*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2009. Том 50, № 4*

*УДК 512.81+512.546.4+512.664.3*

# ДЕФОРМАЦИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И КАНОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ НА ОРБИТАХ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

**С. П. Барановский, И. В. Широков**

**Аннотация.** Доказан результат, устанавливающий взаимно однозначное соответствие между существованием линейного канонического вложения, позволяющего осуществлять переход к координатам Дарбу на орбитах коприсоединенного представления, и существованием поляризации линейного функционала. В качестве следствия из основной теоремы доказано, что произвольная поляризация является нормальной, т. е. удовлетворяет условию Пуканского. Рассмотрен пример.

**Ключевые слова:** алгебра Ли, орбита коприсоединенного представления, скобка Пуассона — Ли, поляризация, условие Пуканского.

## 1. Введение

Пусть $G$ — вещественная связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ — пространство, дуальное к алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Группа $G$ действует на пространстве $\mathfrak{g}^*$ коприсоединенным представлением $\mathrm{Ad}^*$, расслаивая последнее на орбиты коприсоединенного представления. Пусть $\lambda$ — функционал из $\mathfrak{g}^*$, $\mathscr{O}_\lambda$ — орбита коприсоединенного представления, проходящая через точку $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Известно, что пара $(\mathscr{O}_\lambda, \omega_\lambda)$, где $\omega_\lambda$ — форма Кириллова, является симплектическим многообразием.

Согласно теореме Дарбу на многообразии $\mathscr{O}_\lambda$ существуют такие локальные координаты $(q,p)$, называемые *каноническими*, в которых форма Кириллова $\omega_\lambda$ принимает вид

$$\omega_\lambda = dp_a \wedge dq^a, \quad a = 1, \dots, \frac{1}{2}\dim \mathscr{O}_\lambda. \tag{1}$$

Пусть $e_i$ — базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ($i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$), тогда $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$, где $C_{ij}^k$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Введем 1-формы $e^i$, дуальные к базисным векторам $e_i$, т. е. $\langle e^i, e_j\rangle = \delta^i_j$. 1-Формы $e^i$ образуют базис пространства $\mathfrak{g}^*$. Далее мы будем называть пространство $\mathfrak{g}^*$ *коалгеброй*, а элементы из $\mathfrak{g}^*$ — *ковекторами*. Из вышесказанного следует, что произвольная точка $x \in \mathfrak{g}^*$ имеет координаты $x_i$: $x = x_i e^i$.

На коалгебре $\mathfrak{g}^*$ существует скобка Пуассона — Ли, определяемая следующим образом:

$$\{\phi, \psi\}(x) = \langle x, [\nabla\phi, \nabla\psi]\rangle, \quad \phi, \psi \in C^\infty(\mathfrak{g}^*). \tag{2}$$

Для линейных координат $x_i$ на $\mathfrak{g}^*$ скобка (2) примет вид

$$\{x_i, x_j\} = C_{ij}^k x_k.$$

Пусть задано вложение $\mathscr{O}_\lambda \to \mathfrak{g}^*$, или, в координатах, $(q^a, p_a) \mapsto x_i$. Выделим специальный класс канонических вложений $(q^a, p_a) \mapsto x_i$, введя следующее

Определение 1. Вложение $(q^a, p_a) \mapsto x_i$ назовем *p-линейным каноническим вложением*, если функции $x_i(q,p)$, где $(q^a, p_a)$ — координаты Дарбу, удовлетворяют условиям

$$x_i(q,p) = X_i^a(q)p_a + \chi_i(q),\ x_i(0,0) = \lambda_i,\ a = 1,\dots,\frac{1}{2}\dim\mathscr{O}_\lambda;\ i = 1,\dots,\dim\mathfrak{g}. \quad (3)$$

Напомним некоторые определения, следуя работам [1, 2]. Введем на $\mathfrak{g}$ кососимметрическую форму $B_\lambda : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to R$:

$$B_\lambda(X,Y) = \langle\lambda, [X,Y]\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (4)$$

Определение 2. Подалгебра $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ называется *поляризацией функционала* $\lambda$, если

$$\langle\lambda, [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\rangle = 0, \quad (5)$$

$$\dim\mathfrak{n} = \dim\mathfrak{g} - \frac{1}{2}\dim\mathscr{O}_\lambda, \quad (6)$$

иначе говоря, поляризация является максимальным вполне изотропным подпространством относительно формы (4).

