Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 514.7+517.982

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. Г. Решетняк

Аннотация. Рассматриваются гладкие n-мерные поверхности класса $\mathscr{C}^1$ в евклидовом пространстве размерности $n+m$, удовлетворяющие следующему условию. Для любых двух различных точек поверхности нормали к поверхности в этих точках либо не пересекаются, либо их точка пересечения отстоит от каждой из данных точек на расстояние, не меньшее некоторой фиксированной положительной постоянной. Устанавливается, что для всякой такой поверхности в окрестности любой точки существует параметризация, имеющая ограниченные обобщенные в смысле Соболева производные второго порядка. Доказательство основано на использовании геометрических свойств поверхностей данного вида и на некотором предложении, устанавливающем достаточные условия существования у произвольной вещественной функции ограниченных обобщенных производных второго порядка. В приложении доказывается аналог этой леммы для случая производных произвольного порядка.

Ключевые слова: δ-облегаемая поверхность, функция соболевского класса, выпуклая функция, обобщенная в смысле Соболева производная, обобщенная функция, дифференцируемость почти всюду, обобщенная теорема Радемахера.

Статья посвящена следующему вопросу. Пусть дана гладкая n-мерная поверхность $\mathbb{F}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^{n+m}$. *Нормалью в точке* $X \in \mathbb{F}$ будем называть всякий отрезок $[XY]$ такой, что прямая XY перпендикулярна касательной плоскости к поверхности $\mathbb{F}$ в точке X. Предположим, что поверхность удовлетворяет следующему условию: любые две нормали, взятые в разных точках поверхности и имеющие длину, не превосходящую некоторого фиксированного числа $\delta > 0$, не имеют общих точек. Что можно сказать о свойствах поверхностей, удовлетворяющих этому условию? Ответ дается теоремой 3 настоящей статьи, из которой следует, что всякая такая поверхность в окрестности любой своей точки допускает параметризацию, имеющую обобщенные в смысле С. Л. Соболева вторые производные, причем эти производные суть функции ограниченные. Это утверждение справедливо, в частности, для параметризаций, в которых окрестность точки поверхности представлена как график отображения области из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, т. е. представима уравнением $u = f(t)$, где $t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$, x_i, $i = 1, 2, \dots, x_{n+m}$, — координаты в некоторой декартовой ортогональной системе координат пространства $\mathbb{E}^{n+m}$.

В случае $m = 1$ рассматриваемые здесь поверхности являются частным случаем поверхностей, введенных ранее в статье автора [1]. В этой работе изучались n-мерные поверхности в $\mathbb{E}^{n+1}$ такие, что с одной стороны поверхности каждой ее точки можно коснуться шаром фиксированного радиуса, не содержащим других точек поверхности. Этот факт следует из теоремы 1, доказываемой далее. В нашем случае можно коснуться шаром фиксированного радиуса с обеих сторон поверхности. Как показано в [1], всякая поверхность рассматриваемого там вида локально может быть представлена уравнением вида $u = f(t)$. При этом существует выпуклая функция $g(t)$ такая, что если поверхность допускает «обкатывание» шарами снизу, то $f(t) = g(t) - L|t|^2$, а если сверху — то $f(t) = L|t|^2 - g(t)$.

Имеет место следующий критерий выпуклости (теорема И. Я. Бакельмана [2]). Для того чтобы локально интегрируемая функция F, определенная на выпуклом открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$, была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы ее производные $\partial_i\partial_j F$ в пространстве обобщенных функций были мерами (возможно, знакопеременными) и выполнялось условие: для всякого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ мера $d^2F(\xi,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \partial_i\partial_j F\xi_i\xi_j$ неотрицательна. (Доказательство и точная формулировка этого критерия выпуклости приводятся также в работе автора [3].)

В случае $m = 1$ указанный критерий выпуклости функции позволяет немедленно решить наш вопрос (детали рассуждений читатель найдет в доказательстве теоремы 2). В общем случае результат получается рассмотрением компонент вектор-функции f в локальном представлении $u = f(t)$ данной поверхности. Основной результат является следствием теоремы 2, дающей критерий существования ограниченных обобщенных вторых производных. В приложении приводится новое доказательство частного случая одной теоремы Б. Боярского [4], являющейся аналогом теоремы 2 и устанавливающей критерий существования локально интегрируемых в степени $p \geqslant 1$ обобщенных производных порядка k (теорема 4). Рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2, не переносятся на случай произвольного k. В тоже время теорема 2 формально не следует из теоремы 4.

В качестве следствия теоремы 4 приводится критерий почти всюду дифференцируемости порядка k (обобщенная теорема Радемахера).

1. Обозначения и предварительные результаты

Приведем необходимые определения. Сначала договоримся относительно используемых обозначений. Далее $\mathbb{R}^k$ означает k-мерное векторное евклидово пространство. Оно состоит из всевозможных конечных последовательностей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$. Для произвольного вектора $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$ его длина обозначается символом $|\mathbf{z}|$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ пространства $\mathbb{R}^k$. Открытый шар с центром a радиуса $r > 0$ в $\mathbb{R}^k$ обозначается символом $B(a, r)$, его граничная сфера — символом $S(a, r)$. Символом $\mathbb{E}^k$ обозначается k-мерное евклидово пространство. Пространство $\mathbb{E}^k$ содержит объекты двух родов: точки и векторы. Каждая пара точек (x, y) известным образом определяет некоторый вектор $\mathbf{z}$ пространства $\mathbb{E}^k$, для которого x — начало, y — конец. Будем писать $\mathbf{z} = y - x$ и в соответствии с этим $y = x + \mathbf{z}$. Множество всех векторов евклидова пространства $\mathbb{E}^k$ обозначается символом $\mathbb{V}^k$. Декартова ортогональная система координат в $\mathbb{E}^k$ есть изометрическое отображение $\mathbb{E}^k$ на $\mathbb{R}^k$.

Пусть даны множество $A \subset \mathbb{R}^k$ и вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$. Тогда символ $\mathbf{u} + A$ означает множество всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ таких, что $\mathbf{x} - \mathbf{u} \in A$. Пусть A и B — произвольные множества в топологическом пространстве X. Будем говорить, что A *лежит строго внутри* B и использовать обозначение $A \Subset B$, если замыкание A компактно и содержится в открытом ядре множества B.

Далее Ω означает область, т. е. связное открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть дано число p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда если p конечно, то символ $L_p(\Omega)$ означает совокупность всех измеримых вещественных функций, каждая из которых определена в области Ω почти всюду и интегрируема в степени p по области Ω, $L_\infty(\Omega)$ — множество всех измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, для каждой из которых существует постоянная $L < \infty$ такая, что $|f(x)| \leqslant L$ почти всюду в Ω. Символ $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ обозначает далее совокупность всех вещественных функций, каждая из которых принадлежит классу $L_p(\Sigma)$ для всякой области $\Sigma \Subset \Omega$.

