Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 517.95

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛУЧАЙНОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЕ. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

А. С. Благовещенский

Аннотация. Ставится и решается обратная задача о нахождении коэффициента в волновом уравнении в неоднородном полупространстве по данным о рассеянии плоской волны, падающей из однородного полупространства. Искомый коэффициент представляет собой сумму детерминированного слагаемого, зависящего лишь от одной переменной («глубины» z), и малой случайной добавки $\alpha(x,z)$. Ищется 1) детерминированное слагаемое, 2) математическое ожидание $E(\alpha(x,z)) =: m(z)$ и второй момент $r(x_1 - x_2, z_1, z_2) := E(\alpha(x_1,z_1)\alpha(x_2,z_2))$. Здесь $E(\cdot)$ — символ математического ожидания. Свойство слоистости среды заключается 1) в зависимости детерминированного слагаемого только от z, 2) в зависимости $m(z)$ только от z, 3) в зависимости второго момента при фиксированных z_1 и z_2 только от $x_1 - x_2$.

Ключевые слова: распространение волн, случайная среда, обратная задача, математическое ожидание, интегральное уравнение.

Рассматривается задача о падении плоской волны из однородного на слоистое случайно-неоднородное полупространство.

Пусть $u(x,z,t;\omega)$ является решением при $\{x = (x^1, x^2), z, t\} \in \mathbb{R}^4$ уравнения

$$Au_{tt} = u_{zz} + \Delta_x u.$$

Здесь $A = A(x,z)$ имеет вид

$$A(x,z) = A_0(z) + \alpha(x,z), \tag{1}$$

$A = A_0(z) > a > 0$ — детерминированная функция от z, $\quad A_0|_{z<0} = 1$, $\alpha(x,z)$ — случайная функция, $|\alpha| \ll A_0$, $\alpha|_{z<0} = 0$, $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2}$.

Пусть из однородного полупространства $z < 0$ падает плоская волна

$$u|_{z<0} = u_{\text{пад.}} + f(x,z,t;\omega), \quad u_{\text{пад.}} = \delta(t - \omega_0 z - (\omega, x)),$$

$\omega_0 > 0$, $\omega_0^2 + |\omega|^2 = 1$. Здесь $\omega \in \mathbb{R}^2$, (ω, x) — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$, вектор ω определяет направление падения волны, δ — функция Дирака, f — отраженная (рассеянная) волна. Далее мы всегда будем предполагать, что направление падения плоской волны достаточно близко к нормальному, тем самым $|\omega| < a$. Удовлетворяющие этому условию ω будем называть *допустимыми*.

Введем переменную $s = t - (x, \omega)$, s есть время, отсчитываемое от момента прихода падающей волны к точке x границы $z = 0$ однородного полупространства.

Работа выполнена при финансовой поддержке компании Shell E&P (грант CRDF RUG2–1680–ST–07).

Пусть u — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u|_{s<0} = \delta(s - \omega_0 z). \tag{2}$$

Задача отыскания решения $u(x, z, t; \omega)$, удовлетворяющего условию (2), является корректной задачей математической физики. Мы рассмотрим обратную задачу. При этом представляется мало разумной задача отыскания самой функции A, естественно поставить задачу нахождения функции $A_0(z)$ и усредненных характеристик случайной функции $\alpha(x, z)$.

В дальнейшем мы будем считать справедливым формальное разложение

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + o(|\alpha|^2). \tag{3}$$

Здесь u_0 — детерминированное слагаемое, соответствующее случаю $\alpha \equiv 0$, u_1 линейно, u_2 квадратично зависят от α. Равенство типа (3), написанное с точностью до слагаемых, имеющих порядок $o(\alpha^2)$, будем записывать в виде

$$u \doteq u_0 + u_1 + u_2.$$

Очевидно, справедливо равенство

$$f \doteq f_0 + f_1 + f_2.$$

Предполагаются известными: 1) детерминированное слагаемое f_0 отраженной волны, 2) математическое ожидание случайного слагаемого