Более того, поляризация $\mathfrak{n}$ является подалгеброй изотропии алгебры $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ локальной группы $G_\mathbb{C}$, действующей на локальном однородном многообразии $Q$,

$$\dim Q = \frac{1}{2}\dim\mathscr{O}_\lambda = \dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{n}, \quad (7)$$

являющимся лагранжевым подмногообразием к орбите $\mathscr{O}_\lambda$. Заметим также, что согласно [1] произвольная поляризация $\mathfrak{n}$ содержит стабилизатор функционала $\lambda$, т. е. $\mathfrak{g}^\lambda \subset \mathfrak{n}$.

Основным результатом данной работы является следующая

**Теорема 1.** *p-Линейное каноническое вложение $\mathscr{O}_\lambda \to \mathfrak{g}^*$ существует тогда и только тогда, когда существует поляризация $\mathfrak{n}$ линейного функционала $\lambda$.*

Далее везде, где это не будет вызывать разночтений, мы будем называть $p$-линейное каноническое вложение просто *каноническим вложением.*

Вопрос о существовании канонического вложения играет центральную роль при проведении квантования симплектических многообразий (см., например, [3, 4]). Основное преимущество линейности функций (3) состоит в том, что квадратичные по $x_i$ функции Гамильтона переходят в квадратичные по $p_a$ операторы при проведении квантования, причем не возникает проблем с упорядочиванием полученных операторов.

В работе [3] доказан результат (теорема 1.4), эквивалентный теореме 1. Однако между данными результатами имеется существенное отличие. В работе [3] при доказательстве теоремы 1.4 существенную роль играет специальное условие, накладываемое на поляризацию. Данное условие называется *условием Пуканского*:

$$\lambda + \mathfrak{n}^\perp \subset \mathscr{O}_\lambda, \quad (8)$$

где

$$\mathfrak{n}^\perp = \{\mu \in \mathfrak{g}^* \mid \langle\mu, \mathfrak{n}\rangle = 0\}. \quad (9)$$

Согласно работе [2] поляризация, удовлетворяющая условию Пуканского, называется *нормальной.* Таким образом, в работе [3] требование нормальности поляризации является ключевым при построении канонических координат, а также при квантовании орбит, причем отказ от этого условия делает несостоятельным приведенные доказательства. В нашем же подходе из теоремы 1 получено

**Следствие 1.1.** *Произвольная поляризация* $\mathfrak{n}$ *линейного функционала* $\lambda \in \mathscr{O}_\lambda$ *нормальна.*

Иначе говоря, нам удалось показать, что условие Пуканского, обычно накладываемое на поляризации, излишне и автоматически вытекает из существования поляризации.

Структура данной работы такова. В п. 2 излагается специальный формализм *деформаций векторных полей* (см. [5]). Данный формализм используется при доказательстве теоремы 1 и следствия 1.1, которым посвящен п. 3. В п. 4 приведен нетривиальный пример.

## 2. Деформации векторных полей на однородных пространствах

Пусть $M$ — однородное правое $G$-пространство, где $G$ — группа Ли преобразований пространства $M$. Однородное пространство $M$ можно представить как фактор-многообразие $G/H$, где $H$ — подгруппа стационарности (изотропии) некоторой точки $q_0 \in M$. Введем следующие обозначения: $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $G$, $\mathfrak{n}$ — алгебра Ли группы $H$, $\{X_i\}$, $i = 1, \dots, \dim G$, — векторные поля (генераторы действия группы $G$) на пространстве $M$, образующие алгебру Ли $\mathfrak{g}$.

