Коши для переопределенных эллиптических систем (ср. [11–13]). Мы рассматриваем *неоднородную* задачу Коши. Конечно, легко видеть, что они эквивалентны (по крайней мере, локально) для систем с обратимым главным символом. Однако если система переопределена, то эквивалентность имеет место только в случае, когда мы знаем информацию о разрешимости уравнения $Au = f$ в области, где ищется решение задачи. Например, для операторов с постоянными коэффициентами вышеупомянутые задачи Коши не эквивалентны в областях, не обладающих подходящими свойствами выпуклости относительно оператора A (см., например, [14]). Более того, если коэффициенты оператора A являются C^∞-гладкими (и не аналитическими), то на сегодняшний день нет общих результатов даже о локальной разрешимости уравнения $Au = f$ (см., например, [15, введение и § 3]).

Первый автор получил поддержку Красноярского краевого фонда науки (грант 17G–102) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2427.2008.1,), второй автор — Сибирского федерального университета по НМ проекту и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00844).

Упомянутый выше подход легко реализуется в случае, когда задача Коши решается в пространствах Соболева с достаточно высокими показателями гладкости (см. [16]). Однако с учетом громоздкости скалярных произведений в этих пространствах наиболее подходящим классом для конструктивного построения точных и приближенных решений задачи является, по нашему мнению, пространство Лебега. Кроме того, использование пространства Лебега позволяет нам существенно расширить класс граничных данных и класс решений задачи Коши.

В настоящей работе мы рассматриваем обобщенную постановку задачи Коши и не налагаем никаких условий на «выпуклость» области, где ищется решение.

1. Основные обозначения

Пусть X — C^∞-гладкое многообразие размерности $n \geq 2$ с гладкой границей ∂X; мы предполагаем, что оно вложено в гладкое (замкнутое) многообразие $\widetilde{X}$ той же размерности.

Для гладких $\mathbb{C}$-векторных расслоений E и F над X рангов k и l соответственно обозначим через $\mathrm{Diff}_m(X; E \to F)$ пространство всех линейных дифференциальных операторов порядка $\leq m$ между расслоениями E и F. Тогда для всякого открытого множества $O \Subset X$, над которым многообразие и расслоения тривиальны, сечения расслоений можно интерпретировать как (вектор-)функции, а оператор $A \in \mathrm{Diff}_m(X; E \to F)$ задается $(l \times k)$-матрицей скалярных дифференциальных операторов, т. е.

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \quad x \in O,$$

где $a_\alpha(x)$ суть $(l \times k)$-матрицы $C^\infty(O)$-функций.

Обозначим через E^* сопряженное расслоение для E. Всякая эрмитова метрика $(.,.)_x$ в слоях E индуцирует (сопряженно-линейный) изоморфизм расслоений $\star_E : E \to E^*$, задаваемый равенством $\langle \star_E v, u\rangle_x = (u, v)_x$ для всех сечений u и v расслоения E; здесь $\langle .,.\rangle_x$ — естественное спаривание между слоями E^* и E.

Зафиксируем форму объема dx на X, идентифицируя таким образом дуальное и сопряженное расслоения. Для $A \in \mathrm{Diff}_m(X; E \to F)$ обозначим через $A' \in \mathrm{Diff}_m(X; F^* \to E^*)$ транспонированный, а через $A^* \in \mathrm{Diff}_m(X; F \to E)$ — формально сопряженный операторы. Очевидно, $A^* = \star_E^{-1} A' \star_F$ (см. [2, 4.1.4]).

Пусть $\sigma(A)$ — (главный однородный) символ порядка m оператора A, заданный на (действительном) кокасательном расслоении T^*X многообразия X. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что $\sigma(A)$ инъективен вне нулевых сечений расслоения T^*X. Будем говорить, что A *эллиптический*, если $\mathrm{rank}(E) = \mathrm{rank}(F)$, и *переопределенный эллиптический* в противном случае. Тогда лапласиан A^*A является эллиптическим дифференциальным оператором порядка $2m$ на X.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что A удовлетворяет так называемому условию единственности в малом на $\overset{\circ}{X}$.

Условие 1. *Если сечение-распределение u в области $D \Subset \overset{\circ}{X}$ удовлетворяет $Au = 0$ в смысле распределений в D и $u \equiv 0$ на некотором непустом открытом подмножестве O из D, то $u \equiv 0$ в D.*

Оно выполнено, например, если все объекты, находящиеся в рассмотрении, вещественно аналитические.

Пусть D — ограниченная область в $\overset{\circ}{X}$ с бесконечно гладкой границей ∂D. Как обычно, обозначим через $C^\infty_{\mathrm{loc}}(D, E)$ пространство Фреше бесконечно дифференцируемых сечений расслоения E над D, через $C^\infty(\overline{D}, E)$ — пространство тех сечений, любые производные которых непрерывно продолжаются на $\overline{D}$, а через $C^\infty_{\mathrm{comp}}(D, E)$ — пространство гладких сечений с компактными носителями в D. Кроме того, для измеримого подмножества $\Gamma \subset \partial D$ символ $C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, E)$ обозначает множество $C^\infty(\overline{D}, E)$-сечений, имеющих компактный носитель в $D \cup \Gamma$.

Для открытого множества $O \subset X$ через $L^2(O, E)$ будем обозначать гильбертово пространство всех измеримых сечений с конечной нормой

$$\|u\|_{L^2(O,E)} = \sqrt{(u, u)_{L^2(O,E)}} = \sqrt{\int_O (u, u)_x \, dx}.$$

Мы обозначаем через $H^s(O, E)$ пространство Соболева сечений-распределений расслоения E над O, слабые производные которых до порядка s принадлежат $L^2(O, E)$. Встречающиеся иногда пространства Соболева $H^s(D, E)$ с $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$ определяются с помощью подходящей процедуры интерполяции (см., например, [2, § 1.4.11]). Как обычно, для измеримого подмножества $\Gamma \subset \partial D$ пусть $H^s_{\mathrm{loc}}(D \cup \Gamma, E)$ — множество функций в D, принадлежащих $H^s(\sigma, E)$ для каждого измеримого множества σ в D с $\bar{\sigma} \subset D \cup \Gamma$.

Для сечения $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(O, E)$ мы всегда понимаем Au в смысле распределений в O. Для данного открытого множества O в $\overset{\circ}{X}$ обозначим через $\mathrm{Sol}_A(O)$ пространство слабых решений уравнения $Au = 0$ в O.

Далее, зафиксируем оператор Грина G_A, ассоциированный с A, т. е. такой дифференциальный оператор $G_A(.,.) \in \mathrm{Diff}_{m-1}(X; (F^*, E) \to \Lambda^{n-1})$, что

$$dG_A(g, v) = (\langle g, Av\rangle_y - \langle A'g, v\rangle_y)\, dy$$

для всех $g \in C^\infty(X, F^*)$, $v \in C^\infty(X, E)$; здесь Λ^q — расслоение внешних дифференциальных форм степени $0 \le q \le n$ над X. Этот оператор всегда существует (см. [15, предложение 9.4]).