$$E(f - f_0) \doteq E(f_1) + E(f_2) =: g(x, z, t; \omega),$$

3) второй момент, вычисленный для каких-либо двух падающих волн:

$$\begin{aligned} &E((f(x_1, z_1, t_1, \omega_1) - f_0(x_1, z_1, t_1, \omega_1))(f(x_2, z_2, t_2, \omega_2) - f_0(x_2, z_2, t_2, \omega_2))) \\ &\qquad \doteq E(f_1(x_1, z_1, t_1, \omega_1) f_1(x_2, z_2, t_2, \omega_2)) =: h(x_1, x_2, z_1, z_2, t_1, t_2, \omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Искомыми величинами являются: 1) детерминированное слагаемое $A_0(z)$, 2) математическое ожидание α: $E(\alpha(x, z)) =: m(z)$, 3) корреляционная функция $E(\alpha(x_1, z_1)\alpha(x_2, z_2)) =: r(x_1 - x_2, z_1, z_2)$. Свойство слоистости среды мы трактуем как: a) зависимость детерминированного слагаемого A_0 только от z, b) зависимость математического ожидания $m(z)$ только от z, c) зависимость корреляционной функции r только от разности $(x_1 - x_2)$ и z_1 и z_2. Как искомые, так и заданные функции предполагаем достаточно гладкими и быстро убывающими по x.

Отметим, что сразу видна переопределенность задачи: ищутся три функции. Две из них (A_0 и m) от одного аргумента z, одна — от четырех: $x = \{x^1, x^2\} \in \mathbb{R}^2$, z_1, z_2 — функция $r(x, z_1, z_2)$.

Заданы три функции: две — $f_0(x, z, t; \omega)$ и $g(x, z, t; \omega)$ — от шести аргументов ($x \in \mathbb{R}^2, z, t, \omega \in \mathbb{R}^2$) и одна — $h(x_1, x_2, z_1, z_2, t_1, t_2; \omega_1, \omega_2)$ — от 12 аргументов. Это дает возможность: 1) использовать не всю информацию, заключенную в заданных функциях, 2) потребовать, чтобы заданные функции удовлетворяли некоторым дополнительным условиям, необходимым для разрешимости задачи. Как по постановке задачи, так и по методам решения данная работа близка к работам [1, 2; 3, § 2.5].

Справедливы следующие утверждения.

А. Необходимые условия разрешимости обратной задачи:

1) функции $f_0(x, z, t; \omega)$ и $g(x, z, t; \omega)$ при фиксированных значениях ω и $s = t - (\omega, x)$ не зависят от x, функция f_0 есть $f_0 = f_0(s + \omega_0 z; \omega)$;

2) функция $h(x_1,x_2,z_1,z_2,t_1,t_2;\omega_1,\omega_2)$ при любых фиксированных z_1, z_2, ω_1, ω_2 и $s_1=t_1-(x_1,\omega_1)$, $s_2=t_2-(x_2,\omega_2)$ зависит только от разности x_1-x_2.

B. Процесс решения задачи распадается на ряд последовательных этапов. Первый этап — нахождение функции $A_0(z)$ по $f_0(x,z,t;\omega)=f_0(t-(x,\omega)+z\omega_0;\omega)$, эта часть задачи стандартна, и в данной работе лишь приводятся основные результаты.

C. Второй этап (основной) — нахождение функции $r(x,z_1,z_2)$ по $h(x_1,x_2,z_1,z_2,t_1,t_2;\omega_1,\omega_2)$ и найденной на предыдущем этапе функции $A_0(z)$. Доказывается, что для определения функции r достаточно знать функцию h при каких-либо фиксированных значениях z_1, z_2 и допустимых ω_1, ω_2. В частности, не исключается ситуация, когда $z_1=z_2$ и $\omega_1=\omega_2$. Задача сводится к решению вольтерровских интегральных уравнений второго рода относительно $\tilde r(k,\zeta_1,\zeta_2)$ — преобразования Фурье функции r по первому аргументу.