Известно (см., например, [6]), что однородному пространству естественным образом сопоставляется главное расслоение $G(M = G/H, H, \pi)$. Пусть $\{g^i\}$, где $i = 1, \dots, \dim G$, — координаты расслоенного многообразия $G$. Над областями тривиализации в расслоенном пространстве $G$ можно ввести координаты прямого произведения $U \times H$, где $U \subset M$ — область в $M$ (область тривиализации). Эти координаты в дальнейшем будут обозначаться через $(q^a, h^{\bar{a}})$, $a = 1, \dots, \dim M$, $\bar{a} = 1, \dots, \dim H$. Таким образом, имеет место локальное расщепление координат $\{g^i\}$ на координаты слоя и координаты базы, что можно обозначить как $(g^i) = (q^a, h^{\bar{a}})$. Если (локально) задано гладкое сечение $s : M \to G$ расслоения $G$, то в этом случае координаты произвольной точки $g \in G$ можно представить в виде $g = hs(q)$. Выше и далее в этом параграфе $i, j, k, \dots = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$, а множество индексов $a, b, c, \dots$ пробегает значения $1, \dots, \dim M$.

Векторные поля $X_i$ удовлетворяют соотношениям

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k, \quad i, j, k = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}, \tag{10}$$

где $C_{ij}^k$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. И в локальных координатах $(q^a)$ имеют вид $X_i = X_i^a(q)\partial q^a$.

Пусть $V$ — некоторое векторное пространство, $\mathfrak{gl}(V)$ — алгебра Ли группы преобразований пространства $V$. Введем основное

Определение 3. $\mathfrak{gl}(V)$-*Деформацией* векторного поля $X_i$ назовем неоднородный линейный оператор

$$\widehat{X}_i = X_i + \chi_i, \tag{11}$$

где $\chi_i$ — компоненты отображения $\chi : M \to \mathfrak{gl}(V)$ такого, что множество операторов $\widehat{X}_i$ образует исходную алгебру Ли $\mathfrak{g}$.

Иначе говоря, $\mathfrak{gl}$-деформации — это возмущения алгебры Ли векторных полей с сохранением коммутационных соотношений.

Отметим, что деформации векторных полей имеют достаточно простое дифференциально-геометрическое описание в терминах однородных векторных расслоений (см. [7]).

Используя соотношения (10) и (11), получим

$$X_i^a \frac{\partial \chi_j}{\partial q^a} - X_j^a \frac{\partial \chi_i}{\partial q^a} + [\chi_i, \chi_j] = C_{ij}^k \chi_k. \tag{12}$$

Таким образом, задача построения $\mathfrak{gl}(V)$-деформаций заключается в решении системы нелинейных дифференциальных уравнений (12) на неизвестные матричные функции $\chi_i(q)$, заданные на многообразии $M$.

Определение 4. $\mathfrak{gl}(V)$-Деформации $\widehat{X}_i$ и $\widehat{X}'_i$ будем называть *эквивалентными*, если существует такая гладкая $GL(V)$-значная функция на $M$, что выполняется соотношение

$$\widehat{X}' = A^{-1}(q)\widehat{X}A(q). \tag{13}$$

Применим эквивалентность (13) к тривиальному решению уравнения (12): $\chi_i = 0$ для любого $i$. Получим

$$X'_i = A^{-1}(q)X_iA(q) = X_i + A^{-1}(q)X_i^a \frac{\partial A(q)}{\partial q^a}.$$

Таким образом, класс эквивалентности, соответствующий нулевому решению уравнения (12), не является пустым.

Определение 5. Деформации, принадлежащие классу эквивалентности нулевого решения уравнения (12), будем называть *тривиальными*.