2. Постановка задачи

Пусть Γ — открытое (в топологии ∂D) связное подмножество ∂D с кусочно гладкой границей $\partial\Gamma$. Для того чтобы сформулировать задачу Коши, зафиксируем систему Дирихле $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ порядка $m-1$ на границе области D. Более точно, каждый B_j есть дифференциальный оператор типа $E \to F_j$ и порядка $m_j \le m-1$, $m_j \ne m_i$ для $j \ne i$ (здесь F_j — гладкие расслоения над некоторой окрестностью U множества ∂D). Символ $\sigma(B_j)$ каждого B_j, суженный на кокасательное расслоение к ∂D, имеет ранг, равный рангу расслоения F_j. Без ограничения общности предположим, что $m_j = j$.

Пусть теперь ρ — какая-нибудь определяющая функция области D, т. е. вещественнозначная бесконечно гладкая функция с $|d\rho| \ne 0$ на ∂D такая, что

$$D = \{x \in \overset{\circ}{X} : \rho(x) < 0\}.$$

Так как ∂D не является характеристической для A в силу инъективности символа, оператор Грина может быть записан в следующем виде в некоторой окрестности U поверхности ∂D:

$$G_A(g,v) = \sum_{j=0}^{m-1} \langle C_j g, B_j v\rangle_y ds(y) + d\rho \wedge G_\nu(g,v),$$

где ds — форма объема на ∂D, индуцированная из X, $\{C_j\}_{j=0}^{m-1}$ — система Дирихле порядка $m-1$ на ∂D с $C_j \in \mathrm{Diff}_{m-j-1}(U; F^*|_U \to F_j^*)$, а $G_\nu(g,v) \in \mathrm{Diff}_{m-1}(U;(F^*,E)|_U \to \Lambda^{n-2}|_U)$ (см. [17, лемма 28.3]).

Задача 1. *По заданному набору граничных данных* $\bigoplus_{j=0}^{m-1} u_j \in \bigoplus_{j=0}^{m-1} L^2(\Gamma, F_j)$ *и сечению* $f \in L^2(D,F)$ *найти такое сечение* $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(D\cup\Gamma, E)$, *что*

$$\int_D \langle A'\phi, u\rangle_y\, dy = \int_D \langle \phi, f\rangle_y\, dy - \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma \langle C_j\phi, u_j\rangle_y\, ds(y) \tag{1}$$

для всех $\phi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D\cup\Gamma, F^*)$.

Нашей ближайшей целью будет «оправдание» такой постановки задачи, да и самого названия «задача Коши» для задачи 1.

Мы выбрали в качестве пространства данных Коши в области D пространство Лебега, потому что пространство Лебега $L^2(D,F)$ является достаточно широким и в то же время не выходит за рамки «обычных функций».

Что касается пространства, в котором мы ищем решение задачи, то, как стало ясно еще в 60-х гг. прошлого столетия, задача о нахождении решений переопределенных эллиптических уравнений в пространствах Соболева, вообще говоря, субэллиптична (ср. [18] для многомерного оператора Коши — Римана). По этой причине решение задачи Коши 1 мы ищем в пространстве $L^2_{\mathrm{loc}}(D\cup\Gamma, E)$, т. е. предполагаем некоторую потерю регулярности (ср. [19] для многомерного оператора Коши — Римана). Кроме того, такая постановка позволяет в дальнейшем привлекать методы теории гильбертовых пространств, при этом немаловажно, что пространство Лебега $L^2(D,E)$ имеет простое скалярное произведение.

Напомним теперь определение слабых предельных значений на Γ (ср. [20; 9, определение 2.2]). Зафиксируем какую-нибудь определяющую функцию $\rho \in C^\infty$ для D и положим $D_\varepsilon = \{x \in D : \rho(x) < -\varepsilon\}$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ множества $D_\varepsilon \Subset D \Subset D_{-\varepsilon}$ суть области с границами $\partial D_{\pm\varepsilon}$ класса C^∞, а векторы $\mp\varepsilon\nu(x)$ принадлежат $\partial D_{\pm\varepsilon}$ для каждой точки $x \in \partial D$ (здесь $\nu(x)$ — внешняя единичная нормаль к поверхности ∂D в точке x).

Определение 1. Пусть $u \in H^m_{\mathrm{loc}}(D)$, а $u_j \in \mathscr{D}'(\Gamma, F_j)$. Будем говорить, что $B_j u = u_j$ *в смысле слабых предельных значений на* Γ, если

$$\langle u_j, v_j\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\partial D} \langle v_j, B_j u(y-\varepsilon\nu(y))\rangle_y\, ds(y) \quad \text{для всех } v_j \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\Gamma, F_j^*).$$

Замечание 1. Поскольку $\{C_j\}_{j=0}^{m-1}$ — система Дирихле на ∂D, для любого $v_j \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D\cup\Gamma, F_j^*)$ найдется $\phi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D\cup\Gamma, F^*)$ такая, что $C_j\phi = v_j$, $C_i\phi = 0$, $i \neq j$, на ∂D (см. [17, лемма 28.2]). Поэтому из теоремы Банаха — Штейнгауза вытекает, что если $u \in H^m_{\mathrm{loc}}(D)$, а $u_j \in \mathscr{D}'(\Gamma, F_j)$, то $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} B_j u = \bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} u_j$ в смысле слабых предельных значений на Γ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=0}^{m-1} \langle u_j, C_j \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_A(\phi, u) \quad \text{для всех } \phi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, F^*). \tag{2}$$

Кроме того, пусть V — какая-нибудь относительно компактная подобласть D. Тогда по тем же соображениям если $u \in H^m_{\mathrm{loc}}(D)$, а $u_j \in \mathscr{D}'(\Gamma, F_j)$, то $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} B_j u = \bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} u_j$ в смысле слабых предельных значений на Γ в том и только в том случае, если

$$\sum_{j=0}^{m-1} \langle u_j, C_j \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_A(\phi, u) \quad \text{для всех } \phi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}((D \cup \Gamma) \setminus V, F^*). \tag{3}$$

Заметим, что для однородной задачи Коши естественным пространством граничных значений в задаче Коши 1 является одна из разновидностей пространства Соболева $H^{-1/2-j}(\Gamma, F_j)$ (см. [9, § 2, 4]). Вопрос о том, какие функции класса $L^2(D)$ имеют следы (в каком-нибудь смысле) на Γ, требует отдельного обстоятельного исследования (см., например, [12]). В нашей ситуации все упрощается, поскольку решение u задачи 1 не только принадлежит $L^2_{\mathrm{loc}}(D \cup \Gamma, E)$, но и $Au \in L^2(D, F)$.