D. Третий этап — нахождение функции $m(z)$ по найденным ранее функциям $r(x,\zeta_1,\zeta_2)$ и $A_0(z)$ и функции $g(x,z,t;\omega)$ с помощью решения уравнения Вольтерра второго рода.

Замечание. Может показаться странным, что в рамках теории возмущений ищется сначала величина r, имеющая порядок $O(\alpha^2)$, а затем — $m(z)$ порядка $O(\alpha)$. Стоит однако отметить, что в теории случайных процессов типична ситуация, когда первые и вторые моменты малой случайной величины имеют одинаковый порядок малости (см., например, [4]).

Подставим разложение (3) в уравнение (1) и начальное условие и приравняем члены, имеющие одинаковый порядок по α. Тогда получим цепочку задач для u_0, u_1, u_2:

$$A_0u_{0tt}=u_{0zz}+\Delta_x u_0,\quad u_0|_{s<0}=\delta(s-\omega_0 z),\tag{4}$$

$$u_0|_{z<0}=\delta(t-(x,\omega)-z\omega_0)+f_0(x,z,t;\omega),\tag{4a}$$

$$A_0u_{1tt}-u_{1zz}-\Delta_x u_1=-\alpha u_{0tt},\quad u_1|_{s<0}=0,\tag{5}$$

$$u_1|_{z<0}=f_1(x,z,t;\omega),\tag{5a}$$

$$A_0u_{2tt}-u_{2zz}-\Delta_x u_2=-\alpha u_{1tt},\quad u_1|_{s<0}=0,\tag{6}$$

$$u_2|_{z<0}=f_2(x,z,t;\omega).\tag{6a}$$

Легко видеть, что u_0 является в действительности функцией от аргументов s, z, ω_0, $u_0=u_0(s,z,\omega_0)$. Тем самым с необходимостью

$$u_0|_{z<0}=\delta(s-\omega_0 z)+f_0(s+\omega_0 z;\omega_0).\tag{7}$$

Как известно (см., например, [3]), если функция $f_0(t,\omega_0)$ при фиксированном значении ω_0 непрерывна при $t>0$ и обладает тем свойством, что норма построенного по ней интегрального оператора $\widehat F_y: L_{2(-y,y)}\to L_{2(-y,y)}$, зависящего от параметра $y>0$, $\widehat F_y:=\int\limits_{-t}^{y} f_0(t+s)(\cdot)\,ds$, меньше единицы при всех $y>0$, то обратная задача (4), (4a) однозначно разрешима.

Для решения обратной задачи достаточно решить, например, уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко

$$w+\widehat F_y w+f_0(t+y)=0.$$

По решению этого уравнения $w(y,t)$ восстанавливается функция

$$A_0(y) = \omega^2 + (1-\omega^2)\left(1 + \int\limits_{-y}^{y} w(y,t)\,dt\right)^4,$$

где y связано с переменной z соотношением

$$z = \int\limits_0^y (A_0 - \omega^2)^{-1/2}\,dy =: z(y).$$

Пусть описанные процедуры проделаны, функция A_0 как функция от z найдена. Функция u_0 может быть построена при всех допустимых ω. Также при всех допустимых ω может быть построена функция Грина $G(x,z,\zeta,t;\omega)$ — решение задачи

$$A_0 G_{tt} - G_{zz} - \Delta G = \delta(x, z-\zeta, t), \quad G|_{t<0} = 0.$$

Далее, легко найти выражение для u_1 и u_2:

$$u_1(x,z,t;\omega) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int G(x-\xi, z, \zeta, t-\tau)\alpha(\xi,\zeta)u_0(\xi,\zeta,\tau;\omega)\,d\xi d\zeta d\tau,$$

