Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 517.98

C^*–АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПОЛУГРУППАМИ С СОКРАЩЕНИЕМ

С. А. Григорян, А. Ф. Салахутдинов

Аннотация. Исследуются C^*-алгебры, порожденные коммутирующим семейством изометрических операторов. Такие алгебры являются естественным обобщением алгебры Теплица. Изучаются *-автоморфизмы и инвариантные идеалы C^*-алгебры, порожденной полугруппой.

Ключевые слова: C^*-алгебра, полугруппа, алгебра Теплица.

Введение

Работа Дугласа [1], посвященная исследованию C^*-алгебр, порожденных однопараметрической полугруппой изометрических операторов, дала толчок развитию C^*-алгебр, порожденных полугруппой (см. [2, 3]). C^*-алгебры, порожденные коммутативной полугруппой с сокращением, можно разбить на два класса: 1) C^*-алгебра, порожденная всеми изометрическими представлениями полугруппы S и обозначаемая через $C^*(S)$ [4]; 2) C^*-алгебра, порожденная левым регулярным изометрическим представлением полугруппы S в алгебру $B(l^2(S))$ всех линейных ограниченных операторов на $l^2(S)$ и обозначаемая через $C^*_r(S)$ (см. [5]). В случае, когда полугруппа S совпадает с полугруппой неотрицательных целых чисел, алгебры $C^*(Z_+)$ и $C^*_r(Z_+)$ изоморфны. В общем случае это не так, например, если $S = Z_+ \setminus \{1\}$ (см. [6]).

Наряду с указанными C^*-алгебрами бурно развивается теория C^*-алгебр, порожденных коммутативной полугруппой эндоморфизмов (см. [7–10]).

В данной работе изучаются C^*-алгебры, порожденные полугруппой и принадлежащие второму классу. Описываются инвариантные идеалы таких алгебр, *-автоморфизмы и AF-подалгебры (см. [11]).

Результаты данной работы частично докладывались на международной конференции, посвященной 90-летию Воронежского государственного университета, 90-летию С. Г. Крейна (Воронеж, 2008) [12]; на семинаре «Операторные алгебры и их приложения» в Казанском государственном университете.

Авторы выражают благодарность всем участникам этого семинара, в особенности Д. Х. Муштари, за полезные консультации. Отдельная благодарность рецензенту данной работы за ряд существенных замечаний, приведших к улучшению ее текста.

§ 1. Необходимые сведения

Пусть G — компактная абелева группа, группа характеров которой изоморфна аддитивной группе Γ, наделенной дискретной топологией. Через χ^a будем обозначать характер группы G, изоморфный элементу a из Γ. Семейство характеров $\{\chi^a,\ a \in \Gamma\}$ образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L^2(G, d\mu)$, где μ — положительная нормированная мера Хаара группы G. Напомним, что скалярное произведение в $L^2(G, d\mu)$ задается в виде

$$(f, g) = \int\limits_G f\bar{g}\, d\mu.$$

Спектром функции f называется множество $\operatorname{Sp} f$, состоящее из тех $a \in \Gamma$, для которых коэффициент Фурье $c_a^f = (f, \chi^a)$ отличен от нуля. Пусть $C(G)$ — алгебра всех непрерывных комплекснозначных функций на G. Отображая функцию f в мультипликативный оператор

$$T_f : L^2(G, d\mu) \to L^2(G, d\mu), \quad T_f h = fh,$$

получим представление алгебры $C(G)$ в алгебру $B(L^2(G, d\mu))$ всех ограниченных линейных операторов на $L^2(G, d\mu)$. При этом выполняется равенство

$$\|T_f\|_\Gamma = \|f\|_\infty,$$

где $\|T_f\|_\Gamma$ — норма оператора T_f и $\|f\|_\infty = \sup\limits_G |f|$. Пусть S — подполугруппа группы Γ. Не теряя общности, можно предположить, что полугруппа S порождает группу Γ, т. е. $\Gamma = \{a - b,\ a, b \in S\}$. Будем также предполагать, что 0 — единичный элемент группы Γ — принадлежит полугруппе S.

Обозначим через H_S^2 подпространство функций из $L^2(G, d\mu)$, спектр которых содержится в полугруппе S. Так как S — полугруппа, гильбертово пространство H_S^2 инвариантно для операторов T_f, где f принадлежит алгебре $A_S = \{f \in C(G) : \operatorname{Sp} f \subset S\}$.

Пусть $P : L^2(G, d\mu) \to H_S^2$ — ортогональный проектор. Определим условное ожидание

$$\Phi_p : B(L^2(G, d\mu)) \to B\bigl(H_S^2\bigr), \quad A \mapsto PAP,$$

$B\bigl(H_S^2\bigr)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H_S^2. C^*-подалгебру алгебры $B\bigl(H_S^2\bigr)$, порожденную элементами $\Phi_p(T_f)$, $f \in C(G)$, будем в дальнейшем называть *C^*-алгеброй, порожденной полугруппой* S, и обозначать через Θ_S.