Лемма 1. *Всякое сечение $v \in L^2(D, E)$ такое, что $Av \in L^2(D, F)$, принадлежит $H^m_{\mathrm{loc}}(D, E)$ и имеет в смысле слабых предельных значений следы $\left(\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} B_j u\right)\Big|_{\partial D}$ на ∂D в классе $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\partial D, F_j)$, где $H^{-j-1/2}(\partial D, F_j)$ понимается как двойственное к $H^{j+1/2}(\partial D, F_j)$ относительно спаривания в $L^2(\partial D, F_j)$.*

Доказательство. См. [10, лемма 1.1]. □

В частности, лемма 1 означает, что решение u задачи 1 имеет слабые предельные значения $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} B_j u$ на Γ, принадлежащие классу $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} H^{-1/2-j}_{\mathrm{loc}}(\Gamma, F_j)$. Однако работать в пространствах с отрицательной гладкостью не очень удобно на практике. Поэтому задачу Коши с граничными данными из пространства $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} H^{-1/2-j}(\Gamma, F_j)$ мы рассматривать не будем.

Лемма 2. *Тождество* (1) *выполнено в том и только в том случае, когда $Au = f$ в D в смысле распределений и $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} B_j u = \bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} u_j$ в смысле слабых предельных значений на Γ.*

Доказательство. Пусть задано сечение $f \in L^2(D, F)$. Заметим, что $C^\infty_{\mathrm{comp}}(D, F^*) \subset C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, F^*)$. Поэтому условие (1), в частности, означает, что $Au = f$ (в смысле распределений) в области D. Так как оператор A эллиптичен, из леммы 1 вытекает, что $u \in H^m_{\mathrm{loc}}(D, E)$.

Кроме того, по формуле Стокса для $\phi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, F^*)$ имеем

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_A(\phi, u) = \lim_{\varepsilon \to +0} \Bigg(\int\limits_{D_\varepsilon} \langle \phi, f \rangle_y \, dy - \int\limits_{D_\varepsilon} \langle A' \phi, u \rangle_y \, dy \Bigg)$$
$$= \int\limits_{D} \langle \phi, f \rangle_y \, dy - \int\limits_{D} \langle A' \phi, u \rangle_y \, dy,$$

поскольку $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(D \cup \Gamma, E)$, $f \in L^2(D, F)$. Наконец, применяя (1), видим, что

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_A(\phi, u) = \sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{\Gamma} \langle C_j \phi, u_j \rangle_y \, ds(y)$$

для всех $\phi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, F^*)$. Поэтому $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} B_j u = \bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} u_j$ на Γ в смысле слабых предельных значений (см. замечание 1).

Обратно, как мы отметили, из равенства $Au = f$ в смысле распределений в D следует, что $u \in H^m_{\mathrm{loc}}(D, E)$, значит, интегралы в определении 1 имеют смысл для u. Более того, снова применяя формулу Стокса, для всех $\phi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, F^*)$ имеем

$$\sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{\Gamma} \langle C_j \phi, u_j \rangle_y \, ds(y) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_A(\phi, u) = \int\limits_{D} \langle \phi, f \rangle_y \, dy - \int\limits_{D} \langle A' \phi, u \rangle_y \, dy,$$

т. е. выполнено (1). $\square$

Итак, лемма 2 означает, что для достаточно гладких данных f и $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} u_j$ задача 1 превращается в классическую задачу Коши для оператора A.

Кроме того, пользуясь леммой 2, мы легко получаем теорему единственности для задачи 1.

Теорема 1. *Задача* 1 *имеет не более одного решения.*

Доказательство. В самом деле, полагая $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} u_j = 0$, $f = 0$ и используя лемму 2, видим, что решение задачи Коши 1 есть в этом случае сечение класса $L^2_{\mathrm{loc}}(D \cup \Gamma, E) \cap \mathrm{Sol}_A(D)$ такое, что $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} B_j u|_\Gamma = 0$ в смысле слабых предельных значений. Поскольку это сечение имеет конечный порядок роста вблизи Γ (см. [9, теорема 2.6]), то $u \equiv 0$ в D согласно [9, теорема 2.8]. $\square$

3. Условия разрешимости задачи

Так как мы рассматриваем *переопределенные* системы, естественно предположить, что оператор A включен в некоторый *эллиптический* дифференциальный комплекс

$$0 \to C^\infty(E) \xrightarrow{A} C^\infty(F) \xrightarrow{A_1} C^\infty(G).$$

Это означает, что $A_1 \circ A = 0$ и соответствующий символический комплекс точен вне нулевых сечений расслоения T^*X. Это возможно, например, когда оператор A является *достаточно регулярным* (см., например, [21]). Например, каждый оператор с постоянными коэффициентами достаточно регулярен.

Также операторы с вещественно аналитическими коэффициентами могут быть включены в некоторый эллиптический комплекс при достаточно слабых ограничениях (см. [22]). Конечно, если A эллиптичен, то $A_1 \equiv 0$.

Теперь в силу свойств комплекса $A_1 f = 0$ в D, если задача Коши разрешима. Кроме того, переопределенный оператор A индуцирует касательный оператор A_τ на ∂D (см., например, [15, § 11]). Это означает, что данные Коши $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} u_j$ и правая часть f должны быть согласованы. Именно, взяв в формуле (1) в качестве ϕ сечение $A_1'\beta$ с $\beta \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, G^*)$ и воспользовавшись тождеством $A'A_1' \equiv 0$, видим, что для разрешимости задачи 1 необходимо, чтобы

$$\int\limits_\Gamma \sum_{j=0}^{m-1} \langle C_j A_1'\beta, u_j\rangle_y \, ds(y) = \int\limits_D \langle A_1'\beta, f\rangle_y \, dy \quad \text{для всех } \beta \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, G^*). \quad (4)$$

Далее, предположим, что лапласиан A^*A удовлетворяет условию единственности 1. Тогда у него есть двустороннее (т. е. левое и правое) псевдодифференциальное фундаментальное решение, скажем Φ, на $\overset{\circ}{X}$ (см., например, [2, § 4.4.2]). В частности, $\mathscr{L} = \Phi A^*$ есть левое псевдодифференциальное фундаментальное решение оператора A. Ядра (Шварца) операторов Φ и $\mathscr{L}$ обозначим через $\Phi(x, y)$ и $\mathscr{L}(x, y)$ соответственно, $x \neq y$. Как известно, $\Phi(x, y) \in C^\infty((E \otimes E^*) \setminus \{x = y\})$ и $\mathscr{L}(x, y) = (A^*)'(y)\Phi(x, y)$ (см., например, [15, § 5]).