$$\begin{aligned} u_2(x,z,t;\omega) &= -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int G(x-\xi_1, z, \zeta_1, t-\tau_1)\alpha(\xi_1,\zeta_1)u_1(\xi_1,\zeta_1,\tau_1;\omega)\,d\xi_1 d\zeta_1 d\tau_1 \\ &= \frac{\partial^4}{\partial t^4}\int\int G(x-\xi_1, z, \zeta_1, t-\tau_1)\alpha(\xi_1,\zeta_1)G(\xi_1-\xi_2, \zeta_1, \zeta_2, \tau_1-\tau_2)\alpha(\xi_2,\zeta_2) \\ &\qquad \times u_0(\xi_2,\zeta_2,\tau_2;\omega)\,d\xi_1 d\xi_2 d\zeta_1 d\zeta_2 d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} &u_1(x_1,z_1,t_1;\omega_1)u_1(x_2,z_2,t_2;\omega_2) \\ &\quad = \frac{\partial^4}{\partial t_1^2 \partial t_2^2}\int\int G(x_1-\xi_1, z_1, \zeta_1, t_1-\tau_1)\alpha(\xi_1,\zeta_1)u_0(\xi_1,\zeta_1,\tau_1;\omega_1) \\ &\quad \times G(x_2-\xi_2, z_2, \zeta_2, t_2-\tau_2)\alpha(\xi_2,\zeta_2)u_0(\xi_2,\zeta_2,\tau_2;\omega_2)\,d\xi_1 d\xi_2 d\zeta_1 d\zeta_2 d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

Полагая в последних формулах $z < 0$, $z_1 < 0$, $z_2 < 0$ и переходя к математическому ожиданию, находим

$$\begin{aligned} E(f_1+f_2) = g(x,z,t;\omega) &= -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int G(x-\xi, z, \zeta, t-\tau)m(\zeta)u_0(\xi,\zeta,\tau;\omega)\,d\xi d\zeta d\tau \\ &+ \frac{\partial^4}{\partial t^4}\int\int G(x-\xi_1, z, \zeta_1, t-\tau_1)G(\xi_1-\xi_2, \zeta_1, \zeta_2, \tau_1-\tau_2)u_0(\xi_2,\zeta_2,\tau_2;\omega) \\ &\qquad \times r(\xi_1-\xi_2, \zeta_1, \zeta_2)\,d\xi_1 d\xi_2 d\zeta_1 d\zeta_2 d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &E(f_1(x_1,z_1,t_1;\omega_1)f_1(x_2,z_2,t_2;\omega_2)) = h(x_1,x_2,z_1,z_2,t_1,t_2;\omega_1,\omega_2) \\ &= \frac{\partial^4}{\partial t_1^2 \partial t_2^2}\int\int G(x_1-\xi_1, z_1, \zeta_1, t_1-\tau_1)u_0(\xi_1,\zeta_1,\tau_1;\omega_1)G(x_2-\xi_2, z_2, \zeta_2, t_2-\tau_2) \\ &\qquad \times u_0(\xi_2,\zeta_2,\tau_2;\omega)r(\xi_1-\xi_2, \zeta_1, \zeta_2)\,d\xi_1 d\xi_2 d\zeta_1 d\zeta_2 d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее вместо переменных z, z_i, ζ, ζ_i $(i = 1,2)$ нам часто удобнее использовать также переменные y, y_i, η, η_i соответственно, где $y = y(z) = \int\limits_0^z \sqrt{A_0 - \omega^2}\,dz$,

$y_i = y(z_i)$, $\eta = y(\zeta)$, $\eta_i = y(\zeta_i)$. Проинтегрируем уравнение (8) по t, уравнение (9) по t_1 и t_2. Тогда

$$g^*(x,z,t;\omega) := \int_{-\infty}^{t} g(x,z,t;\omega)\,dt$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int G(x-\xi,z,\zeta,t-\tau)m(\zeta)u_0(\xi,\zeta,\tau;\omega)\,d\xi d\zeta d\tau$$

$$+\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int\int G(x-\xi_1,z,\zeta_1,t-\tau_1)G(\xi_1-\xi_2,\zeta_1,\zeta_2,\tau_1-\tau_2)u_0(\xi_2,\zeta_2,\tau_2;\omega_2)$$