В случае, когда полугруппа S изоморфна полугруппе неотрицательных целых чисел, алгебра Θ_S есть алгебра Тёплица [13].

Везде в дальнейшем оператор $PT_{\chi^a}P$ будем обозначать через T_a для всех a из S. Очевидно, что

$$T_a(h) = \sum_{b \in \Gamma} c_b^h \chi^{a+b}, \quad c_b^h = (h, \chi^b),$$

для всех h из H_S^2, т. е. гильбертово пространство H_S^2 инвариантно для оператора T_a, который является изометрическим оператором на H_S^2. Обозначим через T_a^*, $a \in S$, оператор в $B\bigl(H_S^2\bigr)$, сопряженный к оператору T_a.

На полугруппе S введем частичный порядок: $a < b$, если существует такой элемент d в S, что $a + d = b$. Тогда $T_a^* T_b = T_d$. Действительно,

$$T_a^* T_b = T_a^* T_a T_d = T_d.$$

Теорема 1.1. (a) *Алгебра Θ_S совпадает с C^*-подалгеброй алгебры $B(H_S^2)$, порожденной всеми операторами T_a и T_a^*, когда a пробегает S.*

(b) $\|\Phi_p(T_f)\|_S = \|f\|_\infty$ *для всех f из $C(G)$.*

Доказательство. (a) Покажем сначала, что если $c = a - b$, где $b, a \in S$, $c \in \Gamma$, то $PT_{\chi^c}P = T_b^* T_a$. Для этого достаточно показать, что для любого $d \in S$ выполняется равенство $PT_{\chi^c}P(\chi^d) = T_b^* T_a(\chi^d)$. Пусть $d \in S$ такой элемент, что $b < a + d$, т. е. $a + d = b + l$, $l \in S$. Тогда $T_b^* T_a \chi^d = T_b^* T_{a+d} \chi^0 = T_l \chi^0 = \chi^l$. С другой стороны, $PT_{\chi^c}P\chi^d = PT_{\chi^c}\chi^d = P\chi^{c+d} = P\chi^l = \chi^l$.

Пусть теперь $b \not< a + d$. Тогда элемент $l = a + d - b \in \Gamma$ не принадлежит полугруппе S. Поэтому $PT_{\chi^c}P\chi^d = PT_{\chi^c}\chi^d = P\chi^l = 0$ и $(T_b^* T_a \chi^d, \chi^k) = (\chi^{a+d}, \chi^{k+b}) = 0$, так как ни при каких k из S не выполняется равенство $a + d = b + k$. Таким образом, равенство $PT_{\chi^c}P = T_b^* T_a$ доказано.

Пусть $f \in C(G)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся элементы $a_1, \ldots, a_n$ в группе Γ и комплексные числа $c_1, \ldots, c_n$ такие, что $\left\| f - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \chi^{a_i} \right\|_\infty < \varepsilon$. Отсюда

$$\left\| T_f - \sum_{i=1}^{n} c_i T_{\chi^{a_i}} \right\|_\Gamma < \varepsilon.$$

Так как P — ортопроектор на H_S^2, то

$$\left\| P \left(T_f - \sum_{i=1}^{n} c_i T_{\chi^{a_i}} \right) P \right\|_S = \left\| P \left(T_f - \sum_{i=1}^{n} c_i T_{\chi^{a_i} z} \right) P \right\|_\Gamma \le \left\| T_f - \sum_{i=1}^{n} c_i T_{\chi^{a_i}} \right\|_\Gamma < \varepsilon,$$

где $\|\cdot\|_S$ — норма в H_S^2. Поскольку $PT_{\chi^{a_i}}P = T_{b_i}^* T_{d_i}$, $a_i = d_i - b_i$, имеем

$$\left\| PT_f P - \sum_{i=1}^{n} c_i T_{b_i}^* T_{d_i} \right\|_S = \left\| PT_f P - \sum_{i=1}^{n} c_i PT_{\chi^{a_i}} P \right\|_\Gamma < \varepsilon.$$

Следовательно, оператор $PT_f P$ принадлежит C^*-алгебре, порожденной оператором $T_a, a \in S$. Утверждение (a) доказано.

(b) Линейные комбинации характеров χ^{a_i}, $a_i \in \Gamma$, плотны в $C(G)$. Поэтому достаточно доказать (b) для линейных комбинаций характеров. Пусть $q = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \chi^{a_i}$. Тогда $\|T_q\|_\Gamma = \|q\|_\infty$. Для $\varepsilon > 0$ найдется конечная линейная комбинация $q' = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i' \chi^{b_i}$ в $L^2(G, d\mu)$ такая, что $\sum\limits_{i=1}^{n} |c_i'|^2 = 1$ ($\|q'\| = 1$) и $\|T_q(q')\| > \|T_q\| - \varepsilon$.