Для $x \notin \partial D$ обозначим через $M_{\partial D} v(x)$ преобразование Грина с плотностью $v = \bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} v_j \in \bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} \mathscr{D}'(\partial D, F_j)$, т. е. результат действия распределения v на пробную функцию $\left(-\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} C_j \mathscr{L}(x, \cdot)\right) \in \bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} C^\infty(\partial D, F_j^*)$. В частности, определен интеграл Грина $M_\Gamma v$ с плотностью $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} v_j \in \bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} L^2(\Gamma, F_j)$:

$$M_\Gamma v(x) = -\int\limits_\Gamma \sum_{j=0}^{m-1} \langle C_j(y)\mathscr{L}(x, y)), v_j\rangle_y \, ds(y), \quad x \notin \Gamma. \quad (5)$$

Так как ядро $\mathscr{L}(x, y)$ бесконечно дифференцируемо по x при $x \neq y$, преобразование Грина является бесконечно дифференцируемым сечением всюду на X вне носителя $\operatorname{supp} v$ плотности $v = \bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} v_j$. В частности, $M_{\partial D} v \in \mathrm{Sol}_{A^*A}(\overset{\circ}{X} \setminus \operatorname{supp} v)$.

Если ∂D является достаточно гладкой (например, $\partial D \in C^\infty$), то интеграл Грина индуцирует ограниченный линейный оператор

$$M_\Gamma : \bigoplus_{j=0}^{m-1} L^2(\Gamma, F_j) \to L^2(D, E)$$

(см., например, [23, 2.3.2.5]). В частности, в нашем случае, $M_\Gamma \left(\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} u_j\right) \in L^2(D, E)$. Впрочем, можно гарантировать даже ограниченность оператора $M_{\partial D} : \bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} L^2(\,F_j) \to H^{1/2}(D, E)$ (см. там же).

Далее, для сечения $f \in L^2(D,F)$ обозначим через $T_D f$ следующий объемный потенциал:

$$T_D f = \mathscr{L}\chi_D f,$$

где χ_D — характеристическая функция области D. Как известно, потенциал T_D индуцирует ограниченный линейный оператор

$$T_D : L^2(D,F) \to H^m(\widetilde{D},E)$$

для всякой ограниченной области $\overset{\circ}{X} \supset \widetilde{D} \supset D$ с достаточно гладкой границей $\partial\widetilde{D}$ (см., например, [23, 1.2.3.5]).

Лемма 3. *Для всякой функции $v \in L^2(D,E)$ такой, что $Av \in L^2(D,F)$, справедлива формула Грина*

$$M_{\partial D}\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} B_j v\right) + T_D A v = \chi_D v. \tag{6}$$

Доказательство. По лемме 1 сечение v принадлежит $H^m_{\mathrm{loc}}(D,E)$. Как известно, для всякой функции класса $H^m(D,E)$ формула Грина справедлива (см., например, [2, лемма 10.2.3]).

Поскольку для каждого $\varepsilon > 0$ сечение v принадлежит $H^m(D_\varepsilon,E)$, имеем

$$M_{\partial D_\varepsilon}\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} B_j v\right) + T_{D_\varepsilon} A v = \chi_{D_\varepsilon} v. \tag{7}$$

Теперь, переходя в (7) к пределу при $\varepsilon \to +0$, с учетом замечания 1 и леммы 1, получаем формулу (6) в $X \setminus \partial D$. Наконец, так как ∂D — множество нулевой меры Лебега, формула верна в X. $\square$

Ясно, что интегралы $M_\Gamma\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} u_j\right)$ и $T_D f$ принадлежат $\mathrm{Sol}_{A^*A}(\overset{\circ}{X} \setminus \overline{D})$ как интегралы, зависящие от параметров. Поэтому и сечение

$$F = M_\Gamma\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} u_j\right) + T_D f$$

принадлежит $\mathrm{Sol}_{A^*A}(\overset{\circ}{X} \setminus \overline{D})$.

С учетом формулы Грина (6) сечение F может содержать достаточно много информации о решении задачи Коши 1, если оно существует.

Нашей дальнейшей целью будет получение критерия разрешимости задачи Коши 1 с помощью сечения F. Для этого выберем область D^+ так, чтобы множество $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$ было областью с кусочно гладкой границей. Обозначим через $F^\pm$ сужение F на $D^\pm$ (здесь $D^- = D$). В силу вышесказанного $F^+ \in \mathrm{Sol}_{A^*A}(D^+)$.

Кроме того, доопределив $v = \bigoplus_{j=0}^{m-1} v_j$ нулем на границе достаточно большой области $\widetilde{\Omega} \supset \Omega$, видим, что если $\partial D \in C^\infty$, то интеграл Грина индуцирует ограниченный линейный оператор

$$M_\Gamma^+ : \bigoplus_{j=0}^{m-1} L^2(\Gamma,F_j) \to L^2(\widetilde{\Omega} \setminus \overline{D},E)$$

(см., например, [23, 2.3.2.5]). Итак, по построению $F^\pm \in L^2(D^\pm,E)$.

Пусть $A^* \oplus A_1$ обозначает стандартный «блочный» оператор типа $F \to (E,G)$, ставящий в соответствие сечению g пару $(A^*g, A_1 g)$.

Теорема 2. *Пусть операторы A^*A и $A^* \oplus A_1$ удовлетворяют условию единственности* 1. *Задача Коши* 1 *разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие* (4) *и существует сечение $\mathscr{F} \in \mathrm{Sol}_{A^*A}(\Omega)$, совпадающее с F^+ в D^+.*

Доказательство. Пусть задача 1 разрешима, а u — ее решение. Необходимость условия (4) отмечена выше.

Положим
$$\mathscr{F} = F - \chi_D u. \tag{8}$$

По определению сечение $\mathscr{F}$ удовлетворяет $A^*A\mathscr{F} = 0$ в D^+ и принадлежит $L^2(D^+, E)$ и $L^2_{\mathrm{loc}}(D \cup \Gamma, E)$.

Возьмем какую-нибудь область $G \subset D$ с кусочно гладкой границей, для которой $\overline{G} \cap \partial D = \Gamma_1 \Subset \Gamma$, причем так, что Γ_1 имеет хотя бы одну внутреннюю точку x_0 на ∂D. Тогда по формуле Грина (6) в $D^+ \cup \Gamma_1 \cup G$ имеем

$$\begin{aligned}\mathscr{F} &= M_\Gamma\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} u_j\right) + T_D f - \chi_D u \\ &= M_\Gamma\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} B_j u\right) + T_G A u + T_{D\setminus G} f - M_{\partial G}\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} B_j u\right) - T_G A u.\end{aligned}$$

Поэтому для всякой функции $\beta \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(G \cup \Gamma_1)$, равной единице в некоторой окрестности $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ точки x_0, получим

$$\mathscr{F} = M_\Gamma\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} B_j (1-\beta) u\right) - M_{\partial G}\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} B_j (1-\beta) u\right) + T_{D\setminus G} f.$$

Из этого равенства следует, что $\mathscr{F}$ принадлежит $\mathrm{Sol}_{A^*A}(D^+ \cup G \cup \Gamma_2)$ и совпадает с F^+ на D^+, поскольку интеграл $T_{D\setminus G} f$ является решением оператора A^*A всюду вне множества интегрирования как интеграл, зависящий от параметра x, а преобразования Грина $M_\Gamma\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} B_j (1-\beta) u\right)$ и $M_{\partial G}\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} B_j (1-\beta) u\right)$ являются решениями оператора A^*A всюду в $D^+ \cup \Gamma_2 \cup G$.