$$\times r(\xi_1-\xi_2,\zeta_1,\zeta_2)\,d\xi_1 d\xi_2 d\zeta_1 d\zeta_2 d\tau_1 d\tau_2, \quad (10)$$

$$h^*(x_1,x_2,z_1,z_2,t_1,t_2;\omega_1,\omega_2) = \iint_{t_1'<t_1,t_2'<t_2} dt_1'\,dt_2' h(x_1,x_2,z_1,z_2,t_1',t_2';\omega_1,\omega_2)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\iint G(x_1-\xi_1,z_1,\zeta_1,t_1-\tau_1)u_0(\xi_1,\zeta_1,\tau_1;\omega_1)G(x_2-\xi_2,z_2,\zeta_2,t_2-\tau_2)$$

$$\times u_0(\xi_2,\zeta_2,\tau_2;\omega_2)r(\xi_1-\xi_2,\zeta_1,\zeta_2)\,d\xi_1 d\xi_2 d\zeta_1 d\zeta_2 d\tau_1 d\tau_2. \quad (11)$$

Обратимся сначала к уравнению(11). Рассмотрим функцию

$$L(x,\xi,z,\zeta,t;\omega) = \int G(x-\xi,z,\zeta,t-\tau)u_0(\xi,\zeta,\tau,\omega)\,d\tau$$

$$= \int G(x-\xi,z,\zeta,t-\tau)u_0(\tau-(\omega,\xi),\zeta,\omega)\,d\tau$$

$$= \int G(x-\xi,z,\zeta,t-(\omega,\xi)-\tau)u_0(\tau,\zeta,\omega)\,d\tau$$

$$= \int G(x-\xi,z,\zeta,t-(\omega,x)+(\omega,x-\xi)-\tau)u_0(\tau,\zeta,\omega)\,d\tau.$$

Последнее равенство показывает, что функция L на самом деле является функцией аргументов $x-\xi$, z, ζ, s, ω: $L = L(x-\xi,z,\zeta,s;\omega)$. Пусть $\tilde r(k,\zeta_1,\zeta_2)$ — преобразование Фурье функции $r(\xi,\zeta_1,\zeta_2)$ по первому аргументу: $\tilde r(\xi,\zeta_1,\zeta_2) = \int e^{-i(k,\xi)} r(\xi,\zeta_1,\zeta_2)\,d\xi$. Тогда уравнение (11) приобретает вид

$$h^* = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\partial^2}{\partial s_1\partial s_2}\int L(x_1-\xi_1,z_1,\zeta_1,s_1;\omega_1)e^{i(k,\xi_1-\xi_2)}\tilde r(k,\zeta_1,\zeta_2)$$

$$\times L(x_2-\xi_2,z_2,\zeta_2,s_2;\omega_2)\,dk d\xi_1 d\xi_2 d\zeta_1 d\zeta_2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\partial^2}{\partial s_1\partial s_2}\int dk d\zeta_1 d\zeta_2 \tilde r(k,\zeta_1,\zeta_2)e^{i(k,x_1-x_2)}$$

$$\times \int L(x_1-\xi_1,z_1,\zeta_1,s_1;\omega_1)e^{i(k,\xi_1-x_1)}d\xi_1 \int L(x_2-\xi_2,z_2,\zeta_2,s_2;\omega_2)e^{i(k,x_2-\xi_2)}\,d\xi_2$$

или

$$h^* = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\partial^2}{\partial s_1\partial s_2}\int dk d\zeta_1 d\zeta_2 \widetilde L(k,z_1,\zeta_1,s_1;\omega_1)\tilde r(k,\zeta_1,\zeta_2)$$

$$\times \widetilde L(-k,z_2,\zeta_2,s_2;\omega_2)e^{i(k,x_1-x_2)}, \quad (12)$$

$\widetilde L(k,z,\zeta,s;\omega)$ есть преобразование Фурье функции L по первому аргументу:

$$\widetilde L(k,z,\zeta,s;\omega) = \int \widetilde G(k,z,\zeta,s-\tau,\omega)u_0(\tau,\zeta,\omega)\,d\tau,$$

$$\widetilde{G}(k,z,\zeta,s;\omega)=\int G(\xi,z,\zeta,s+(\omega,\xi))e^{-i(k,\xi)}\,d\xi.$$

Теперь замечаем следующее.