Элементарными вычислениями можно получить явный вид функций $\chi_i(q)$ в случае тривиальных деформаций:

$$\chi^{tr}(q) = A^{-1}(q)\, X^a \frac{\partial A(q)}{\partial q^a}. \tag{14}$$

Над многообразием $G$ определено семейство левоинвариантных векторных полей $\xi_i$ таких, что

$$[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^k \xi_k.$$

В локальных координатах $(q, h)$ левоинвариантные векторные поля имеют вид

$$\xi(g) = X_i^a(q)\partial q^a + \xi_i^\alpha(q, h)\partial h^\alpha.$$

Приведем без доказательства (см. [5]) следующий результат.

**Теорема 2.** *Пространство всех нетривиальных $\mathfrak{gl}(V)$-деформаций генераторов $X$ действия группы Ли $G$ на однородном пространстве $M = G/H$ изоморфно пространству неэквивалентных представлений подалгебры изотропии $\mathfrak{h}$ в пространстве $V$. Над областями тривиализации расслоения $G(M, H, \pi)$ все нетривиальные деформации представляются в виде*

$$\widehat{X}_i = X_i + \xi_i^\alpha(e_H, x)\Lambda_\alpha, \tag{15}$$

*где $\Lambda_\alpha \in \mathfrak{gl}(V)$, и образуют базис представления $\mathfrak{h}$ в $V$.*

**Следствие 2.1.** *Произвольная деформация левоинвариантного поля на связной односвязной группе Ли тривиальна.*

Рассмотрим одномерные представления алгебры $\mathfrak{h}$, т. е. пусть генераторы $\Lambda_\alpha$ удовлетворяют соотношению

$$C_{\alpha\beta}^\gamma \Lambda_\gamma = 0. \tag{16}$$

Одномерное представление можно задать с помощью ковектора $\lambda$ или, что эквивалентно, набором чисел $\lambda_\alpha$, где $\lambda_\alpha = \lambda(e_\alpha)$, здесь $e_\alpha$ — базис алгебры $\mathfrak{h}$. При этом условие (16) примет вид

$$\langle \lambda, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle = 0. \tag{17}$$

Для деформаций, индуцированных одномерными представлениями алгебры $\mathfrak{h}$, имеем следующий результат, который является частным случаем теоремы, доказанной выше.

**Следствие 2.2.** *Пространство нетривиальных деформаций, индуцируемое одномерным представлением алгебры $\mathfrak{h}$, конечномерно и изоморфно фактор-пространству $\mathfrak{h}^*/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]^*$.*

Следствие 2.2 представляет собой предложение 2 из работы [8]. В заключение данного параграфа отметим, что в случае одномерных представлений приведенный формализм имеет непосредственную связь с одномерными когомологиями алгебр Ли (см. [9, 10]).

## 3. Теорема о линейном каноническом вложении

Доказательство теоремы 1. Пусть $x_i = X_i^a(q)p_a + \chi_i(q)$, $a = 1, \ldots, \frac{1}{2}\dim \mathscr{O}_\lambda$, — функции, реализующие линейное каноническое вложение $(q, p) \mapsto x_i$, где $(q^a, p_a)$ — канонические координаты на орбите коприсоединенного представления. Далее будем полагать, что координаты $(q^a, p_a)$ вещественны.

Из скобки Ли — Пуассона (2) и формы Кириллова (1) получим

$$\frac{\partial x_i(q,p)}{\partial q^a}\frac{\partial x_j(q,p)}{\partial p_a} - \frac{\partial x_j(q,p)}{\partial q^a}\frac{\partial x_i(q,p)}{\partial p_a} = C_{ij}^k x_k(q,p). \tag{18}$$

Введем следующие линейные дифференциальные операторы:

$$X_i = X_i^a(q)\frac{\partial}{\partial q^a}.$$

Из выражений (2) и (18) получаем

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k\, X_k, \tag{19}$$

$$X_i^a(q)\frac{\partial \chi_j(q)\partial}{q^a} - X_j^a(q)\frac{\partial \chi_i(q)}{\partial q^a} = C_{ij}^k \chi_k(q). \tag{20}$$