Мы предполагаем известными понятия обобщенной производной порядка l и обобщенной функции (см. [5]). Пусть $l > 0$ — целое число и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда $W_p^l(\Omega)$ ($W_{p,\mathrm{loc}}^l(\Omega)$) означает множество всех функций класса $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, у которых все обобщенные производные порядка l суть функции класса $L_p(\Omega)$ (соответственно класса $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$).

Под поверхностью в $\mathbb{E}^N$ здесь понимается всякое множество $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}^N$, являющееся n-мерным многообразием. Это означает, что каждая точка $x \in \mathbb{F}$ имеет в $\mathbb{F}$ окрестность, гомеоморфную открытому шару пространства $\mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что $\mathbb{F}$ есть *поверхность класса* $\mathscr{C}^1$, если $\mathbb{F}$ имеет атлас параметризаций $\mathscr{A}$ такой, что выполнены следующие условия. Если вектор-функция $\mathbf{z} : \Omega \to \mathbb{F}$ принадлежит атласу $\mathscr{A}$, то она имеет в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ переменной $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ непрерывные первые производные $\partial_k \mathbf{z} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t_k}$, причем значения этих производных в каждой точке $t \in \Omega$ линейно независимы. Параметризации, принадлежащие атласу $\mathscr{A}$, называются *допустимыми*.

Пусть поверхность $\mathbb{F}$ принадлежит классу $\mathscr{C}^1$. Выберем произвольно точку $x \in \mathbb{F}$. Пусть $\mathbf{z} : \Omega \to \mathbb{F}$ — допустимая параметризация $\mathbb{F}$ такая, что $x = \mathbf{z}(t)$ для некоторого $t \in \Omega$. Пусть $T(x)$ — линейная оболочка векторов $\partial_k \mathbf{z}(t)$, $k = 1, \dots, n$; $T(x)$ — n-мерное подпространство $\mathbb{V}^N$. Оно не зависит от выбора допустимой параметризации $\mathbf{z}$ и называется *касательным пространством к многообразию* $\mathbb{F}$ *в точке* x. Пусть $P(x)$ — n-мерная плоскость $\mathbf{x} + T(x)$, $P(x)$ называется *касательной плоскостью к многообразию* $\mathbb{F}$ в точке x. Говорят, что вектор $\mathbf{u}$ *ортогонален подпространству* H пространства $\mathbb{V}^N$, если он ортогонален всякому вектору $\mathbf{z}$, принадлежащему H. Множество $N(x)$ всех векторов $\mathbf{u}$, ортогональных $T(x)$, называется *пространством нормалей к поверхности* $\mathbb{F}$ в точке x. Полагаем $Q(x) = \mathbf{x} + N(x)$, $Q(x)$ назовем *нормальной плоскостью в точке* x *к поверхности* $\mathbb{F}$. Символом $N(x, r)$ далее обозначается открытый шар в нормальной плоскости $Q(x)$ поверхности $\mathbb{F}$ с центром в точке $x \in \mathbb{F}$ и радиусом $r > 0$.

Положим $\partial\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}} \setminus \mathbb{F}$. Множество $\partial\mathbb{F}$ будем называть *краем поверхности* $\mathbb{F}$; $\partial\mathbb{F}$ — замкнутое множество и в общем случае может не быть многообразием.

Пусть $\mathbb{F}$ — n-мерная поверхность класса $\mathscr{C}^1$ в пространстве $\mathbb{E}^N$. Положим $m = N - n$. Будем говорить, что поверхность $\mathbb{F}$ является *δ-облегаемой*, где $\delta > 0$, если выполнено следующее условие: для любых двух различных точек x_1 и x_2 поверхности $\mathbb{F}$ m-мерные шары $N(x_1, \delta)$ и $N(x_2, \delta)$ не имеют общих точек.

Пусть $\mathbb{F}$ — δ-облегаемая поверхность. Множество

$$U_\delta(\mathbb{F}) = \bigcup_{x \in \mathbb{F}} N(x, \delta)$$

называется *δ-оболочкой поверхности* $\mathbb{F}$. Множество $U_\delta(\mathbb{F})$ открыто.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — δ-облегаемая n-мерная поверхность в пространстве $\mathbb{E}^N$, где $N = n + m$. Тогда для всякого компактного множества $A \subset \mathbb{F}$ найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что для всякой точки $x \in A$ для любого единичного вектора нормали $\mathbf{n} \in N(x)$ к поверхности $\mathbb{F}$ в точке x шар $B(x+\varepsilon\mathbf{n}, \varepsilon)$ не содержит точек поверхности.*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{F}$ — произвольное компактное подмножество $\mathbb{F}$. Тогда $A \cap \partial\mathbb{F} = \varnothing$ и, значит, найдется $\rho > 0$ такое, что для всякой точки $x \in A$ расстояние до множества $\partial\mathbb{F}$ не меньше ρ. Положим $\varepsilon = \min\{\delta, \rho/2\}$. Пусть $p \in A$. Выберем произвольно вектор $\mathbf{n} \in N(p)$. Положим $a = p + \varepsilon\mathbf{n}$. Докажем, что шар $B(a, \varepsilon)$ не содержит точек множества $\partial\mathbb{F}$. Предположим, что это не так. Пусть q — ближайшая к a точка множества $\overline{\mathbb{F}}$. Тогда $|a - q| < \varepsilon$. Имеем $|p - q| \leqslant |p - a| + |a - q| < \varepsilon + \varepsilon \leqslant \rho$. Отсюда $q \notin \partial\mathbb{F}$, следовательно, $q \in \mathbb{F}$. Точка q является точкой минимума определенной на множестве $\mathbb{F}$ функции $x \mapsto |a - x|^2$. Пусть $\mathbf{z}(t)$, $t \in \Omega$, — допустимая параметризация $\mathbb{F}$ такая, что $q = \mathbf{z}(t_0)$ для некоторого $t_0 \in \Omega$. Производные в точке t_0 функции $|\mathbf{z}(t) - a|^2$ равны нулю. Имеем

$$\partial_k(|\mathbf{z}(t) - a|^2) = 2\langle \mathbf{z}(t) - a, \partial_k\mathbf{z}(t)\rangle.$$

В точке $t = t_0$ все эти производные обращаются в нуль, откуда получаем, что вектор $\nu = a - \mathbf{z}(t_0)$ ортогонален векторам $\partial_k\mathbf{z}(t_0)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тем самым ν есть вектор нормали поверхности $\mathbb{F}$ в точке q. Так как $|\nu| = |\mathbf{z}(t) - a| < \varepsilon \leqslant \delta$, точка a принадлежит $N(q, \delta)$. С другой стороны, $a \in N(p, \delta)$. Точки p и q различны, поскольку q принадлежит $B(a, \varepsilon)$, а p не содержится в этом шаре. Таким образом, множества $N(p, \delta)$ и $N(q, \delta)$ имеют общие точки, причем $p \neq q$. Это противоречит условию определения δ-облегаемой поверхности.

Теорема доказана.