1. Функция, стоящая в правой части равенства (12) при фиксированных значениях s_1, s_2 как функция от x_1, x_2 зависит только от разности x_1-x_2:

$$h^*(x_1,x_2,z_1,z_2,t_1,t_2;\omega_1,\omega_2)|_{t_1=s_1+(x_1,\omega_1),t_2=s_2+(x_2,\omega_2)}\\ =h_1(x_1-x_2,z_1,z_2,s_1,s_2;\omega_1,\omega_2).$$

2. Подынтегральная функция в интеграле по k в формуле (12) является преобразованием Фурье по первому аргументу от h_1. Тем самым

$$\tilde{h}_1(k,z_1,z_2,s_1,s_2;\omega_1,\omega_2)=\frac{\partial^2}{\partial s_1\partial s_2}\iint \widetilde{L}(k,z_1,\zeta_1,s_1;\omega_1)\\ \times\widetilde{L}(-k,z_2,\zeta_2,s_2;\omega_2)\tilde{r}(k,\zeta_1,\zeta_2)\,d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (13)$$

3. Перейдем в уравнении (13) к переменным η_1, η_2, y_1, y_2. Пусть

$$\tilde{h}_2(k,p_1,p_2,y_1,y_2;\omega_1,\omega_2):=\tilde{h}_1(k,z(y_1),z(y_2),2p_1-y_1,2p_2-y_2;\omega_1,\omega_2).$$

Тогда уравнение (13) перепишется в виде

$$\tilde{h}_2(k,p_1,p_2,y_1,y_2;\omega_1,\omega_2):=\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial p_1\partial p_2}\iint (A_0(\eta_1)-\omega_1^2)^{-1/2}\\ \times\widetilde{L}(k,y_1,\eta_1,2p_1-y_1;\omega_1)\big(A_0(\eta_2)-\omega_2^2\big)^{-1/2}\\ \times\widetilde{L}(-k,y_2,\eta_2,2p_2-y_2;\omega_2)\tilde{r}(k,\eta_1,\eta_2)\,d\eta_1 d\eta_2. \quad (14)$$

Введем оператор $\widehat{L}_{k,y,\omega}$, сопоставляющий функции от η с носителем на полуоси $\eta\ge 0$ функцию от p:

$$\widehat{L}_{k,y,\omega}:=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}\int (A_0(\eta)-\omega^2)^{-1/2}\widetilde{L}(k,y,\eta,2p-y;\omega)(\cdot)\,d\eta,$$

k, y, ω — фиксированные параметры. Уравнение (14) означает, что функция $\tilde{h}_2(k,p_1,p_2,y_1,y_2;\omega_1,\omega_2)$ является результатом последовательного применения к функции $\tilde{r}(k,\eta_1,\eta_2)$ как функции от η_1 и η_2 операторов $\widehat{L}_{k,y_1,\omega_1}$ и $\widehat{L}_{-k,y_2,\omega_2}$, и тем самым задача нахождения функции $\tilde{r}(k,\eta_1,\eta_2)$ (а следовательно, и $r(\xi,\zeta_1,\zeta_2)$) свелась к задаче (двукратного) обращения операторов $\widehat{L}$. Параметры ω_1, ω_2, y_1, y_2, k при этом обращении считаем фиксированными.