Поскольку каноническое вложение взаимно однозначно, выполняется условие

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial x_i(q,p)}{\partial p_a}, \frac{\partial x_i(q,p)}{\partial q^b}\right)\bigg|_{q=p=0} = \dim \mathscr{O}_\lambda. \tag{21}$$

Выбираем локальные координаты $q^a$ и базис в алгебре Ли так, чтобы $X_a^b(q = 0) = \delta_a^b$ и $X_{\bar a}^b(q = 0) = 0$. Расписывая в явном виде последнее выражение, получим

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \mathbb{I}_{ab} & \frac{\partial \chi_a(q)}{\partial q^b}\Big|_{q=0} \\ 0 & \frac{\partial \chi_{\bar a}(q)}{\partial q^b}\Big|_{q=0} \end{pmatrix} = \dim \mathscr{O}_\lambda, \tag{22}$$

где $\mathbb{I}_{ab}$ — единичная матрица соответствующего размера, причем $\operatorname{rank} \mathbb{I}_{ab} = (1/2)\dim \mathscr{O}_\lambda$ и, следовательно, $\operatorname{rank} \frac{\partial \chi_{\bar a}(q)}{\partial q^b}\big|_{q=0} = (1/2)\dim \mathscr{O}_\lambda$.

Из вышесказанного следует, что $X_i$ — генераторы действия группы $G$ на пространстве $Q$. Так как данное действие транзитивно, $Q$ локально может быть представлено как однородное пространство группы $G$, т. е. $Q$ локально изоморфно $G/H$, где $H$ — подгруппа стационарности точки $q = 0$. Соотношение (20) означает, что $\widehat{X}_i = X_i + \chi_i$ — деформация операторов $X_i$. Следовательно, согласно теореме 2 и следствию 2.2 получим, что $\chi_i$ представимо в виде $\chi_i^\alpha(q)\lambda_\alpha$. При этом $\lambda_\alpha$ удовлетворяют условию $\langle\lambda, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]\rangle$, где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы $H$. Так как $\dim\mathfrak{h} = \dim G - \frac{1}{2}\dim\mathscr{O}_\lambda$, последнее соотношение означает, что $\mathfrak{h}$ — поляризация функционала $\lambda$.

Пусть теперь существует поляризация $\mathfrak{h}$ функционала $\lambda$, $H$ — группа Ли алгебры $\mathfrak{h}$. Рассмотрим однородное пространство $Q = G/H$ с генераторами $X_i$ действия группы $G$ на пространстве $Q$. Согласно теореме 2 построим операторы

$$\widehat{X}_i = X_i^a(q)\partial q^a + \chi_i^{\bar{a}}(q)\lambda_{\bar{a}},$$

где индексы $a$ нумеруют компоненты из пространства $Q$, а индексы $\bar{a}$ — из подгруппы $H$. Для доказательства того, что символы данных операторов, а именно функции $x_i(q,p) = x_i^a(q)p_a + \chi_i^{\bar{a}}(q)\lambda_{\bar{a}}$, реализуют каноническое вложение, нужно доказать соотношение (22) или, эквивалентно, показать, что ранги $\operatorname{rank}\mathbb{I}_{ab}$ и $\operatorname{rank}\frac{\partial\chi_{\bar{a}}(q)}{\partial q^b}\Big|_{q=0}$ равны $(1/2)\dim\mathscr{O}_\lambda$. Условие для первого ранга выполняется автоматически, так как операторы $\widehat{X}_i$ являются деформациями векторных полей $X_i$ — генераторов действия группы $G$ на пространстве $G/H$.