Наконец, в силу произвольности области $G \subset D$ с описанными выше свойствами $\mathscr{F}$ на самом деле принадлежит $\mathrm{Sol}_{A^*A}(\Omega)$ и на D^+ совпадает с F^+.

Обратно, пусть существует сечение $\mathscr{F} \in \mathrm{Sol}_{A^*A}(\Omega)$, совпадающее с F^+ на D^+. Положим
$$u = F^- - \mathscr{F}^-. \tag{9}$$

По построению сечение u принадлежит $L^2_{\mathrm{loc}}(D \cup \Gamma, E) \cap H^m_{\mathrm{loc}}(D, E)$.

Из теоремы о слабом скачке интеграла Грина (см. [9, лемма 2.7]) и того факта, что $T_D f$ и $\mathscr{F}$ принадлежат $H^m_{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$, следует, что

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_A(\phi, u) &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_A(\phi, F^-) - \int\limits_{\partial D_{-\varepsilon}} G_A(\phi, F^+)\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_A\left(\phi, M_\Gamma^-\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} u_j\right)\right) - \int\limits_{\partial D_{-\varepsilon}} G_A\left(\phi, M_\Gamma^+\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} u_j\right)\right)\right) \\ &= \int\limits_\Gamma \sum_{j=0}^{m-1} \langle C_j \phi, u_j\rangle_y \, ds(y) \quad \text{для всех } \phi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, F^*),\end{aligned}$$

т. е. $\bigoplus_{j=0}^{m-1} B_j u = \bigoplus_{j=0}^{m-1} u_j$ в смысле слабых предельных значений на Γ (см. замечание 1).

Для завершения доказательства осталось убедиться, что $Au = f$ в D. С этой целью рассмотрим сечение $g = (f - Au)$, принадлежащее $\mathscr{D}'(D, F)$. Так как сечение f удовлетворяет $A_1 f = 0$ в смысле распределений в D, то и сечение g обладает этим свойством. Кроме того, сечение g удовлетворяет $A^* g = 0$ в смысле распределений в D.

В самом деле, так как Φ является двусторонним фундаментальным решением лапласиана A^*A, то

$$A^*(\chi_D f - AT_D f) = A^*(\chi_D f - A\Phi A^* \chi_D f) = 0 \quad \text{в } \overset{\circ}{X}. \tag{10}$$

Тогда

$$A^* g = A^* f - A^* A M_\Gamma \left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} u_j \right) - A^* A T_D f = 0 \quad \text{в } D.$$

Итак, $(A^* \oplus A_1) g = 0$ в D.

Зафиксируем какие-нибудь связности $\nabla_E \in \mathrm{Diff}_1(X; E \to E \otimes (T^*X)_c)$ и $\nabla_G \in \mathrm{Diff}_1(X; G \to G \otimes (T^*X)_c)$ в расслоениях E и G, совместные с соответствующими эрмитовыми метриками (см. [24, гл. III, предложение 1.11]). Пусть m_1 — порядок оператора A_1.

Положим

$$\widetilde{Q}_E = \begin{cases} \nabla_E \big(\nabla_E^* \nabla_E\big)^{\frac{m_1 - m - 1}{2}}, & \text{если } (m_1 - m) \text{ нечетное положительное,} \\ \big(\nabla_E^* \nabla_E\big)^{(m_1 - m)/2}, & \text{если } (m_1 - m) \text{ четное положительное,} \\ I, & \text{если } m_1 \le m; \end{cases}$$

$$\widetilde{Q}_G = \begin{cases} \nabla \big(\nabla_G^* \nabla_G\big)^{\frac{m - m_1 - 1}{2}}, & \text{если } (m - m_1) \text{ нечетное положительное,} \\ \big(\nabla_G^* \nabla_G\big)^{(m - m_1)/2}, & \text{если } (m - m_1) \text{ четное положительное,} \\ I, & \text{если } m \le m_1. \end{cases}$$

Пусть $\widetilde{m} = \max(m, m_1)$. Из свойств связности вытекает, что символы операторов $\widetilde{Q}_E \in \mathrm{Diff}_{\widetilde{m}-m}(X; E \to \widetilde{B}_E)$ и $\widetilde{Q}_G \in \mathrm{Diff}_{\widetilde{m}-m_1}(X; G \to \widetilde{B}_G)$ инъективны; здесь $\widetilde{B}_E$ и $\widetilde{B}_G$ — соответствующие векторные расслоения. Зафиксируем какие-нибудь инъективные дифференциальные операторы нулевого порядка $\mathscr{I}_E : E \to \widetilde{B}_E$, $\mathscr{I}_G : G \to \widetilde{B}_G$. Ясно, что операторы $Q_E = \widetilde{Q}_E \oplus (\widetilde{Q}_E + \mathscr{I}_E) \in \mathrm{Diff}_{\widetilde{m}-m}(X; E \to B_E)$ и $Q_G = \widetilde{Q}_G \oplus (\widetilde{Q}_G + \mathscr{I}_G) \in \mathrm{Diff}_{\widetilde{m}-m_1}(X; G \to B_G)$ инъективны, а их символы также инъективны. Тогда эллиптичность комплекса означает, что

$$P = Q_E A^* \oplus Q_G A_1$$

принадлежит $\mathrm{Diff}_{\widetilde{m}}(X; F \to (B_E, B_G))$ и имеет инъективный символ (ср. [15, § 6.4]). Кроме того, по построению $\mathrm{Sol}_P(O) = \mathrm{Sol}_{A^* \oplus A_1}(O)$ для любой области $O \subset \overset{\circ}{X}$, а значит, оператор P удовлетворяет условию единственности 1.

Так как $P(f - AT_D f) = Pg = 0$ в D, по лемме 1 g и $(f - AT_D f)$ принадлежат $H^{\widetilde{m}}_{\mathrm{loc}}(D, F)$. Далее, по формуле Стокса

$$\int_{\partial D_\varepsilon} G_{A_1}(\beta, g) = \int_{D_\varepsilon} \langle A_1' \beta, (Au - f) \rangle_y \, dy \quad \text{для всех } \beta \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, G^*). \tag{11}$$

Мы доказали, что $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} B_j u = \bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} u_j$ в смысле слабых предельных значений на Γ. Теперь, снова пользуясь формулой Стокса и условием согласования (4), получаем с учетом замечания 1

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{D_\varepsilon}\langle A_1'\beta,(Au-f)\rangle_y\,dy = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big(-\int\limits_{D_\varepsilon}\langle A_1'\beta,f\rangle_y\,dy+\int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_A(A_1'\beta,u)\Big)$$

$$= -\int\limits_{D}\langle A_1'\beta,f\rangle_y\,dy+\int\limits_{\Gamma}\sum_{j=1}^{m-1}\langle C_jA_1'\beta,u_j\rangle_y\,ds(y)=0 \text{ для всех } \beta\in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D\cup\Gamma,G^*). \tag{12}$$