2. Функции с равномерной оценкой остаточного члена формулы Тейлора

Лемма 1. *Пусть U — выпуклое открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$ и функция $f : U \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям. Функция f непрерывна, и для всякой точки $p \in U$ можно указать многочлен не выше первой степени $A(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j x_j + l$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $f(p) = A(p)$ и если $|x - p| < \varepsilon$, то $f(x) \geqslant A(x)$. Тогда функция f является выпуклой.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Тогда множество U представляет собой отрезок (a, b) числовой прямой $\mathbb{R}$. Зададим произвольно точки x_1 и x_2 отрезка U. Будем считать, что $x_1 < x_2$. Пусть $y = \lambda x + \mu$ — уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1, f(x_1))$ $(x_2, f(x_2))$ графика функции f. Положим $g(x) = f(x) - \lambda x - \mu$. Имеем $g(x_1) = g(x_2) = 0$.

Докажем, что $g(x) \leqslant 0$ для всех $x \in [x_1, x_2]$. Предположим, что это не так. Тогда найдется $x' \in [x_1, x_2]$ такое, что $g(x') > 0$. Пусть $h = \sup\limits_{x \in [x_1, x_2]} g(x)$ и E — множество всех $x \in [x_1, x_2]$, для которых $g(x) = h$. В силу непрерывности g множество E непусто и замкнуто. Пусть $x_0 = \inf E$. Тогда $x_0 \in E$ и, значит, $g(x_0) = h$. Очевидно, $x_0 \in [x_1, x_2]$. Имеем $h \geqslant g(x') > 0$, следовательно, $g(x_0) > 0$. Отсюда $x_1 < x_0 < x_2$. Из определения x_0 следует, что при $x_1 \leqslant x < x_0$ будет $g(x) < h = g(x_0)$ (неравенство строгое!), а если $x_0 \leqslant x \leqslant x_2$, то $g(x) \leqslant h$.

Согласно условию леммы найдутся $\varepsilon > 0$ и числа k и l такие, что $f(x_0) = kx_0+l$, и для всякого $x \in (a,b)$ такого, что $|x-x_0| < \varepsilon$, выполняется неравенство: $f(x) \geqslant kx + l$. Для всякого $x \in [x_1, x_2]$ такого, что $|x - x_0| < \varepsilon$, имеем $kx + l \leqslant f(x) = g(x) + \lambda x + \mu$. Кроме того, $kx_0 + l = f(x_0) = g(x_0) + \lambda x_0 + \mu$. Положим $k_1 = k - \lambda$, $l_1 = l - \mu$. Тогда, если x таково, что $|x - x_0| < \varepsilon$, то $k_1 x + l_1 \leqslant g(x) \leqslant h = g(x_0) = k_1 x_0 + l_1$ и, значит, $k_1(x - x_0) \leqslant 0$ для всех $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Если $x < x_0$, то $g(x) < g(x_0)$, откуда вытекает, что при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ имеем неравенство $k_1(x-x_0) < 0$. В этом случае $x-x_0 < 0$, следовательно, $k_1 > 0$. При $x > x_0$ разность $x - x_0$ положительна и из неравенства $k_1(x - x_0) \leqslant 0$ получаем, что $k_1 \leqslant 0$. Таким образом, одновременно $k_1 > 0$ и $k_1 \leqslant 0$, что невозможно. Итак, допустив, что $g(x)$ принимает положительные значения при $x \in [x_1, x_2]$ приходим к противоречию. Тем самым $g(x) \leqslant 0$ при $x \in [x_1, x_2]$.

Пусть $t \in (0, 1)$. Точка $(1 - t)x_1 + tx_2$ принадлежит промежутку $[x_1, x_2]$. Отсюда заключаем, что $(1-t)g(x_1)+tg(x_2) = 0 \geqslant g((1-t)x_1+tx_2)$. Подставляя сюда представление g через f, после очевидных преобразований получим

$$(1 - t)f(x_1) + tf(x_2) \geqslant f((1 - t)x_1 + tx_2).$$

Так как точки $x_1, x_2 \in U$ и число $y \in (0, 1)$ были выбраны произвольно, выпуклость функции f доказана.

Теперь рассмотрим случай $n > 1$. Пусть функция $f : U \to \mathbb{R}$ удовлетворяет всем условиям леммы. Возьмем произвольно точки a_1 и a_2 области U. Для $x \in \mathbb{R}$ положим $g(x) = f((1 - x)a_1 + xa_2)$. В силу выпуклости области U область определения функции g есть некоторый отрезок множества $\mathbb{R}$. Функция g непрерывна. Легко проверяется, что она удовлетворяет всем условиям леммы и, значит, по доказанному является выпуклой функцией. Полагая $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, получим, что для любого $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$(1 - t)g(0) + tg(1) \geqslant g(t).$$

Имеем $g(0) = f(a_1)$, $g(1) = f(a_2)$ и $g(t) = f[(1 - t)a_1 + ta_2]$, следовательно,

$$(1 - t)f(a_1) + tf(a_2) \geqslant f((1 - t)a_1 + ta_2).$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть Ω — открытая область в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и удовлетворяет следующему условию. Для всякого открытого множества $\Sigma \Subset \Omega$ существует постоянная $L < \infty$ такая, что для всякой точки $p \in A$ найдутся числа $\delta > 0$ и $A_i(p)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, такие, что если $x \in \Omega$, причем $|x - p| < \delta$, то*

$$\left| f(x) - A_0(p) - \sum_{i=1}^{n} A_i(p)(x_i - p_i) \right| \leqslant L|x - p|^2.$$

Тогда функция f принадлежит классу $\mathscr{C}^1$ и имеет в Ω обобщенные вторые производные, причем эти производные являются измеримыми функциями, ограниченными на всяком компактном множестве $A \subset \Omega$.

Доказательство. Пусть выполнены все условия леммы. Зададим произвольно открытое выпуклое множество $G \Subset \Omega$. Множество $\overline{G}$ компактно и содержится в Ω.

Пусть $L < \infty$ таково, что для всякой точки $p \in \overline{G}$ найдется окрестность $V = B(p, \varepsilon)$, в которой выполняется неравенство $|f(x) - A(x)| \leqslant L|x-p|^2$, где $A(x) = A_0(p) + \sum\limits_{i=1}^{n} A_i(p)(x_i - p_i)$.