Докажем, что выполняется соотношение

$$\operatorname{rank}\frac{\partial\chi_{\bar{a}}(q)}{\partial q^b}\bigg|_{q=0} = \frac{1}{2}\dim\mathscr{O}_\lambda.$$

Из теоремы 2 имеем $\chi_{\bar{a}} = \xi_{\bar{a}}^k(e_H, q)\lambda_k$, значит,

$$\frac{\partial\chi_{\bar{a}}(q)}{\partial q^a}\bigg|_{q=0} = \frac{\partial\xi_{\bar{a}}^k(e_H, q)}{\partial q^a}\bigg|_{q=0}\lambda_k = C_{\bar{a}a}^k\lambda_k. \tag{23}$$

Последнее равенство следует из левоинвариантности 1-форм, определяющих поля $\xi_i(g)$. Из приведенного соотношения вытекает, что

$$\operatorname{rank}\frac{\chi_{\bar{a}}(q)}{\partial q^a}\bigg|_{q=0} = \operatorname{rank}(C_{\bar{a}a}^k\lambda_k) = \operatorname{rank}C_{\bar{a}a}(\lambda).$$

Таким образом, нам необходимо вычислить ранг матрицы $C_{\bar{a}a}(\lambda)$. Введем отображение $C : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}^*$, которое действует по правилу

$$(Cy)_a = C_{\bar{a}a}(\lambda)y^{\bar{a}}, \quad y \in \mathfrak{h},\ \lambda \in \mathfrak{g}^*.$$

Тогда $\operatorname{rank}C_{\bar{a}a}(\lambda) = \operatorname{rank}C$. По определению имеем

$$\operatorname{rank}C = \dim\mathfrak{h} - \dim\ker C,$$

где $\ker C = \mathfrak{h}^\lambda = \mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}^\lambda$. Так как $\mathfrak{h}$ — поляризация, то $\mathfrak{g}^\lambda \subset \mathfrak{h}$ и $\dim\mathfrak{h}^\lambda = \dim\mathfrak{g}^\lambda$. Следовательно, $\operatorname{rank}C = \dim\mathfrak{h} - \dim\mathfrak{g}^\lambda$, где $\dim\mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} + \dim\mathfrak{g}^\lambda)$, откуда заключаем, что

$$\operatorname{rank}C = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{g}^\lambda).$$

Выражение в скобках есть размерность орбиты $\mathscr{O}_\lambda$, т. е. окончательно имеем

$$\operatorname{rank} \frac{\partial \chi_{\bar a}(q)}{\partial q^a}\bigg|_{q^a=0} = \operatorname{rank} C = \operatorname{rank} C_{\bar a a}(\lambda) = \frac{1}{2}\dim \mathscr{O}_\lambda. \qquad \square$$

При доказательстве теоремы мы предполагали вещественность поляризации и, как следствие, вещественность координат $(q^a, p_a)$. В общем случае поляризация может быть комплексной так же, как и канонические координаты. В этом случае по заданной комплексной поляризации $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ строится вещественное подпространство $\mathfrak{m}$, так что $\mathfrak{m}_\mathbb{C} = \mathfrak{n} + \bar{\mathfrak{n}}$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{n} \cap \bar{\mathfrak{n}} \subset \mathfrak{g}$. Локально всегда выполняется условие

$$\operatorname{Ad}_h \mathfrak{m} = \mathfrak{m}, \quad h \in H. \tag{24}$$

Для случая, когда $\mathfrak{m}$ — подалгебра, $H, M$ — замкнутые подгруппы группы $G$ с соответствующими алгебрами $Ah, \mathfrak{m}$ и выполнено условие (24), пространство $Q$ представляет собой частично голоморфное многообразие типа $(k, l)$, где $k = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{m}$, $l = (\dim \mathfrak{m} - \dim \mathfrak{h})/2$. Отметим, что если приведенные выше условия не выполняются, то многообразие $Q$ определяется локально.

Таким образом, можно заключить, что и в случае комплексной поляризации теорема 1 верна.

Доказательство следствия 1.1. Пусть $x_i = X_i^a(q)p_a + \chi_i(q)$ — функции канонического вложения, соответствующие поляризации $\mathfrak{n}$.