Пусть $d \in S$ таков, что $d + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{m} b_i$ принадлежит полугруппе S. Тогда $\|T_q \chi^d q'\|_\Gamma = \|T_q q'\|$ и

$$\|\Phi_p(T_q)\|_S > \|PT_q(\chi^d q')\|_\Gamma = \|T_q(\chi^d q')\|_\Gamma > \|q\|_\infty - \varepsilon. \qquad \square$$

§ 2. Мономы

Конечное произведение элементов T_a и T_a^*, $a \in S$, будем называть *мономами*. Так как $T_a T_b = T_{a+b}$, то каждый моном можно представить в виде $T_{a_1} T_{a_2}^* T_{a_3} \ldots T_{a_n}^*$, где $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — элементы из S и n четное. Отметим, что $T_0 = I$ — единичный элемент в Θ_S.

Индексом монома $V = T_{a_1}T^*_{a_2}T_{a_3}\dots T^*_{a_n}$, если n четное, будем называть элемент группы Γ, равный $(a_2+a_4+\dots+a_n)-(a_1+a_3+\dots+a_{n-1})$. Если n нечетное, то индекс будем считать равным $(a_2+a_4+\dots+a_{n-1})-(a_1+a_3+\dots+a_n)$.

Из теоремы 1.1 немедленно получаем, что линейная комбинация мономов плотна в алгебре Θ_S.

Лемма 2.1. *Индекс монома не зависит от представлений этого монома в виде произведения элементами T_a и T^*_a, когда a пробегает S.*

Доказательство. Пусть d такой элемент из S, что $V\chi^d \neq 0$. Тогда из свойств операторов T_a и T^*_a имеем, что $V\chi^d = \chi^c$, где $c = d + (a_1+a_3+\dots+a_{n-1}) - (a_2+a_4+\dots+a_n) = d - \operatorname{ind} V$. Отсюда следует, что индекс монома не зависит от количества сомножителей в представлении этого монома. $\square$

Индекс монома V будем обозначать через $\operatorname{ind} V$. Очевидно, что

$$\operatorname{ind}(V_1\cdot V_2) = \operatorname{ind} V_1 + \operatorname{ind} V_2.$$

Лемма 2.2. *Моном V является ортопроектором тогда и только тогда, когда* $\operatorname{ind} V = 0$ (0 — *единичный элемент группы* Γ).

Доказательство. Пусть V — ортопроектор. Покажем, что $\operatorname{ind} V = 0$. Если $V\chi^d \neq 0$ для некоторого d, то $V\chi^d = \chi^c$, где $c = d - \operatorname{ind} V$. Обратно, пусть $\operatorname{ind} V = 0$. Тогда $V\chi^d = 0$ либо $V\chi^d = \chi^d$. Следовательно, V — ортопроектор. $\square$

Пусть L — подалгебра в Θ_S, состоящая из конечных линейных комбинаций мономов. Зафиксируем α в G и определим автоморфизм σ_α на L, полагая на мономах $\sigma_\alpha(V) = \chi^d V$, где $d = \operatorname{ind} V$, и продолжим по линейности на линейные комбинации мономов.

Теорема 2.1. *Отображение $\sigma_\alpha : L \to L$ можно продолжить до инволютивного автоморфизма на алгебре Θ_S.*

Доказательство. Гильбертово пространство H^2_S инвариантно относительно сдвигов элементами группы G. Поэтому можно определить автоморфизм σ_α на $B\big(H^2_S\big)$, полагая

$$\sigma_\alpha(A)(f) = A(f_\alpha),$$

где $f_\alpha(\beta) = f(\alpha\beta)$. Тогда $\sigma_\alpha(T_a) = \chi^a(\alpha)T_a$. Поэтому $\sigma_\alpha(V) = \chi^d V$. $\square$

Следствие. *Существует равномерно непрерывное представление группы G в группе автоморфизмов алгебры Θ_S.*

Доказательство. Данное представление (обозначим его через Φ) строится следующим образом: $\Phi : G \to \operatorname{Aut}\Theta_S$, $\alpha \mapsto \sigma_\alpha$. $\square$

§ 3. Спектр

Обозначим через $\Theta_{S,d}$, $d \in \Gamma$, множество тех элементов из Θ_S, которые можно приблизить линейными комбинациями мономов индекса d.

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 3.1. (a) $\Theta_{S,0}$ — C^* *-подалгебра алгебры* Θ_S.

(b) $\Theta_{S,d}\cdot\Theta_{S,l} = \Theta_{S,d+l}$.