Изучим подробнее ядро оператора $\widehat{L}$. Очевидно, $u_0(\tau,\zeta,\omega)$ является решением уравнения

$$(A_0(\zeta)-\omega^2)u_{0\tau\tau}-u_{0\zeta\zeta}=0,$$

удовлетворяющим при $\tau<0$ условию

$$u_0|_{\tau<0}=\delta(\tau-\sqrt{1-\omega^2}\zeta).$$

Легко проверяется, что при $\zeta>0$

$$u_0=\left(\frac{1-\omega^2}{A_0-\omega^2}\right)^{1/4}\delta(\tau-\eta)+v_0,$$

где v_0 непрерывна при $\tau\ge\eta$, $\eta=y(\zeta)=\int\limits_0^\zeta\sqrt{A_0-\omega^2}\,d\zeta$, $v_0|_{\tau<\eta}=0$.

Исследуем функцию $\widetilde{G}(k,z,\zeta,s;\omega)$. Из уравнения для функции Грина находим, что функция $G(\xi,z,\zeta,s+(\xi,\omega))$ удовлетворяет уравнению

$$(A_0-\omega^2)G_{ss}-G_{zz}-\Delta_\xi G+2(\omega,\nabla_\xi)G_s=\delta(s,\xi,z-\zeta),$$

ее преобразование Фурье $\widetilde{G}(k,z,\zeta,s;\omega)$ — уравнению

$$(A_0-\omega^2)\widetilde{G}_{ss}-\widetilde{G}_{zz}+2i(k,\omega)\widetilde{G}_s+k^2\widetilde{G}=\delta(s,z-\zeta)$$

и условию $\widetilde{G}|_{s<0}=0$. Особенности функции $\widetilde{G}$ легко вычисляются. Приведем результат, используя переменные y, η:

$$\begin{aligned}\widetilde{G}=\frac{1}{2}&(A_0(y)-\omega^2)^{-1/4}(A_0(\eta)-\omega^2)^{-1/4}\\ &\times\exp\left(-i(k,\omega)\left|\int_\eta^y(A_0(\eta')-\omega^2)^{-1}\,d\eta'\right|\right)\varepsilon(s-|y-\eta|)+\tilde{g},\end{aligned}$$

где $\tilde{g}$ — всюду непрерывная, гладкая при $s>|y-\eta|$ функция $\tilde{g}|_{s<|y-\eta|=0,}$ $\varepsilon(t)$ — функция Хевисайда: $\varepsilon(t)=1$ при $t>0$, $\varepsilon(t)=0$ при $t<0$. В существенном для нас случае $y\le 0$, $\eta>0$ имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{G}=\frac{1}{2}&(1-\omega^2)^{-1/4}(A_0(y)-\omega^2)^{-1/4}\\ &\times\exp\left(-i(k,\omega)\int_y^\eta(A_0(\eta')-\omega^2)^{-1}\,d\eta'\right)\varepsilon(s+y-\eta)+\tilde{g}.\end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}\widetilde{L}(k,y,\eta,2p-y)&=\int\widetilde{G}(k,y,\eta,2p-y-\tau)u_0(\tau,\zeta,\omega)\,d\tau\\ &=\frac{1}{2}(A_0(\eta)-\omega^2)^{-1/2}\exp\left(-i(k,\omega)\int_y^\eta(A_0(\eta')-\omega^2)^{-1}\,d\eta'\right)\varepsilon(p-\eta)+\tilde{l},\end{aligned}\tag{15}$$

$\tilde{l}$ — гладкая при $\eta<p$, непрерывная всюду функция, $\tilde{l}|_{\eta>p}=0$. Равенство (15) означает, что оператор $\widehat{L}$ является суммой интегрального вольтеррова оператора и оператора умножения на не обращающуюся в 0 функцию

$$\frac{1}{4}(A_0(p)-\omega^2)^{-1}\exp\left(-i(k,\omega)\int_y^p(A_0(\eta')-\omega^2)^{-1}\,d\eta'\right).$$

Тем самым задача нахождения функции $\tilde{r}(k,\eta_1,\eta_2)$ свелась к корректной задаче решения вольтерровских интегральных уравнений второго рода. Пусть теперь корреляционная функция $r(\xi,\zeta_1,\zeta_2)$ найдена.