Положим $g(x) = L|x|^2 + f(x)$, $h(x) = L|x|^2 - f(x)$. Докажем, что g и h являются выпуклыми функциями на множестве G. Возьмем произвольно точку $p \in G$, и пусть $\delta > 0$ таково, что для любого $x \in \Omega$, для которого $|x-p| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A(x)| \leqslant L|x-p|^2$, где $A(x)$ — аффинная функция, т. е. полином первой степени. Отсюда получаем, что при $|x-p| < \delta$

$$g(x) = L|x|^2 + f(x) \geqslant L|x|^2 + A(x) - L|x-p|^2, \tag{2.1}$$

$$h(x) = L|x|^2 - f(x) \geqslant L|x|^2 - A(x) - L|x-p|^2. \tag{2.2}$$

При $x = p$ неравенства (2.1) и (2.2) обращаются в равенства. Имеем $L|x|^2 - L|x-p|^2 = L\langle 2x-p, p\rangle$. Подставляя данное выражение в неравенства (2.1) и (2.2), получаем

$$g(x) \geqslant L\langle 2x-p, p\rangle + A(x), \tag{2.3}$$

$$h(x) \geqslant L\langle 2x-p, p\rangle - A(x). \tag{2.4}$$

При этом неравенства (2.3) и (2.4) обращаются в равенства при $x = p$. Правые части неравенств (2.3) и (2.4) суть многочлены степени $\leqslant 1$. Точка $p \in G$ была выбрана произвольно. Таким образом, для функций g и h выполняются условия леммы 2, следовательно, они являются выпуклыми функциями на множестве G.

Для всякой выпуклой функции F, определенной на выпуклой области G пространства $\mathbb{R}^n$, ее обобщенные вторые производные удовлетворяют следующему условию. Для всякой неотрицательной функции φ класса $\mathscr{C}^\infty$, финитной относительно области G, для любого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\int\limits_G \big(\partial^2_{ij} F\big)\xi_i\xi_j\varphi(x)\,dx \geqslant 0.$$

Символ ∂^2_{ij} означает оператор дифференцирования $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. По повторяющимся индексам i, j подразумевается суммирование в пределах от 1 до n.

Далее G — выпуклое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ и $\mathscr{D}^+$ — совокупность всех неотрицательных функций класса $\mathscr{C}^\infty$, определенных и финитных в области G.

Пусть F — локально интегрируемая на множестве G функция. Имеет место следующий критерий выпуклости функции (см. [2, 3]). Для того чтобы функция F была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы обобщенные функции $\partial^2_{ij} F$ были мерами (вообще говоря, знакопеременными) и удовлетворяли условию: для всякого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ мера

$$\big(\partial^2_{ij} F\big)\xi_i\xi_j \tag{2.5}$$

неотрицательна. Здесь используется только необходимость указанного условия. Неотрицательность меры (2.5) означает, что для всякой функции $\varphi \in \mathscr{D}^+$ выполняется неравенство

$$\int\limits_G \varphi(x)\big(\partial^2_{ij} F\big)\xi_i\xi_j\,dx \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Пусть функция f удовлетворяет всем условиям теоремы, $G \Subset \Omega$ — выпуклое открытое множество и $L < \infty$ — постоянная такая, что функции $g(x) = L|x|^2 +$

$f(x)$ и $h(x) = L|x|^2 - f(x)$ выпуклые на множестве G. Обобщенные вторые производные функции $F(x) = L|x|^2$, очевидно, суть постоянные в области G функции. При этом для данной функции F имеет место равенство $\partial^2_{ij} F\xi_i\xi_j = L|\xi|^2$. Это позволяет заключить, что вторые производные функции f являются мерами. Выписывая неравенство (2.6) для каждой из функций g и h, получим следующие интегральные неравенства, выполняющиеся для всякой функции $\varphi \in \mathscr{D}^+$:

$$\int\limits_G \varphi(x)[L|\xi|^2 + \big(\partial^2_{ij} f\big)\xi_i\xi_j]\,dx \geqslant 0, \quad \int\limits_G \varphi(x)[L|\xi|^2 - \big(\partial^2_{ij} f\big)\xi_i\xi_j]\,dx \geqslant 0.$$

Отсюда

$$-L|\xi|^2 \int\limits_G \varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_G \big(\partial^2_{ij} f\big)\xi_i\xi_j\varphi(x)\,dx \leqslant L|\xi|^2 \int\limits_G \varphi(x)\,dx. \tag{2.7}$$

В силу произвольности функции $\varphi \in \mathscr{D}^+$ из неравенств (2.7) вытекает, что обобщенная функция $\big(\partial^2_{ij} f\big)\xi_i\xi_j$ представляет собой ограниченную измеримую функцию, определенную на множестве G. При этом для почти всех $x \in G$

$$\big|\big(\partial^2_{ij} f\big)\xi_i\xi_j(x)\big| \leqslant L|\xi|^2. \tag{2.8}$$

Для произвольных векторов $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ положим $\partial^2 f(\xi,\eta) = \big(\partial^2_{ij} f\big)\xi_i\eta_j$. Имеем

$$\partial^2 f(\xi,\eta) = \frac{1}{2}[\partial^2 f(\xi+\eta, \xi+\eta) - \partial^2 f(\xi,\xi) - \partial^2 f(\eta,\eta)].$$

Выбирая в качестве ξ и η векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ канонического базиса пространства $\mathbb{R}^n$, получим, что обобщенные функции $\partial^2_{ij} f$ суть ограниченные измеримые функции на множестве G. Неравенство (2.8) позволяет получить оценку для второй производной $\big|\partial^2_{ij} f(x)\big| \leqslant 2L$ для почти всех $x \in G$.

Всякая точка $x \in \Omega$ имеет выпуклую окрестность G, лежащую строго внутри Ω. В качестве такой окрестности можно взять, например, шар $B(x,r)$, где r достаточно мало. Утверждение получается из доказанного применением леммы Бореля. Подробности, связанные с этим заключительным этапом доказательства, опускаем. Теорема доказана.

3. Основной результат

Пусть n и m — натуральные числа, $N = n + m$. Пространство $\mathbb{R}^N$ будем рассматривать как прямое произведение $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. В соответствии с этим произвольная точка $x \in \mathbb{R}^N$ понимается как пара (t,u), где $t \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. Для $a \in \mathbb{R}^n$ множество всех точек $(t,u) \in \mathbb{R}^N$, у которых $t = a$, обозначается символом $a + \mathbb{R}^m$. Пространство $\mathbb{R}^n$ отождествляется с множеством всех пар вида $(t,0)$.

Далее $Q(0,h)$ есть куб

$$\{t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n\ |t_i| < h\}$$

пространства $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2. *Пусть $\mathbb{F}$ — поверхность в пространстве $\mathbb{R}^N$, определенная уравнением $u = f(t)$, где $t \in Q = Q(0,h) \subset \mathbb{R}^n$, $f : Q \to \mathbb{R}^m$ — функция класса $\mathscr{C}^1$. Пусть $f'(t)$ — дифференциал функции f в точке $t \in Q$. Предположим, что выполнены следующие условия.*

(I) *Для всех $t \in Q$ выполняется неравенство $|f'(t)| < \frac{1}{2}$.*

(II) *Существует число $r > 0$ такое, что для всякой точки $t \in Q$ и любого единичного вектора $\mathbf{n}$ нормали к поверхности $\mathbb{F}$ в точке $x = (t, f(t))$ шар $B(x + r\mathbf{n}, r)$ не содержит точек поверхности $\mathbb{F}$.*

Тогда найдется число $L < \infty$, обладающее тем свойством, что для любого $t_0 \in Q$ существует $\delta > 0$ такое, что если $t' \in Q$ и $|t' - t| < \delta$, то

$$|f(t) - f(t_0) - f'(t_0)(t - t_0)| \leqslant L|t - t_0|^2.$$

Доказательство. Пусть выполнены все условия леммы. Введем следующее обозначение. Для $t \in Q$ полагаем $x(t) = (t, f(t))$. Выберем произвольно $t_0 \in Q$. Обозначим через P_0 касательную плоскость к поверхности $\mathbb{F}$ в точке $X_0 = x(t_0)$. Плоскость P_0 задается уравнением $u = f'(t_0)(t - t_0) + f(t_0)$. Введем обозначения $A = f'(t_0)$ и $l = f(t_0) - At_0$. Тогда уравнение плоскости P_0 может быть представлено в виде $u = At + l$.