(c) $\Theta_{S,d}$ *является* $\Theta_{S,0}$*-модулем.*

(d) *Если S — счетное множество, то $\Theta_{S,0}$ — коммутативная* AF*-алгебра. В общем случае $\Theta_{S,0}$ —* AF*-алгебра в локальном смысле.*

(e) $\Theta_{S,d} = T_a^*\Theta_{S,0}T_b$, где $d = b - a$.

(f) *Для любого* b *из* S *характер* χ^b *является собственным вектором для операторов из* $\Theta_{S,0}$.

Теорема 3.1. *Любой элемент* A *из* Θ_S *можно однозначно представить в виде формального ряда*

$$A \sim \sum_{a\in\Gamma} A_a, \quad A_a \in \Theta_{S,a}.$$

Доказательство. Отметим, что A_a однозначно определяется следующим образом:

$$A_a = \int\limits_G \sigma_\alpha(A)\chi^{-a}(\alpha)\,d\mu(\alpha)$$

и $\sigma_\beta(A_a) = \chi^a(\beta)A_a$. Покажем единственность данного разложения. Для этого покажем, что для любого $A \neq 0$ из Θ_S существует $a \in \Gamma$ такой, что $A_a \neq 0$. Пусть $A_a = 0$ для любого $a \in \Gamma$, т. е.

$$\int\limits_G \sigma_\beta(A)\chi^{-a}(\beta)\,d\mu(\beta) = 0$$

для любого $a \in \Gamma$. Покажем, что в этом случае $A = 0$. Для этого докажем, что $\sigma_\beta(A) = 0$ для любого $\beta \in G$. Пусть существует $\beta_0 \in G$ такое, что $\sigma_{\beta_0}(A) \neq 0$. Тогда существует ненулевой функционал F_0 из множества всех функционалов алгебры Θ_S такой, что $F_0(\sigma_{\beta_0}(A)) \neq 0$. Рассмотрим функцию $g(\beta) = F_0(\sigma_\beta(A)) \neq 0$. Имеем

$$0 = F_0(0) = F_0\Bigg(\int\limits_G \sigma_\beta(A)\chi^{-a}(\beta)\,d\mu(\beta)\Bigg) = \int\limits_G g(\beta)(A)\chi^{-a}(\beta)\,d\mu(\beta) = 0,$$

следовательно, $g(\beta)$=0, т. е. $F_0(\sigma_\beta(A)) = 0$ для любого β из G, а значит, $F_0(\sigma_{\beta_0}(A)) = 0$. Тем самым для любого F имеем $F(\sigma_{\beta_0}(A)) = 0$ и, значит, $\sigma_{\beta_0}(A) = 0$. Отсюда $\sigma_\beta(A)$=0. $\square$

Спектром элемента A из Θ_S называется множество тех a из Γ, для которых $A_a \neq 0$.

Пример 3.1. Спектр элемента T_a из Θ_S есть элемент $\{a\}$ из Γ.

Теорема 3.2. *Спектр отображения* $\Phi : G \to \operatorname{Aut}\Theta_S$, *определенного в следствии из теоремы* 2.1, *совпадает с* Γ.

Доказательство. Спектр отображения Φ определяется так:

$$\operatorname{sp}\Phi = \bigcup_{A\in\Theta_S} \operatorname{sp} A,$$

где $\operatorname{sp} A = \{a \in \Gamma : A_a \neq 0\}$, $A_a = \int\limits_G \sigma_\alpha(A)\chi^{-a}(\alpha)\,d\mu(\alpha)$. Любой элемент $c \in \Gamma$ представляется в виде $c = a - b$ по определению группы Γ. Рассмотрим элемент $T_aT_b^*$ из алгебры $C^*(S)$. Легко проверяется, что $(T_aT_b^*)_c = T_aT_b^*$. $\square$

§ 4. Инвариантные идеалы

Идеал I в алгебре Θ_S назовем *инвариантным*, если для любого α из G выполняется $\sigma_\alpha(I) = I$. Опишем некоторые свойства таких идеалов.

Лемма 4.1. *Пусть I — инвариантный идеал алгебры Θ_S. Тогда*

(a) *$I_0 = \Theta_{S,0} \cap I$ — идеал в алгебре $\Theta_{S,0}$,*

(b) *$I_a = \Theta_{S,a} \cap I$ есть $\Theta_{S,0}$-модуль для каждого $a \in \Gamma$,*

(c) *каждый элемент $A \in I$ однозначно представляется в виде формального ряда*

$$A \sim \sum_{a \in \Gamma} A_a, \quad A_a \in I_a.$$

Доказательство. (a) Очевидно. Утверждение (b) следует из леммы 3.1(c), (c) — из теоремы 3.1. $\square$

Теорема 4.1. *Пусть I, J — два инвариантных идеала алгебры Θ_S. Эти идеалы совпадают тогда и только тогда, когда $I_0 = J_0$, где $J_0 = \Theta_{S,0} \cap J$.*

Доказательство. Для доказательства используем равенство $\sigma_\alpha(I) = I$ и лемму 3.1(e). Аналогично для идеала J. $\square$

Гранью в полугруппе S назовем подполугруппу S_0 такую, что если $a + b \in S_0$, где a, b из S, то $a, b \in S_0$.