Обратимся к уравнению (10). Подставив в него функцию $r(\xi,\zeta_1,\zeta_2)$, запишем его в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int G(x-\xi,z,\zeta,t-\tau)u_0(\xi,\zeta,\tau;\omega)m(\zeta)\,d\zeta=g_1(x,z,t;\omega),\tag{16}$$

где $g_1(x,z,t;\omega)$ — известная функция.

Аналогично предыдущему, используя то, что $u_0 = u_0(\tau - (\omega, \xi), \zeta; \omega)$, уравнение (16) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int G(x-\xi, z, \zeta, s + (x-\xi, \omega) - \tau) u_0(\tau, \zeta; \omega) m(\zeta)\, d\xi d\zeta d\tau$$
$$= \frac{\partial}{\partial t} \int G(\xi, z, \zeta, s + (\xi, \omega) - \tau) u_0(\tau, \zeta; \omega) m(\zeta)\, d\xi d\tau d\zeta = -g_1(x, z, t; \omega).$$

Отсюда очевидно необходимое условие разрешимости уравнения (16): g_1 при фиксированном значении $s = t - (\omega, x)$ не зависит от x, $g_1 = g^*(x, z, t; \omega) - g_2(x, z, t; \omega)$, где

$$g_2(x, z, t; \omega) = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int G(x - \xi_1, z, \zeta_1, t - \tau_1) G(\xi_1 - \xi_2, \zeta_1, \zeta_2, \tau_1 - \tau_2)$$
$$\times u_0(\tau_2 - (\omega_2, \xi_2), \zeta_2; \omega) r(\xi_1 - \xi_2, \zeta_1, \zeta_2)\, d\xi_1 d\xi_2 d\zeta_1 d\zeta_2 d\tau_1 d\tau_2.$$

Заметим, что функция g_2 при фиксированном $s = t - (\omega, x)$ также не зависит от x. Действительно, делая в последнем интеграле замены переменных $\tau_1' = \tau_1 - \tau_2$, $\tau_2' = \tau_2 - (\omega_2, \xi_2)$, $\xi' = \xi_1 - \xi_2$, $\xi'' = x - \xi_1$, получим

$$g_2(x, z, t; \omega) = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int G(\xi'', z, \zeta_1, s + (\omega, \xi'') + (\omega, \xi') - \tau_1' - \tau_2') G(\xi', \zeta_1, \zeta_2, \tau_1')$$
$$\times u_0(\tau_2', \zeta_2; \omega) r(\xi', \zeta_1, \zeta_2)\, d\xi' d\xi'' d\zeta_1 d\zeta_2 d\tau_1' d\tau_2'.$$

Отсюда следует необходимое условие разрешимости задачи: $g^*(x, z, t; \omega)$ является функцией от s, z и ω и не зависит при фиксированном значении $t - (\omega, x)$ от x. Заметим, что $\int G(\xi, z, \zeta, s + (\xi, \omega))\, d\xi$ есть $\widetilde{G}(k, z, \zeta, s)$ при $k = 0$.

Ядро

$$\int G(\xi, z, \zeta, s + (\xi, \omega) - \tau)\, u_0(\tau, \zeta; \omega)\, d\xi d\tau$$

представляет собой $\widetilde{L}(k, z, \zeta, s)|_{k=0}$. Поэтому задача отыскания $m(z)$ — частный случай рассмотренной ранее задачи обращения оператора $\widehat{L}|_{0,y,\omega}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Благовещенский А. С.* Обратная задача теории распространения волн в случайной среде // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1979. Т. 89. С. 63–70.
2. *Благовещенский А. С.* Обратная задача теории распространения волн в случайной слоистой среде // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 10. С. 1442–1448.
3. *Белишев М. И., Благовещенский А. С.* Динамические обратные задачи теории волн. СПб: Изд-во СПбГУ, 1999.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965.

Статья поступила 23 апреля 2008 г.

Благовещенский Александр Сергееевич
Санкт-Петербургский гос. университет, физический факультет,
ул. Ульяновская, 1, Санкт-Петербург 198504
ablagoveshhenskij@yandex.ru