Из условия (I) вытекает, что для любых двух точек t' и t'' из Q имеем $|f(t') - f(t'')| \leqslant \frac{1}{2}|t' - t''|$. Отсюда следует, что расстояние между точками $x(t') = (t', f(t'))$ и $x(t'') = (t'', f(t''))$ в пространстве $\mathbb{R}^N$ не превосходит

$$\sqrt{|t' - t''|^2 + \frac{1}{4}|t' - t''|^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}|t' - t''|. \tag{3.1}$$

Положим $\delta = \frac{2r}{\sqrt{5}}$. Будем доказывать, что для всякого $t \in Q$, удовлетворяющего условию $|t - t_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(t) - f(t_0) - f'(t_0)(t - t_0)| \leqslant \frac{2}{r}|t - t_0|^2. \tag{3.2}$$

Зададим произвольно $t \in Q$ такое, что $|t - t_0| < \delta$. Полагаем $X = x(t)$, и пусть Y — точка $(t, At + l)$ плоскости P_0. Положим $\Delta = f(t) - At - l$. Ясно, что Δ — вектор в $\mathbb{R}^m$ и его длина равна величине, стоящей в левой части неравенства (3.2). Пусть d — расстояние от точки X до плоскости P_0 и $Z = (p, q)$ — ближайшая к X точка плоскости P_0, так что $d = |ZX|$. Мы установим сначала оценку вида $d \leqslant C|t - t_0|^2$. Требуется, однако, получить оценку такого же вида для величины $|\Delta|$. Плоскость P_0 в силу условия (I) близка к горизонтальной плоскости $u = 0$. Ввиду этого величины $|\Delta|$ и d сравнимы между собой, поэтому из оценки для d следует оценка для $|\Delta|$.

Вектор $\overrightarrow{ZX}$ ортогонален плоскости P_0, т. е. ортогонален любому вектору, коллинеарному P_0. Будем считать, что $X \neq Z$, ибо в случае $X = Z$ выражение в левой части неравенства (3.2) равно нулю и неравенство в этом случае тривиальным образом выполнено. Положим $\mathbf{n} = \frac{1}{|ZX|}\overrightarrow{ZX}$. Очевидно, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности $\mathbb{F}$ в точке X_0. Пусть B — шар $B(X_0 + r\mathbf{n}, r)$. Согласно условию леммы B не содержит в себе точек поверхности $\mathbb{F}$. Пусть Γ — двумерная плоскость, проходящая через точки X_0, Z и X. Так как радиус шара B, направленный в точку X_0, параллелен прямой ZX, плоскость Γ проходит через центр шара B. Пересечение $K = B \cap \Gamma$ есть круг радиуса r. В плоскости

Γ введем декартовы ортогональные координаты так, чтобы начало системы координат находилось в точке X_0, центр шара B имел координаты $(0,r)$, а Z — координаты $(k,0)$, где $k=|X_0Z|$.

Из (3.1) следует, что если $|t-t_0|<\delta=\frac{2r}{\sqrt{5}}$, то расстояние между точками $X=x(t)$ и $X_0=x(t_0)$ меньше r. Треугольник X_0ZX прямоугольный, X_0X — его гипотенуза, X_0Z и ZX — катеты. Отсюда вытекает, что $k=|X_0Z|<|X_0X|<r$. Круг K лежит в полосе $-r<\xi<r$ плоскости Γ. Точки X и X_0 лежат в той же полосе. Точка X_0 расположена в этой полосе ниже круга K. Следовательно, и точка X располагается ниже этого круга, ибо в противном случае в круге K, а значит, и в шаре B содержались бы точки поверхности $\mathbb{F}$. По условию, однако, шар B не содержит в себе таких точек. Нижняя часть окружности круга K задается уравнением $\eta=r-\sqrt{r^2-\xi^2}$, $-r<\xi<r$. Точка x, таким образом, попадает в клинообразную область, определенную неравенствами $0<\xi<r$, $0<\eta\leqslant r-\sqrt{r^2-\xi^2}$. Отсюда $d\leqslant r^2-\sqrt{r^2-k^2}$. Для всех $\xi\in(0,r)$ имеет место неравенство $r-\sqrt{r^2-\xi^2}<\frac{\xi^2}{r}$. Это позволяет заключить, что выполняются неравенства: $0\leqslant d\leqslant\frac{k^2}{r}$. В силу (3.1)

$$d\leqslant\frac{5}{4}\frac{|t-t_0|^2}{r}. \tag{3.3}$$

Для завершения доказательства мы должны оценить величину $|\Delta|=|f(t)-At-l|$ через расстояние d от точки $X=x(t)$ до плоскости P_0.

Пусть $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n$ — векторы канонического базиса пространства $\mathbb{R}^n$. Векторы $\mathbf{t}_i=(\mathbf{e}_i,A\mathbf{e}_i)$, $i=1,2,\dots,n$, коллинеарны плоскости P. Эти векторы линейно независимы, и их число равно $n=\dim P$. Чтобы доказать ортогональность вектора $\overrightarrow{ZX}$ к плоскости P, достаточно установить, что он ортогонален каждому из векторов $\mathbf{t}_i$. Имеем $q=Ap+l$, откуда $\overrightarrow{ZX}=(t-p,f(t)-Ap-l)$ и, значит,

$$\langle\overrightarrow{ZX},\mathbf{t}_i\rangle=\langle t-p,\mathbf{e}_i\rangle+\langle f(t)-Ap-l,A\mathbf{e}_i\rangle=0. \tag{3.4}$$

Далее,

$$\langle f(t)-Ap-l,A\mathbf{e}_i\rangle=\langle A^*[f(t)-Ap-l],\mathbf{e}_i\rangle,$$

где A^* — транспонированная матрица A. Подставляя это выражение в равенство (3.4), получим, что при каждом $i=1,2,\dots,n$ выполняется равенство

$$\langle t-p+A^*[f(t)-Ap-l],\mathbf{e}_i\rangle=0.$$

Отсюда вытекает, что

$$t-p+A^*[f(t)-Ap-l]=0. \tag{3.5}$$

Это уравнение, из которого точка p может быть определена. Заметим, что $A(p)=-A(t-p)+A(t)$. После подстановки в (3.5) получим $t-p+A^*A(t-p)+A^*[f(t)-At-l]=0$, так что $(I_n+A^*A)(t-p)=-A^*\Delta$, где I_n — единичная матрица порядка n. Матрица A^*A симметрическая и неотрицательная. Отсюда следует, что для всякого вектора $\xi\in\mathbb{R}^n$ имеет место неравенство $|(I_n+A^*A)\xi|\geqslant|\xi|$, значит, матрица I_n+A^*A невырожденная. При этом для обратной матрицы $(I_n+A^*A)^{-1}$ выполняется неравенство $|(I_n+A^*A)^{-1}\eta|\leqslant|\eta|$ для любого вектора $\eta\in\mathbb{R}^n$ и тем самым норма матрицы $(I_n+A^*A)^{-1}$ не превосходит 1.