Будем обозначать через $B(S)$ C^*-подалгебру алгебры Θ_S, порожденную операторами вида uu^*, где u — некоторый моном. Пусть $\Theta^0 = \{A \in \Theta_S : \sigma_\alpha(A) = A\}$.

Лемма 4.2. *Имеет место равенство $\Theta^0 = B(S)$.*

Доказательство. Очевидно, что $B(S) \subset \Theta^0$, так как $\sigma_\alpha(T_a T_a^*) = T_a T_a^*$. Докажем включение $\Theta^0 \subset B(S)$ индукцией по количеству множителей элемента из Θ^0.

1. $T_{a_1} T_{a_2}^* \in \Theta^0$. Тогда $\sigma_\alpha(T_{a_1} T_{a_2}^*) = T_{a_1} T_{a_2}^*$ и, следовательно, $a_1 - a_2 = 0$, т. е. $a_1 = a_2$.

2. $T_{a_1} T_{a_2}^* T_{a_3} \in \Theta^0$. Тогда $\sigma_\alpha(T_{a_1} T_{a_2}^* T_{a_3}) = T_{a_1} T_{a_2}^* T_{a_3}$. Имеем $a_1 - a_2 + a_3 = 0$ и, значит, $a_2 = a_1 + a_3$. Отсюда $T_{a_2} = T_{a_1 + a_3} = T_{a_1} T_{a_3}$ и $T_{a_2}^* = T_{a_3}^* T_{a_1}^*$. Получаем, что $T_{a_1} T_{a_2}^* T_{a_3} = T_{a_1} T_{a_3}^* T_{a_1}^* T_{a_3} = T_{a_1} T_{a_1}^*$.

3. $T_{a_1} T_{a_2}^* T_{a_3} T_{a_4}^* \in \Theta^0$. Аналогично п. 2 выражаем элемент $a_3 = a_2 + a_4 - a_1$. Тогда $T_{a_1} T_{a_2}^* T_{a_3} T_{a_4}^* = T_{a_1} T_{a_1}^* T_{a_4} T_{a_4}^*$. $\square$

В дальнейшем через $[I - T_a T_a^*]$ будем обозначать идеал, порожденный элементом $I - T_a T_a^*$, и через I_{S_0} — идеал $\overline{\bigcup_{a \in S_0} [I - T_a T_a^*]}$ (черта сверху означает замыкание).

Теорема 4.2. (a) *Если грань S_0 не содержит никаких других граней, то для любого $a \in S_0 \setminus \{0\}$ идеал I_{S_0} совпадает с идеалом $[I - T_a T_a^*]$.*

(b) *Пусть S_0 — грань в S. Тогда для любого b из $S \setminus S_0$ проектор $I - T_b T_b^*$ не принадлежит идеалу I_{S_0}.*

Доказательство. (a) Пусть $S_0 \subset S$ — грань, удовлетворяющая условию теоремы. Пусть $b_0 \in S_0$, $b_0 \neq 0$. Рассмотрим полугруппу $S_1 = \{c \in S : c < mb_0, m \in \mathbb{N}\}$. Так как элемент mb_0 принадлежит грани S_0, то S_1 есть грань в S_0. Поскольку S_0 не содержит других граней, то $S_1 = S_0$. Отсюда для любых $a, b \in S_0 \setminus \{0\}$ найдется натуральное число n такое, что $b < na$. Следовательно,

$T_{na} = T_d T_b$, где $b+d = na$. Поэтому $T_b = T_d^* T_{na}$. Обозначим I_a=[I-$T_a T_a^*$], $a \in S_0$. Имеем

$$I - T_b T_b^* = I - T_d^* T_{na} T_{na}^* T_d = T_d^*(I - T_{na} T_{na}^*) T_d \in I_a.$$

Значит, $I_b \subset I_a$. Так как a, b — произвольные элементы из S, то $I_b = I_a$.

(b) Множество $J = S \setminus S_0$ является идеалом в полугруппе S, т. е. для любых $b \in J$, $c \in S$ элемент $b + c$ принадлежит J. Действительно, так как S_0 является гранью, из условия $b+c \in S_0$ следует, что элементы b и c принадлежат S_0. Пришли к противоречию.

Пусть теперь $I - T_b T_b^*$ принадлежит идеалу I_{S_0}. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — элементы из S_0 такие, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} U_i (I - T_{a_i} T_{a_i}^*) V_i - (I - T_b T_b^*) \right\| < \varepsilon,$$

где V_i — некоторые мономы из Θ_S.