Комбинируя (11) и (12), имеем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_{A_1}(\beta,g)=0 \quad \text{для всех } \beta\in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D\cup\Gamma,G^*). \tag{13}$$

Аналогично из формулы Стокса и [15, предложения 9.5] следует, что для всех $h\in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D\cup\Gamma,E^*)$

$$\int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_{A^*}(h,g) = -\int\limits_{D_\varepsilon}\langle (A^*)'h,f\rangle_y\,dy+\int\limits_{D_\varepsilon}\langle (A^*)'h,AT_Df\rangle_y\,dy$$
$$+\int\limits_{\partial D_\varepsilon}\overline{\sum_{j=1}^{m-1}\Big\langle C_j\star_F\Big(AM_\Gamma\Big(\bigoplus_{j=0}^{m-1}u_j\Big)-A\mathscr{F}\Big),B_j\star_E^{-1}h\Big\rangle_y}\,ds_\varepsilon(y). \tag{14}$$

Пусть $\tilde h\in C_{\mathrm{comp}}(\Omega,E^*)$ — сечение такое, что $\tilde h = h$ в D. Тогда согласно (10) имеем

$$-\int\limits_{D}\langle (A^*)'h,f\rangle_y\,dy+\int\limits_{D}\langle (A^*)'h,AT_Df\rangle_y\,dy = -\int\limits_{\Omega\setminus D}\langle (A^*)'\tilde h,AT_Df\rangle_y\,dy. \tag{15}$$

Более того, так как $\mathscr{F}\in C^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega,E)$, $T_Df\in \mathrm{Sol}_{A^*A}(D^+)$, из формулы Стокса следует, что

$$-\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial D_\varepsilon}\overline{\sum_{j=1}^{m-1}\Big\langle C_j\star_F A\mathscr{F},B_j\star_E^{-1}h\Big\rangle_y}\,ds_\varepsilon(y) = \int\limits_{\Omega\setminus D}\langle (A^*)'\tilde h,AT_Df\rangle_y\,dy$$
$$-\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial D_{-\varepsilon}}\sum_{j=0}^{m-1}\overline{\Big\langle C_j\star_F AM_\Gamma\Big(\bigoplus_{j=0}^{m-1}u_j\Big),B_j\star_E^{-1}h\Big\rangle_y}\,ds_{-\varepsilon}(y). \tag{16}$$

Значит, из равенств (14)–(16) получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_{A^*}(h,g) = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big(\int\limits_{\partial D_\varepsilon}\sum_{j=1}^{m-1}\overline{\Big\langle C_j\star_F AM_\Gamma\Big(\bigoplus_{j=0}^{m-1}u_j\Big),B_j\star_E^{-1}h\Big\rangle_y}\,ds_\varepsilon(y)$$
$$-\int\limits_{\partial D_{-\varepsilon}}\sum_{j=1}^{m-1}\overline{\Big\langle C_j\star_F AM_\Gamma\Big(\bigoplus_{j=0}^{m-1}u_j\Big),B_j\star_E^{-1}h\Big\rangle_y}\,ds_{-\varepsilon}(y)\Big)=0$$

для всех $h \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, E^*)$ в силу леммы о слабом скачке интегралов Грина (см. [9, лемма 2.7]). Итак,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_{A^*}(h, g) = 0 \quad \text{для всех } h \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, E^*). \tag{17}$$

Зафиксируем какую-нибудь систему Дирихле $\{\widetilde{B}_j\}_{j=0}^{\widetilde{m}-1}$ порядка $\widetilde{m} - 1$ в некоторой окрестности ∂D и обозначим через $\{\widetilde{C}_j\}_{j=0}^{\widetilde{m}-1}$ сопряженную ей систему Дирихле, т. е. такую, что оператор Грина G_P представлен в виде

$$G_P(\phi, \psi) = \sum_{j=0}^{\widetilde{m}-1} \langle \widetilde{C}_j \phi, \widetilde{B}_j \psi \rangle_y ds(y)_\varepsilon + d\rho \wedge \widetilde{G}_\nu(\phi, \psi)$$

в некоторой окрестности ∂D для $\psi \in C^\infty(F)$, $\phi \in C^\infty((B_E^*, B_G^*))$ (см. [17, лемма 28.3]). Из [15, предложения 9.5], (13), (17) и того факта, что $(A^* \oplus A_1)g = 0$ в D, заключаем, что

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon} \sum_{j=0}^{\widetilde{m}-1} \langle \widetilde{C}_j \phi, \widetilde{B}_j g \rangle_y \, ds_\varepsilon(y) &= \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_P(\phi, g) \\
&= \lim_{\varepsilon \to +0} \Bigg(\int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_{Q_G A_1}(\phi_G, g) + \int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_{Q_E A^*}(\phi_E, g) \Bigg) \\
= \lim_{\varepsilon \to +0} \Bigg(\int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_{Q_G}(\phi_G, A_1 g) &+ G_{A_1}(Q'_G \phi_G, g) + G_{Q_E}(\phi_E, A^* g) + G_{A^*}(Q'_E \phi_E, g) \Bigg) \\
&= \lim_{\varepsilon \to +0} \Bigg(\int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_{A_1}(Q'_G \phi_G, g) + G_{A^*}(Q'_E \phi_E, g) \Bigg) = 0
\end{aligned}$$

для всех $\phi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, (B_E^*, B_G^*))$; здесь $\phi = (\phi_E, \phi_G)$, $\phi_E \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, B_E^*)$, $\phi_G \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, B_G^*)$.

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon} G_P(\phi, g) = 0 \quad \text{для всех } \phi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, (B_E^*, B_G^*)). \tag{18}$$

Из (18) и замечания 1 следует, что $\bigoplus\limits_{j=0}^{\widetilde{m}-1} \widetilde{B}_j g = 0$ на Γ в смысле слабых предельных значений. В частности, это означает, что $g \in \mathrm{Sol}_P(D)$ имеет конечный порядок роста вблизи Γ (см. [9, теорема 2.6]).

Наконец, теорема единственности [9, теорема 2.8] задачи Коши для систем с инъективным символом позволяет заключить, что $g = f - Au \equiv 0$ в D, так как выполнено условие единственности 1 для оператора $A^* \oplus A_1$. □

Замечание 2. Из теоремы 2 легко извлечь условия локальной разрешимости задачи Коши. В самом деле, зафиксируем точку $x_0 \in \Gamma$. Пусть V — какая-нибудь (односторонняя) окрестность точки x_0 в D, а $\widehat{\Gamma} = \partial V \cap \Gamma$. Положим $\widehat{F} = M_{\widehat{\Gamma}} \Bigg(\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} u_j \Bigg) + T_V f$. Так как

$$F = \widehat{F} + M_{\Gamma \setminus \widehat{\Gamma}} \Bigg(\bigoplus_{j=0}^{m-1} u_j \Bigg) + T_{D \setminus V} f,$$

то F^+ продолжается как решение лапласиана A^*A в $\widehat{\Omega} = V \cup \widehat{\Gamma} \cup D^+$ тогда и только тогда, когда этим свойством обладает потенциал $\widehat{F}^+$. Поэтому при условии (4) решение задачи Коши существует в той окрестности V, в которую продолжается потенциал F^+.