Из соотношений (8) и (9) следует, что в компонентах условие Пуканского имеет вид

$$\lambda_a \sim \lambda_a + \mu_a, \quad \lambda_{\bar a} \sim \lambda_{\bar a},$$

где эквивалентность $\sim$ означает принадлежность орбите $\mathscr{O}_\lambda$.

Полагая в переходе к каноническим координатам (3) $q = 0$, получаем

$$x_a = p_a + \lambda_a, \quad x_{\bar a} = \lambda_{\bar a}.$$

Сравнивая с предыдущим выражением, замечаем, что данные равенства представляют собой условие Пуканского (8). $\square$

## 4. Линейное каноническое вложение для орбит группы $E(3)$

В качестве примера рассмотрим группу движений трехмерной евклидовой плоскости $E(3)$. Группа $E(3)$ представляет собой полупрямое произведение $T^3 \rhd SO(3)$, где $T^3$ — абелева группа трансляций евклидовой плоскости, $SO(3)$ — группа вращений. Зафиксируем базис в алгебре Ли $\mathfrak{e}(3) = \{e_i, e_{ij} = -e_{ji}\}$. Коммутационные соотношения в выбранном базисе имеют вид

$$[e_i, e_j] = 0, \quad [e_k, e_{ij}] = \delta_{ki}e_j - \delta_{kj}e_i,$$

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{il}e_{jk} + \delta_{jl}e_{ik} - \delta_{ik}e_{jl} - \delta_{jl}e_{ik}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Обозначим через $(x_i, x_{ij})$ координаты линейного функционала $x \in \mathfrak{e}^*(3)$ в двойственном базисе:

$$x = \sum_i x_i e^i + \sum_{i<j} x_{ij} e^{ij}.$$

Кольцо инвариантов коприсоединенного представления в данном случае порождается двумя функциями Казимира:

$$K_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad K_2(x) = x_{12}x_3 + x_{23}x_1 - x_{13}x_2.$$

Несингулярные орбиты коприсоединенного представления являются поверхностями уровня $\Pi(\varpi_1, \varpi_2) \subset \mathfrak{e}^*(3)$ функций Казимира:

$$\Pi(\varpi_1, \varpi_2) = \{x \in \mathfrak{e}^*(3) \mid K_1(x) = \varpi_1,\ K_2(x) = \varpi_2\}.$$

Отметим, что в общем случае поверхность уровня функций Казимира может состоять из нескольких или счетного числа несингулярных орбит. Нетрудно видеть, что любая несингулярная орбита проходит через функционал $\lambda = \jmath_1 e^1 + \jmath_2 e^{23}$ при некоторых значениях параметров $\jmath_1, \jmath_2$. Функционалу $\lambda$ соответствует поверхность уровня $\Pi(\jmath_1^2, \jmath_1\jmath_2)$.

Градиенты функций Казимира в точке $\lambda$ образуют в общем случае коммутативную алгебру стабилизатора $\mathfrak{g}^\lambda$ функционала $\lambda$. Для группы $E(3)$ и выбранного функционала $\lambda$ имеем $\mathfrak{e}(3)^\lambda = \{e_1, e_{23}\}$. Выберем поляризацию функционала $\lambda$: $\mathfrak{n} = \{e_1, e_2, e_3, e_{23}\} = R^1 \oplus \mathfrak{e}(2)$, тогда

$$Q = (T^3 \triangleright SO(3))/(T^1 \otimes (T^2 \triangleright SO(2))) \approx SO(3)/SO(2) = S^2.$$

Таким образом, многообразие $Q$ представляет собой двумерную сферу. В локальных координатах функции канонического вложения имеют вид

$$x_1 = \jmath_1 \cos(q_1)\cos(q_2), \quad x_2 = \jmath_1 \sin(q_1)\cos(q_2), \quad x_3 = \jmath_1 \sin(q_2), \quad x_{12} = p_1,$$

$$x_{13} = \sin(q_1)p_2 + \frac{\sin(q_1)\sin(q_2)}{\cos(q_2)}p_1 - \jmath_2\frac{\sin(q_1)}{\cos(q_2)},$$

$$x_{23} = \sin(q_1)p_2 - \frac{\cos(q_1)\sin(q_2)}{\cos(q_2)}p_1 + \jmath_2\frac{\cos(q_1)}{\cos(q_2)}.$$