Пусть $d_i = \operatorname{ind} V_i$, $1 \leq i \leq n$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений: либо элемент $ma - d_i$ не принадлежит S ни при каких натуральных m, либо найдутся такие натуральные числа m_i, что элементы $m_i a - d_i = b_i$ принадлежат полугруппе S. Поэтому из определения индекса монома следует, что либо $V_i(\chi^{ma}) = 0$ для всех натуральных m и всех i из некоторого подмножества $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, либо $V_i(\chi^{m_i a}) = \chi^{b_i}$ для всех i из $\{i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n\}$ — дополнения к $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ в $\{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть $m = \sup\{m_j : j \in \{i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n\}\}$. Тогда $V_i(\chi^{(m+1)a}) = 0$ для всех i из $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ и $V_i(\chi^{(m+1)a}) = \chi^{a+c_i}, c_i \in S$, для всех i из $\{i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n\}$.

Поскольку a принадлежит S_0, имеем $T_b^*(\chi^{ma}) = 0$ для любого натурального числа m. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n} U_i (I - T_{a_i} T_{a_i}^*) V_i (\chi^{(m+1)a}) = \sum_{j=k+1}^{n} U_{i_j} (I - T_{a_{i_j}} T_{a_{i_j}}^*)(\chi^{a+c_{i_j}}).$$

Поскольку $T_{a_i} T_{a_i}^*(\chi^{a+b}) = \chi^{a+b}$ для любых $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $b \in S$, то

$$\sum_{j=k+1}^{n} U_{i_j} (I - T_{a_{i_j}} T_{a_{i_j}}^*)(\chi^{a+c_{i_j}}) = 0.$$

С другой стороны, $(I - T_b T_b^*)(\chi^{(m+1)a}) = \chi^{(m+1)a}$, так как элемент $(m+1)a$ принадлежит S_0. Таким образом,

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} U_i (I - T_{a_i} T_{a_i}^*) V_i - (I - T_b T_b^*) \right) (\chi^{(m+1)a}) \right\| = \|\chi^{(m+1)a}\| = 1.$$

Пришли к противоречию с неравенством

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} U_i (I - T_{a_i} T_{a_i}^*) V_i - (I - T_b T_b^*) \right\| < \varepsilon. \qquad \square$$

Следствие. *Если алгебра Θ_S имеет только один инвариантный идеал, то в S нет нетривиальных граней, отличных от S.*

Доказательство вытекает из п. (b) предыдущей теоремы. $\square$

Теорема 4.3. *В C^*-алгебре, порожденной полугруппой с архимедовым порядком, существует только один нетривиальный инвариантный идеал.*

Доказательство. Предположим, что $a < b$ для некоторых $a, b \in S$. Тогда $[I - T_a T_a^*] \subset [I - T_b T_b^*]$. Так как S — полугруппа с архимедовым порядком, существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $ka > b$. Значит, $[I - T_{ka} T_{ka}^*] \supset [I - T_b T_b^*]$. Поскольку $[I - T_a T_a^*] = [I - T_{ka} T_{ka}^*]$, имеем $[I - T_a T_a^*] = [I - T_b T_b^*]$. $\square$

Следствие. *В алгебре Тёплица существует только один нетривиальный инвариантный идеал.*

Приведем несколько примеров.

Пример 4.1. Рассмотрим в качестве S множество всех положительных вещественных чисел R_+. Ясно, что в такой полугруппе существует только одна нетривиальная грань — сама S. Очевидно, что в C^*-алгебре, порожденной R_+, существует только один нетривиальный инвариантный идеал (см. теорему 4.3).

Следующий пример показывает, что количество нетривиальных инвариантных идеалов может быть больше, чем количество нетривиальных граней.

Пример 4.2. Рассмотрим в качестве S прямую сумму $Z_+ \oplus Z_+$. C^*-алгебра, порожденная такой полугруппой, совпадает с тензорным произведением алгебры Тёплица на себя $T \otimes T$. Очевидно, что в полугруппе $Z_+ \oplus Z_+$ существуют три нетривиальных грани: $\{S\}$, $\{(0,0), (1,0), (2,0), \dots, (n,0), \dots\}$, $\{(0,0), (0,1), (0,2), \dots, (0,n), \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что в $\Theta_{Z_+ \oplus Z_+}$ существуют четыре инвариантных идеала. Для этого докажем, что элемент $I - T_{(0,1)} T_{(0,1)}^*$ не принадлежит идеалу, порожденному элементом $I - T_{(1,0)} T_{(1,0)}^*$ (а также $I - T_{(1,0)} T_{(1,0)}^* \notin [I - T_{(0,1)} T_{(0,1)}^*]$).