Следствие 1. *Пусть операторы A^*A и $A^* \oplus A_1$ удовлетворяют условию единственности* 1. *Задача Коши* 1 *разрешима в пространстве $L^2(D,E)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие* (4) *и существует сечение $\mathscr{F} \in \mathrm{Sol}_{A^*A}(\Omega) \cap L^2(\Omega, E)$, совпадающее с F^+ на D^+.*

Доказательство. Если задача Коши 1 разрешима в $L^2(D,E)$, то из теоремы 2 вытекает, что существует сечение $\mathscr{F} \in \mathrm{Sol}_{A^*A}(\Omega)$, совпадающее с F^+ на D^+ и, более того, это сечение задается формулой (8). Поэтому $\mathscr{F} \in L^2(D^\pm, E) \cap C^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega, E)$. Следовательно, $\mathscr{F} \in L^2(\Omega, E)$.

Обратно, пусть существует сечение $\mathscr{F} \in \mathrm{Sol}_{A^*A}(\Omega) \cap L^2(\Omega, E)$, совпадающее с F^+ на D^+. Тогда из теоремы 2 следует, что задача Коши 1 разрешима, а ее решение u задается формулой (9). Так как $\mathscr{F}^- \in L^2(D,E)$, то и u принадлежит $L^2(D,E)$. $\square$

4. Базисы с двойной ортогональностью

В работе [9] базисы с двойной ортогональностью применялись для изучения однородной задачи Коши (ср. также [8, 25] для многомерной системы Коши — Римана). Коротко изложим этот метод применительно к задаче 1. С этой целью обозначим через $h(\Omega)$ пространство $\mathrm{Sol}_{A^*A}(\Omega) \cap L^2(\Omega, E)$.

Лемма 4. *Если $\omega \Subset \Omega$ — область с кусочно гладкой границей и $\Omega \setminus \omega$ не имеет компактных связных компонент, то существует ортонормированный базис $\{b_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ в $h(\Omega)$ такой, что $\{b_{\nu|\omega}\}_{\nu=1}^\infty$ — ортогональный базис в $h(\omega)$.*

Доказательство. На самом деле эти сечения $\{b_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ суть собственные векторы компактного самосопряженного оператора $R(\Omega,\omega)^* R(\Omega,\omega)$, где

$$R(\Omega,\omega) : h(\Omega) \to h(\omega)$$

— оператор естественного вложения (см., например, [26; 9, теорема 6.5]). $\square$

Воспользуемся базисом $\{b_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ для того, чтобы упростить следствие 1. С этой целью зафиксируем области $\omega \Subset D^+$, Ω, как в лемме 4, и обозначим через

$$c_\nu(F^+) = \frac{(F^+, b_\nu)_{L^2(\omega,E)}}{\|b_\nu\|^2_{L^2(\omega,E)}}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

коэффициенты Фурье сечения F^+ по ортогональному базису $\{b_{\nu|\omega}\}_{\nu=1}^\infty$ в $h(\omega)$.

Следствие 2. *Пусть операторы A^*A и $A^* \oplus A_1$ удовлетворяют условию единственности* 1. *Задача Коши* 1 *разрешима в классе $L^2(D,E)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие* (4) *и сходится ряд $\sum\limits_{\nu=1}^\infty |c_\nu(F^+)|^2$.*

Доказательство. В самом деле, если задача 1 разрешима в пространстве $L^2(D,E)$, то согласно следствию 1 выполнено условие (4) и найдется сечение $\mathscr{F} \in h(\Omega)$, совпадающее с F^+ в ω.

По лемме 4

$$\mathscr{F}(x) = \sum_{\nu=1}^\infty k_\nu(\mathscr{F}) b_\nu(x), \quad x \in \Omega, \tag{19}$$

где $k_\nu(\mathscr{F}) = (\mathscr{F}, b_\nu)_{L^2(\Omega,E)}$, $\nu \in \mathbb{N}$, — коэффициенты Фурье $\mathscr{F}$ по ортонормированному базису $\{b_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ в $h(\Omega)$.

Из неравенства Бесселя следует, что ряд $\sum\limits_{\nu=1}^\infty |k_\nu(\mathscr{F})|^2$ сходится.

Наконец,

$$c_\nu(F^+) = \frac{(R(\Omega,\omega)\mathscr{F}, R(\Omega,\omega)b_\nu)_{L^2(\omega,E)}}{(R(\Omega,\omega)b_\nu, R(\Omega,\omega)b_\nu)_{L^2(\omega,E)}} = \frac{(\mathscr{F}, R(\Omega,\omega)^* R(\Omega,\omega)b_\nu)_{L^2(\Omega,E)}}{(b_\nu, R(\Omega,\omega)^* R(\Omega,\omega)b_\nu)_{L^2(\Omega,E)}} = k_\nu(\mathscr{F}),$$

т. е. необходимость условий следствия доказана.

Обратно, если выполнены условия следствия, то согласно теореме Рисса — Фишера имеем

$$\mathscr{F}(x) = \sum_{\nu=1}^\infty c_\nu(F^+) b_\nu(x), \quad x \in \Omega, \tag{20}$$

в пространстве $h(\Omega)$. По построению эта функция совпадает с F^+ в ω. Значит, из следствия 1 вытекает, что задача 1 разрешима в классе $L^2(D,E)$. $\square$

Примеры базисов со свойством двойной ортогональности можно найти в [2, 9, 27].

Получим формулу Карлемана для решений задачи 1. С этой целью рассмотрим ядра Карлемана:

$$\mathfrak{C}_N(y,x) = \mathscr{L}(y,x) - \sum_{\nu=1}^N c_\nu(\mathscr{L}(y,\cdot)) b_\nu(x), \quad N \in \mathbb{N},\ x \in \Omega,\ y \notin \overline{\omega},\ x \neq y.$$

Следствие 3. *Пусть A^*A и $A^* \oplus A_1$ удовлетворяют условию единственности 1. Тогда для всякого сечения $v \in L^2(D,E)$, которое имеет на Γ слабые предельные значения $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} B_j v$ класса $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} L^2(\Gamma, F_j)$ и для которого $Av \in L^2(D,F)$, справедлива формула Карлемана*

$$\lim_{N\to\infty} \|v - v^{(N)}\|_{L^2(D,E)} = 0, \tag{21}$$

где

$$v^{(N)}(x) = -\int\limits_\Gamma \sum_{j=0}^{m-1} \langle C_j \mathfrak{C}_N(.,x), B_j v\rangle_y \, ds(y) + \int\limits_D \langle \mathfrak{C}_N(.,x), Av\rangle_y \, dy.$$

Доказательство. Для данных Коши $f = Av$ и $\bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} u_j = (B_j v)|_\Gamma$ задача Коши 1 разрешима в $L^2(D,E)$. Значит, из следствия 1 вытекает, что ее решение u задается формулой (9). По теореме единственности 1 имеем $u = v$ в D.