Имеем $t-p=-(I_n+A^*A)^{-1}A^*\Delta$, откуда

$$|t-p|\leqslant|(I_n+A^*A)^{-1}||A^*||\Delta|\leqslant\frac{1}{2}|\Delta|.$$

Далее, $|YZ| \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}|t-p|$, следовательно, $|YZ| \leqslant \frac{\sqrt{5}}{4}|\Delta|$. Треугольник XYZ прямоугольный, и XY — его гипотенуза. Из теоремы Пифагора следует, что $d = |XZ| = \sqrt{|XY|^2 - |YZ|^2}$, откуда $d \geqslant \sqrt{|\Delta|^2 - \frac{5}{16}|\Delta|^2} \geqslant \frac{4}{5}|\Delta|$. В результате получаем оценку

$$|f(t) - f'(t)(t-t_0) - f(t_0)| \leqslant \frac{5}{4}d. \tag{3.6}$$

Из (3.3) и (3.6) вытекает неравенство

$$|f(t) - f'(t)(t-t_0) - f(t_0)| \leqslant \frac{25}{16}\frac{|t-t_0|^2}{r} \leqslant \frac{2}{r}|t-t_0|^2.$$

Так как в рассуждениях, проделанных выше, предполагалось только, что $t \in Q$ и $|t-t_0| < \delta$, и $t_0 \in Q$ было выбрано произвольно, то лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{F}$ — n-мерная поверхность класса $\mathscr{C}^1$ в пространстве $\mathbb{E}^N$, где $N = n+m$, $m \geqslant 1$. Тогда если $\mathbb{F}$ является δ-облегаемой поверхностью, то всякая ее точка имеет окрестность в $\mathbb{F}$, которая допускает параметризацию $\mathbf{z} : Q \to \mathbb{E}^N$, удовлетворяющую следующим условиям. Вектор-функция $\mathbf{z}$ принадлежит классу $W^2_\infty(Q)$, т. е. имеет в области Q обобщенные вторые производные, причем эти производные являются ограниченными функциями, и векторы $\mathbf{t}_i(x) = \partial_i \mathbf{z}$ в каждой точке $x \in Q$ линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{F}$ есть δ-облегаемая n-мерная поверхность в пространстве $\mathbb{E}^{n+m}$. Возьмем произвольно точку $p \in \mathbb{F}$. Пусть G — окрестность точки p такая, что ее замыкание компактно и не содержит точек множества $\partial\mathbb{F}$. Тогда найдется $\eta > 0$ такое, что $\rho(x, \partial\mathbb{F}) \geqslant \eta$ для всякого $x \in G$. Положим $\varepsilon = \min\{\eta/2, \delta\}$. Согласно теореме 1 всякий шар радиуса ε, касающийся поверхности $\mathbb{F}$ в произвольной точке $x \in G$, не содержит точек данной поверхности.

Пусть H — касательная плоскость к $\mathbb{F}$ в точке p. В пространстве $\mathbb{E}^{n+m}$ введем декартову ортогональную систему координат (t,u), $t \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, в которой плоскость H задается уравнением $u = 0$ и точка p является началом системы координат. Пусть $\varphi : U \to \mathbb{F}$ — параметризация поверхности $\mathbb{F}$ такая, что $p \in G_1 = \varphi(U) \subset G$. Будем считать, что $0 \in U$ и $p = \varphi(0)$. Пусть π — ортогональная проекция пространства $\mathbb{E}^{n+m}$ на плоскость H. Положим $\psi = \pi \circ \varphi$. Отображение ψ принадлежит классу $\mathscr{C}^1$. Векторы $\partial_i\varphi(0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, линейно независимы и лежат в плоскости H. Имеем $\partial_i\psi(0) = \pi[\partial_i\varphi(0)] = \partial_i\varphi(0)$. Отсюда вытекает, что якобиан отображения ψ в точке 0 отличен от нуля и, значит, найдется окрестность V точки 0 такая, что ограничение ψ на V есть диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^1$. Положим $W = \psi(V)$. Отображение ψ^{-1} принадлежит $\mathscr{C}^1$. Далее полагаем $\theta = \varphi \circ \psi^{-1}$. Для произвольного $x \in W$ имеем $\pi[\theta(x)] = \pi\{\varphi[\psi^{-1}(x)]\} = \psi[\psi^{-1}(x)] = x$. Функция θ принадлежит классу $\mathscr{C}^1$ и отображает множество W на некоторую окрестность G_2 точки p относительно $\mathbb{F}$. Ортогональная проекция точки $y = \theta(x)$ на плоскость H совпадает с x. Отсюда следует, что если $x = (t, 0)$, то $\theta(x) = (t, f(t))$. Функция $f(t)$, очевидно, принадлежит классу $\mathscr{C}^1$.

Таким образом, установлено, что некоторая окрестность точки p на поверхности $\mathbb{F}$ в используемой здесь декартовой ортогональной системе координат определяется уравнением $u = f(t)$, где $t \in W$, причем $f \in \mathscr{C}^1$. Плоскость $u = 0$ является касательной плоскостью к $\mathbb{F}$ в точке p, тем самым $f'(0) = 0$. В силу непрерывности $f'(t)$ найдется число $\lambda > 0$ такое, что куб $Q = \{t \in \mathbb{E}^m \mid \forall i\, |t_i| < \lambda\}$ содержится в множестве W и для всех $t \in Q$ выполняется неравенство $|f'(t)| < \frac{1}{2}$. Для функции $f : Q \to \mathbb{E}^m$ выполнены оба условия леммы 2. Согласно лемме 2 отсюда следует, что для нее выполнены условия теоремы 2 и, значит, функция f имеет в кубе обобщенные вторые производные, причем эти производные суть ограниченные измеримые функции. Параметризация $\theta : t \in Q \to (t, f(t))$ удовлетворяет всем требованиям теоремы. Теорема доказана.

4. Приложение

В теореме 2 устанавливается некоторый критерий существования ограниченных вторых производных. Здесь будет доказан аналогичный критерий существования производных порядка k функции, интегрируемой в степени p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, верный для всех значений k. Этот результат есть следствие теоремы Б. Боярского [4] и здесь приводится потому, что в нашем случае доказательство существенно прозрачнее. Эта часть статьи формально не связана с предыдущей и поэтому включена как приложение к статье.