Докажем от противного. Пусть $I - T_{(0,1)} T_{(0,1)}^* \in [I - T_{(1,0)} T_{(1,0)}^*]$. Тогда

$$\Big\| \sum_i u_i (I - T_{(1,0)} T_{(1,0)}^*) v_i - (I - T_{(0,1)} T_{(0,1)}^*) \Big\| < \varepsilon,$$

где u_i, v_i — некоторые мономы из Θ_S. Данное неравенство должно выполняться для любых характеров $\chi^{(a,b)}$, в том числе и для $\chi^{(1,0)}$. Подставляя последний в вышеуказанное неравенство, получаем

$$\Big\| \sum_i u_i (I - T_{(1,0)} T_{(1,0)}^*) v_i (\chi^{(1,0)}) - \chi^{(1,0)} \Big\| < \varepsilon.$$

Если $v_i(\chi^{(1,0)}) \neq \chi^{(0,x)}$ для любого i и произвольного $x \in Z_+$, то $\|0 - \chi^{(1,0)}\| < \varepsilon$; противоречие. Если же $v_i(\chi^{(1,0)}) = \chi^{(0,x)}$ для некоторых i и $x \in Z_+$, то в неравенство

$$\Big\| \sum_i a_i (I - T_{(1,0)} T_{(1,0)}^*) b_i - (I - T_{(0,1)} T_{(0,1)}^*) \Big\| < \varepsilon$$

вместо $\chi^{(1,0)}$ подставим $\chi^{(2,0)}$ и получим требуемый результат.

Нетрудно проверить, что и, например, элемент $I - T_{(1,1)} T_{(1,1)}^*$ не принадлежит идеалу $[I - T_{(1,0)} T_{(1,0)}^*]$ (и вместе с тем $I - T_{(1,0)} T_{(1,0)}^* \notin [I - T_{(1,1)} T_{(1,1)}^*]$). Также ясно, что

$$[I - T_{(1,1)} T_{(1,1)}^*] = [I - T_{(x,y)} T_{(x,y)}^*],$$

где $x, y \neq 0$, $x, y \in Z_+$. Четвертым идеалом является идеал, порожденный элементом $([I - T_{(0,1)} T_{(0,1)}^*])([I - T_{(1,0)} T_{(1,0)}^*])$. Этот идеал совпадает с идеалом компактных операторов в алгебре всех линейных ограниченных операторов на гильбертовом пространстве $l^2(Z_+ \oplus Z_+)$.

Пример 4.3. Рассмотрим в качестве полугруппы S следующее множество: $Z_+ \oplus Z_+ \setminus \{(0,n),(m,0)\}$, где $n,m \neq 0$, $m,n \in Z_+$. Очевидно, что в данной полугруппе единственная грань — сама S. Но в C^*-алгебре, порожденной этой полугруппой, существуют три однородных идеала: $[I-\hat{T}\hat{T}^*]$, $[I-\check{T}\check{T}^*]$ и сама алгебра, где $\hat{T} \equiv T^*_{(1,1)}T_{(2,1)}$, $\check{T} \equiv T^*_{(1,1)}T_{(1,2)}$, что доказывается, как в примере 4.2.

§ 5. Центр алгебры Θ_S

В данном параграфе покажем, что алгебра Θ_S имеет нетривиальный центр тогда и только тогда, когда полугруппа S содержит нетривиальную подгруппу. Используя это утверждение, можно характеризовать *-замыкание алгебры Θ_S в $B\big(H^2_S\big)$. Центр алгебры Θ_S обозначим через $Z(\Theta_S)$.

Теорема 5.1. *Центр алгебры Θ_S порожден некоторой подгруппой S' в полугруппе S.*

Доказательство. Заметим сначала, что центр инвариантен относительно автоморфизма $\sigma_\alpha : \Theta_S \to \Theta_S$, определенного в теореме 2.1. Действительно, возьмем некоторый элемент A из $Z(\Theta_S)$. Так как σ_α — автоморфизм, то для любого элемента B из алгебры Θ_S имеем $B = \sigma_\alpha(C)$ для некоторого $C \in \Theta_S$. Тогда

$$\sigma_\alpha(A)B = \sigma_\alpha(A)\sigma_\alpha(C) = \sigma_\alpha(AC) = \sigma_\alpha(CA) = B\sigma_\alpha(A).$$

Итак, центр алгебры Θ_S инвариантен относительно автоморфизма σ_α.

По теореме 3.1 любой элемент $A \in \Theta_S$ можно представить в виде формального ряда $A \sim \sum\limits_{a\in\Gamma} A_a$, где $A_a = \int\limits_G \sigma_\alpha(A)\chi^{-a}(\alpha)\,d\mu(\alpha)$ и $A_a \in \Theta_{S,a}$. Пусть A — некоторый элемент из $Z(\Theta_S)$. Так как $\sigma_\alpha(A) \in Z(\Theta_S)$, то A_a принадлежит $Z(\Theta_S)$. Отсюда следует, что $Z(\Theta_S)_a = \{A_a : A \in Z(\Theta_S)\}$ содержится в $Z(\Theta_S)$.