Так как $\overline{\omega} \cap \overline{D} = \varnothing$, можно воспользоваться теоремой Фубини и заключить, что для всех $\nu \in \mathbb{N}$

$$k_\nu(F) = \int\limits_D \langle c_\nu(\mathscr{L}(y,.)), f\rangle \, dy - \int\limits_\Gamma \sum_{j=0}^{m-1} \langle C_j(y) c_\nu(\mathscr{L}(y,.)), u_j\rangle_y \, ds(y). \tag{22}$$

Более того (см. доказательство следствия 2), мы знаем, что сечение $\mathscr{F}$ задается формулой (19) с коэффициентами (22). Частичные суммы этого ряда сходятся к $\mathscr{F}$ в $L^2(\Omega, E)$, а значит, суженные на D^-, они сходятся к $\mathscr{F}^-$ в $L^2(D, E)$, т. е.

$$\lim_{N\to\infty}\Bigg\| v - M_\Gamma\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} u_j\right) - T_D f - \sum_{\nu=1}^{N}\left(\int_D \langle c_\nu(\mathscr{L}(y,\cdot)), f\rangle_y\, dy - \int_\Gamma \sum_{j=0}^{m-1} \langle C_j(y) c_\nu(\mathscr{L}(y,\cdot)), u_j\rangle_y\, ds(y)\right) b_\nu \Bigg\|_{L^2(D,E)} = 0.$$

Это и дает равенство (21) после перегруппировки слагаемых. $\square$

Замечание 3. Формула (9) означает, что $v = M_\Gamma\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} B_j v\right) + T_D A v - \mathscr{F}$. Так как $\mathscr{F}$ и каждая из функций b_ν — решение эллиптической системы A^*A в Ω, по теореме Стилтьеса — Витали ряд (20) сходится в $C^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Поэтому если $\bigoplus_{j=0}^{m-1} B_j v \in \bigoplus_{j=0}^{m-1} H^{s-j-1/2}(\Gamma, F_j)$, $Av \in H^p(D, F)$, $m \le s \le p+m$, то $T_D A v \in H^{p+m}(D, E)$, $M_\Gamma\left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} B_j v\right) \in C^\infty_{\mathrm{loc}}(D, E) \cap H^s_{\mathrm{loc}}(D \cup \Gamma, E)$ и мы дополнительно получаем: 1) $Av^{(N)}$ сходится к Av в $H^p_{\mathrm{loc}}(D\cup\Gamma, F)$; 2) $v^{(N)}$ сходится к v в $H^s_{\mathrm{loc}}(D\cup\Gamma, E) \cap H^{p+m}_{\mathrm{loc}}(D, E)$, $s \in \mathbb{N}$ (см. [16]).

Уместно отметить, что на самом деле мы получили те же самые ядра Карлемана, что и для $f = 0$ (см. [9, теорема 12.6]). В частности, если A — оператор Дирака, а D — часть единичного шара в $\mathbb{R}^n$, отсеченная гиперповерхностью $\Gamma \not\ni 0$, то получаем как точное, так и приближенное решения задачи 1 с использованием разложения по сферическим гармоникам (см. [9, § 13]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адамар Я.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1997.
2. *Tarkhanov N. N.* The Cauchy problem for solutions of elliptic equations. Berlin: Akad. Verl., 1995.
3. *Лаврентьев М. М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. № 20. С. 819–842.
4. *Мазья В. Г., Хавин В. П.* О решениях задачи Коши для уравнения Лапласа (единственность, нормальность, аппроксимация) // Тр. Моск. мат. о-ва. 1974. Т. 307. С. 61–114.
5. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 32. С. 99–215. (Итоги науки и техники).
6. *Nacinovich M.* Cauchy problem for overdetermined systems // Ann. Mat. Pura Appl. Ser. IV. 1990. V. 156. P. 265–321.
7. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука, 1990.
8. *Айзенберг Л. А., Кытманов А. М.* О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на куске ее границы // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 5. С. 490–597.
9. *Shlapunov A. A., Tarkhanov N. N.* Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols // Proc. London Math. Soc. 1995. V. 71, N 3. P. 1–52.
10. *Shlapunov A. A., Tarkhanov N. N.* Mixed problems with a parameter // Рос. журн. мат. физики. 2005. V. 12, N 1. P. 97–124.
11. *Шестаков И. В.* О задаче Коши в пространствах Соболева для операторов Дирака // Изв. вузов. Математика. 2009. № 7. С. 51–64.
12. *Shestakov I., Shlapunov A.* Negative Sobolev spaces in the Cauchy problem for the Cauchy–Riemann operator // Журнал СФУ. Серия физ.-мат. 2009. V. 2, N 1. P. 17–30.

13. *Федченко Д. П., Шлапунов А. А.* О задаче Коши для многомерного оператора Коши — Римана в пространстве Лебега L^2 в области // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 11. С. 141–160.
14. *Hörmander L.* Notions of convexity. Berlin: Birkhäuser Verl., 1994.
15. *Тарханов Н. Н.* Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов. Новосибирск: Наука, 1990.
16. *Shestakov I., Shlapunov A.* On the Cauchy problem for operators with injective symbols in Sobolev spaces // Журн. СФУ. Серия физ.-мат. 2008. V. 1, N 1. P. 52–62.
17. *Тарханов Н. Н.* Ряд Лорана для решений эллиптических систем. Новосибирск: Наука, 1991.
18. *Kerzman N.* Hölder and L^p-estimates for solutions of $\bar{\partial} u = f$ // Commun. Pure Appl. Math. 1971. V. 24, N 3. P. 301–379.
19. *Hörmander L.* L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator // Acta Math. 1965. V. 113, N 1–2. P. 89–152.
20. *Straube E. J.* Harmonic and analytic functions admitting a distribution boundary value // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. 1984. V. 11, N 4. P. 559–591.
21. *Spencer D. C.* Overdetermined systems of linear partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. V. 75, N 2. P. 179–239.
22. *Дудников П. И., Самборский С. Н* Линейные переопределенные системы уравнений с частными производными, граничные и начально-граничные задачи для них // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1991. Т. 65. С. 5–93. (Итоги науки и техники).
23. *Ремпель С., Шульце Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1986.
24. *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976.
25. *Шлапунов А. А., Тарханов Н. Н.* О задаче Коши для голоморфных функций класса Лебега L^2 в области // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 5. С. 914–922.
26. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
27. *Shapiro H. S.* Stefan Bergman's theory of doubly-orthogonal functions. An operator-theoretic approach // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 1979. V. 79, N 6. P. 49–56.

Статья поступила 3 декабря 2007 г.

Шестаков Иван Вениаминович, Шлапунов Александр Анатольевич
Институт математики, Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
aashlapuno@mail.ru