Построим теперь каноническое вложение для сингулярных орбит. Сингулярные орбиты являются поверхностями уровня обобщенной функции Казимира:

$$\Pi^{\mathrm{sing}}(\varpi) = \big\{x \in \mathfrak{e}^*(3) \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0,\ x_{12}^2 + x_{13}^2 + x_{23}^2 = \varpi\big\}.$$

Очевидно, что произвольная сингулярная орбита проходит через функционал $\lambda = \jmath e^{12}$. Нетрудно также видеть, что построение канонического вложения для сингулярных орбит в данном случае сводится к построению канонического вложения для группы $SO(3)$.

Стабилизатор функционала $\lambda$ одномерен: $\mathfrak{e}(3)^\lambda = \{e_{12}\}$. Согласно определению 2 поляризации размерность алгебры $\mathfrak{n}$ должна быть равна 2. Однако известно, что алгебра $\mathfrak{so}(3)$ не имеет *вещественных* двумерных подалгебр. Тем не менее и в данном случае мы можем применить теорему 1, допустив существование *комплексных* поляризаций. Для этого рассмотрим комплексификацию алгебры $\mathfrak{so}(3)$ и в качестве алгебры поляризации выберем подалгебру $\mathfrak{n} = \{e_{12}, e_{23} + ie_{13}\}$. Допуская, что все линейные функционалы продолжаются в комплексную плоскость по линейности, для функций линейного канонического вложения получим

$$x_{12} = -ip\sin(q) + \jmath\cos(q), \quad x_{13} = -ip\cos(q) - \jmath\sin(q), \quad x_{23} = p.$$

Определим теперь область $Q \subset \mathbb{C}^2$. Величины $(x_{12}, x_{23}, x_{13})$ вещественны и лежат на двумерной сфере радиуса $\jmath$ в $R^3$. Отсюда следует, что переменная $p$ вещественна и принадлежит интервалу $(-\jmath, \jmath)$, переменная $q$ комплексна, причем ее вещественная часть определена по модулю $2\pi$, а мнимая принадлежит всей прямой.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.
**2.** *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.
**3.** *Do N. D.* Quantum strata of coadjoint orbits // arXiv:math.QA/0003100.
**4.** *Карасев М. В., Маслов В. П.* Геометрическое и асимптотическое квантование // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, № 6. С. 115–173.
**5.** *Барановский С. П., Широков И. В.* Продолжение векторных полей на группах Ли и однородных пространствах // Теорет. и мат. физика. 2003. Т. 135, № 1. С. 510–519.
**6.** *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 1.
**7.** *Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Группы Ли преобразований // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 20. С. 103–240. (Итоги науки и техники).
**8.** *Широков И. В.* Координаты Дарбу на $K$-орбитах и спектры операторов Казимира на группах Ли // Теорет. и мат. физика. 2000. Т. 123, № 3. С. 407–423.
**9.** *Фукс Д. Б.* Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984.
**10.** *Картье П.* Когомологии алгебр Ли // Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли». М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 32.
**11.** *Барановский С. П., Михеев В. В., Широков И. В.* $K$-орбиты, тождества и инвариантные операторы на однородных пространствах с группами преобразований Пуанкаре и де Ситтера // Изв. вузов. Сер. Физика. 2000. № 11. С. 72–78.

*Статья поступила 16 января 2008 г.*

Барановский Сергей Петрович, Широков Игорь Викторович
Иртышский филиал Новосибирской гос. академии водного транспорта,
кафедра физики и высшей математики,
пр. Мира, 4, Омск 644024
`s.p.baranowski@gmail.com`, `iv_shirokov@mail.ru`