Далее используются известные мультииндексные обозначения для производных высших порядков и полиномов n переменных (см. [6]).

Мультииндекс есть вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где все $\alpha_i \geqslant 0$ — целые числа. Для вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и мультииндекса α полагаем $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$,

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Множество всех n-мерных мультииндексов α, порядок которых $|\alpha|$ па превосходит k, будем обозначать символом $M_{n,k}$.

Полиномом Тейлора порядка k функции $F \in \mathscr{C}^k$ в точке y называется полином

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{D^\alpha F(y)}{\alpha!} (x - y)^\alpha.$$

Для $F \in \mathscr{C}^k$ полагаем

$$R_k(x, y) = F(x) - \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{D^\alpha F(y)}{\alpha!} (x - y)^\alpha.$$

Имеем $R_k(x, y) = o(|x - y|^k)$ при $x \to y$. Этим свойством полином Тейлора характеризуется однозначно: если $P(x)$ — полином такой, что $\deg P(x) \leqslant k$ и $F(x) - P(x) = o(|x - y|^k)$, то $P(x)$ есть полином Тейлора порядка k функции F в точке y.

Теорема 4. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ — функция класса $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Предположим, что существуют число $\delta > 0$, функция $D \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и набор функций $A_\alpha \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $\alpha \in M_{n,k-1}$, такие, что выполнены следующие условия: если $|x - y| < \delta$, то*

$$|F(x) - \sum_{|\alpha| \leqslant k-1} A_\alpha(y)(x - y)^\alpha| \leqslant [D(x) + D(y)]|x - y|^k.$$

Тогда функция F имеет в области Ω все обобщенные в смысле Соболева производные порядка не выше k.

При этом производные порядка k функции F принадлежат классу $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, и для почти всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство $|D^\alpha F(x)| \leqslant CD(x)$, где $C = \mathrm{const}$ для любого α с $|\alpha| = k$ и $A_\alpha = \alpha! D^\alpha F$ при $|\alpha| \leqslant k-1$.

Замечание. Отличие от теоремы Боярского состоит в том, что в [4] не требуется даже измеримости функций A_α.

Доказательство. Воспользуемся операцией усреднения по Соболеву. Зададим функцию $\omega \in \mathscr{C}^\infty$ такую, что $\omega(x) \geqslant 0$ для всех x и $\omega(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$, причем $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x)\,dx = 1$. Для функции $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ полагаем

$$u^h(x) = \int\limits_{|\xi|\leqslant 1} u(x+h\xi)\omega(\xi)\,d\xi.$$

Для произвольной точки $x \in \Omega$ пусть $\rho(x,\partial\Omega) = \inf\limits_{y\in\partial\Omega} |x-y|$. Функция $\rho(x,\partial\Omega)$ непрерывна. Пусть $t > 0$. Положим $\Omega_t = \{x \in \Omega \mid \rho(x,\partial\Omega) > t\}$. Множества Ω_t открытые. При $t_1 < t_2$ имеем $\Omega_{t_1} \supset \Omega_{t_2}$ и $\bigcup\limits_{t>0} \Omega_t = \Omega$.

Пусть $x, y \in \Omega$ и $|x-y| < \delta$. Найдем $t > 0$ такое, что $x, y \in \Omega_t$, и пусть $0 < h < t$. Тогда если $|\xi| < 1$, то точки $x+h\xi$, $y+h\xi$ принадлежат Ω и расстояние между ними $|x-y| < \delta$.

В силу условия теоремы имеем

$$\Big|F(x+h\xi) - \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} A_\alpha(y+\xi h)(x-y)^\alpha\Big| \leqslant [D(x+h\xi)x + D(y+h\xi)]|x-y|^k.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\limits_{|\xi\leqslant 1} F(x+h\xi)\omega(\xi)\,d\xi - \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} (x-y)^\alpha \int\limits_{|\alpha|\leqslant 1} A_\alpha(y+h\xi)\omega(\xi)\,d\xi\Big| \\
&\qquad \leqslant \int\limits_{|\xi|\leqslant 1} \Big|F(x+h\xi) - \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} A_\alpha(y+\xi h)(x-y)^\alpha\Big|\omega(\xi)\,d\xi \\
&\qquad \leqslant |x-y|^k \int\limits_{|\xi|\leqslant 1} [D(x+h\xi) + D(y+h\xi)]\omega(\xi)\,d\xi = [D^h(x) + D^h(y)]|x-y|^k.
\end{aligned}$$

Таким образом, для любых $x, y \in \Omega_t$ таких, что $|x-y| < \delta$, выполняется неравенство

$$\Big|F^h(x) - \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} A^h_\alpha(y)(x-y)^\alpha\Big| \leqslant [D^h(x) + D^h(y)](x-y)^k. \tag{4.1}$$

Функции F^h, A^h_α и D^h принадлежат классу $\mathscr{C}^\infty$. Из неравенства (4.1) следует, что

$$P(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} A^h_\alpha(y)(x-y)^\alpha$$

— полином Тейлора порядка $k-1$ функции F^h в точке y и

$$\alpha! A^h_\alpha(y) = D^\alpha F^h(y).$$

Пусть

$$R^h_k(x,y) = F^h(x) - \sum_{|\alpha|\leqslant k} \frac{D^\alpha F^h(y)}{\alpha!}(x-y)^\alpha.$$

Тогда
$$R_k^h(x,y) = \theta(x,y)|x-y|^k,$$
где $\theta(x,y) \to 0$ при $x \to y$, и
$$\sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha F^h(y)}{\alpha!}(x-y)^\alpha + R_k^h(x,y) = F^h(x) - \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} A_\alpha^h(y)(x-y)^\alpha.$$
Отсюда
$$\left|\sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha F^h(y)}{\alpha!}(x-y)^\alpha\right| \leqslant (|\theta(x,y)| + D^h(x) + D^h(y))|x-y|^k. \tag{4.2}$$

Полагая в неравенстве (4.2) $x = y + \lambda z$, где $|z| = 1$, $|\lambda| \leqslant h$, и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим неравенство
$$\left|\sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha F^h(y)}{\alpha!}(z)^\alpha\right| \leqslant 2D^h(y). \tag{4.3}$$

Пусть $H_{k,n}$ — множество всех полиномов от n переменных, представленных в виде
$$P(z) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{B_\alpha}{\alpha} z^\alpha.$$
Множество $H_{k,n}$ — конечномерное векторное пространство. Величина
$$\|P\|_C = \max_{|z|=1}\left|\sum_{|z|=k} \frac{B_\alpha}{\alpha!} z^\alpha\right|$$
является нормой в $H_{k,n}$. Величина $\|P\|_\mu = \max_{|\alpha|=k} |B_\alpha|$ также норма в $H_{k,n}$. В силу конечномерности $H_{k,n}$ эти нормы эквивалентны и, значит, найдется постоянная C_1 такая, что $\|P\|_\mu \leqslant C_1\|P\|_C$.

Применяя данное замечание, из неравенства (4.3) заключаем, что
$$|D^\alpha F^h(y)| \leqslant 2C_1 D^h(y),$$
где $C_1 = \mathrm{const}$.

При $h \to 0$ на всяком множестве $\Sigma \Subset \Omega$ функции F^h сходятся в $L_1(\Sigma)$ к функции F, функции A_α^h сходятся в $L_1(\Sigma)$ к A_α. Имеем
$$A_\alpha^h = \frac{D^\alpha F^h}{\alpha!}.$$
Отсюда следует, что функция $\alpha! A_\alpha$ есть производная $D^\alpha F$ при $|\alpha| \leqslant k-1$.

В случае $|\alpha| = k$ функции $D^\alpha F^h$ сходятся к обобщенной функции $D^\alpha F$. Так как $|D^\alpha F^h(x)| \leqslant 2C_1 D^h(x)$, где $C_1 = \mathrm{const}$, а $D^h(x) \to D(x)$ почти всюду и $\|D^h - D\|_{L_p(\Sigma)} \to 0$ для всякого $\Sigma \Subset \Omega$, то ограничение обобщенной функции $D^\alpha F$ на множество Σ в действительности представляет собой функцию класса $L_p(\Sigma)$.

Таким образом, установлено, что все обобщенные производные порядка k функции F принадлежат классу $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$. По определению это и означает, что $F \in W_{p,\mathrm{loc}}^k(\Omega)$. Теорема доказана.

Особо отметим частный случай теоремы 4, соответствующий $p = \infty$.

Следствие 1. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n, F : \Omega \to \mathbb{R}$ — функция класса $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Предположим, что существуют числа $L < \infty$, $\delta > 0$ и набор функций $A_\alpha \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $\alpha \in M_{n,k-1}$, такие, что выполнены следующие условия: если $|x-y| < \delta$, то*

$$\left|F(x) - \sum_{|\alpha| \leqslant k-1} A_\alpha(y)(x-y)^\alpha\right| \leqslant L|x-y|^k.$$

Тогда функция F имеет в области Ω все обобщенные в смысле Соболева производные порядка не выше k.

При этом производные порядка k функции F суть ограниченные в области Ω функции, $|D^\alpha F(x)| \leqslant CL$, где $C = \mathrm{const}$ для любого α с $|\alpha| = k$ и $A_\alpha = \alpha! D^\alpha F$ при $|\alpha| \leqslant k-1$.

Для доказательства достаточно в проделанных выше рассуждениях положить $D(x) \equiv L/2$ и взять $p = \infty$.

В случае $k = 1$ условие следствия равносильно условию Липшица. Действительно, предположим, что функция F удовлетворяет условиям следствия, и пусть $k = 1$. В этом случае указанное условие принимает следующий вид. Существует функция A_0 переменной y такая, что для любых $y \in \Omega$ и $x \in \Omega$, для которых $[x-y| < \delta$, выполняется неравенство $|F(x) - A_0(y)| \leqslant L|x-y|$. Полагая в этом неравенстве $x = y$, получаем $|F(y) - A_0(y)| = 0$, т. е. $A_0(y) = F(y)$. В данном случае имеем известное утверждение, что всякая функция, удовлетворяющая условию Липшица, принадлежит соболевскому классу W^1_∞. Согласно известной теореме Радемахера [9] всякая функция, удовлетворяющая условию Липшица, почти всюду дифференцируема. В [3] этот факт доказан как следствие общей теоремы о дифференцируемости почти всюду функций с обобщенными производными. В общем случае для произвольного k также имеет место некоторый аналог теоремы Радемахера.

Будем говорить, что функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *k-кратно дифференцируема в точке* $y \in \Omega$, если существует полином P такой, что $\deg P \leqslant k$ и

$$\lim_{x \to y} \frac{f(x) - P(x-y)}{|x-y|^k} = 0.$$

Следствие 2 (обобщенная теорема Радемахера). *Пусть функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Тогда для почти всех $y \in \Omega$ функция f k-кратно дифференцируема в точке y.*

Действительно, если функция f удовлетворяет условиям теоремы, то она принадлежит классу $W^k_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ для любого $p > n$. Согласно теореме работы [3] всякая функция класса $W^k_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ почти всюду k-кратно дифференцируема, откуда и следует доказываемое утверждение.

Теорема 2 не является следствием теоремы 4. Величина δ в теореме 2 зависит от выбранного $y \in U$. В отличие от теоремы 4 в теореме 2 не делается никаких априорных предположений относительно функциональных свойств коэффициентов A_α.

Заключение

К постановке задачи автор пришел в результате изучения работ по дифференциальной геометрии [7, 8] известного специалиста в области прикладной математики профессора Ф. Г. Сиарле. В этих работах используется прием, состоящий в том, что вместе с параметризацией $\theta : \Omega \to \mathbb{R}^3$ поверхности рассматривается отображение Θ трехмерной области, определенное следующим образом. Пусть $\Theta(x_1, x_2, x_3) = \theta(x_1, x_2) + x_3\mathbf{n}(x_1, x_2)$ где $\mathbf{n}(x_1, x_2)$ — единичный вектор нормали к поверхности в точке $\theta(x_1, x_2)$ и $x_3 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Область определения Θ есть множество $\Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Если вектор-функция θ удовлетворяет принятым в дифференциальной геометрии требованиям регулярности, то при достаточно малом ε отображение Θ является гомеоморфизмом (и даже диффеоморфизмом). Естественно поставить вопрос, насколько можно ослабить требования к отображению θ, чтобы отображение Θ еще оставалось гомеоморфизмом. Из доказанного видно, что ослабление классических требований регулярности оказывается не столь уж и значительным.

Автор благодарит М. В. Коробкова за плодотворные обсуждения и Е. Г. Решетняк за помощь в подготовке рукописи к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Об одном обобщении выпуклых поверхностей // Мат. сб. 1956. Т. 40, № 3. С. 381–398.
2. *Бакельман В. Я.* Геометрические методы в теории уравнений с частными производными. М.: Наука, 1965.
3. *Решетняк Ю. Г.* Обобщенные производные и дифференцируемость почти всюду // Мат. сб. 1968. Т. 75, № 3. С. 323–334.
4. *Bojarski B.* Pointwise characterization of Sobolev classes // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2006. V. 255. P. 71–87.
5. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.
6. *Решетняк Ю. Г.* Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1999. Ч. 1, кн. 2.
7. *Ciarlet Ph. G.* An introduction to differential geometry, with applications to elasticity. Heidelberg: Springer-Verl., 2005.
8. *Ciarlet Ph. G., Larsonneur F.* On the recovery of a surface with prescribed first and second fundamental forms // J. Math. Pures Appl. 2002. V. 81. P. 167–195.
9. *Rademacher H.* Über partielle und totale Differentzierbarkeit. I // Math. Ann. 1919. Bd 79. S. 340–359.

Статья поступила 22 апреля 2009 г.

Решетняк Юрий Григорьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
reshetnyak@academ.org