Покажем теперь, что $Z(\Theta_S)_0 = CI$, где I — единичный элемент алгебры Θ_S. Действительно, пусть $A \in Z(\Theta_S)_0$ и $b_1, b_2 \in S$. Согласно лемме 3.1(f) $A(\chi^{b_1}) = \lambda_1\chi^{b_1}$ и $A(\chi^{b_2}) = \lambda_2\chi^{b_2}$. Так как $A \in Z(\Theta_S)$, имеет место следующее равенство: $T^*_{b_1}T_{b_2}A = AT^*_{b_1}T_{b_2}$, значит, $T^*_{b_1}T_{b_2}A(\chi^{b_1}) = AT^*_{b_1}T_{b_2}(\chi^{b_1})$. Но $T^*_{b_1}T_{b_2}A(\chi^{b_1}) = \lambda_1\chi^{b_2}$, а $AT^*_{b_1}T_{b_2}(\chi^{b_1}) = \lambda_2\chi^{b_2}$. Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2$. В силу произвольности b_1, b_2 получаем, что $A = \lambda I$.

Докажем, что $Z(\Theta_S)_a = CU$, где U — некоторый унитарный элемент. Пусть A — некоторый элемент из $Z(\Theta_S)_a$ такой, что $\|A\| = 1$. Тогда $A^*A \in Z(\Theta_S)_0$ и $A^*A = I$. Аналогично $AA^* = I$. Следовательно, A — унитарный элемент. Пусть теперь A_1, A_2 — некоторые унитарные элементы из $Z(\Theta_S)_a$. Тогда $A_1^*A_2 = \lambda I$, где $|\lambda| = 1$. Отсюда $A_2 = \lambda A_1$. Таким образом, $Z(\Theta_S)_a = CU$, где U — некоторый унитарный элемент из Θ_S.

Докажем, что если $Z(\Theta_S)_a \neq \{0\}$, $a \in S$, то T_a — унитарный элемент и $Z(\Theta_S)_a = CT_a$. Действительно, пусть U — унитарный элемент из $Z(\Theta_S)_a \neq \{0\}$. Согласно лемме 3.1(e) $U = V_0T_a$ и $U^* = T_a^*V_0^*$. Если T_a — не унитарный элемент в Θ_S, то из изометричности этого оператора следует существование такого $b \in S$, что $T_a^*(\chi^b) = 0$. Тогда

$$U^*(\chi^b) = T_a^*V_0^*(\chi^b) = T_a^*(\lambda\chi^b) = 0.$$

Пришли к противоречию, так как U^* — унитарный оператор. Следовательно, T_a — унитарный элемент. Поэтому T_a^* также унитарен и существует элемент $-a$ в S такой, что $T_a^* = T_{-a}$. $\square$

Часть результатов данной работы (без доказательств) была анонсирована в кратком сообщении [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Douglas R. G.* On the C^*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries // Acta Math. 1972. V. 128. P. 143–152.

2. *Phillips J. Raeburn I.* Semigroups of isometries, Toeplitz algebras and twisted crossed products // Integral Equations Oper. Theory. 1993. V. 17, N 4. P. 579–602.

3. *Kenneth R. D., Popescu G.* Noncommutative disc algebras for semigroups // Canad. J. Math. 1998. V. 50, N 2. P. 290–311.

4. *Murphy G.* Crossed products of C^*-algebras by semigroups of automorphisms // Proc. London Math. Soc. 1994. V. 68, N 3. P. 423–448.

5. *Jang S. Y.* Reduced crossed products by semigroups of automorphisms // Korean Math. Soc. 1999. V. 36, N 1. P. 97–107.

6. *Jang S. Y.* Generalized Toeplitz algebra of a certain non-amenable semigroup // Bull. Korean Math. Soc. 2006. V. 43, N 2. P. 333–341.

7. *Арзуманян В. А., Вершик А. М.* Фактор-представления скрещенного произведения коммутативной C^*-алгебры и полугруппы ее эндоморфизмов // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 3. С. 513–517.

8. *Arzumanian V. A., Vershik A. M.* Star algebras associated with endomorphisms // Operator algebras and group representations: Proc. Int. conf., Neptun/Rom, 1980. Boston: Pitman, 1984. V. 1. P. 17–27. (Monogr. Stud. Math.; V. 17).

9. *Exel R., Vershik A.* C^*-algebras of irreversible dynamical systems. arXiv: math/0203185v1 [math.OA] 19 Mar 2002.

10. *Grigoryan S., Kuznetsova A.* C^*-algebras generated by mappings // Lobachevskii J. Math. 2008. V. 29, N 1. P. 5–8.

11. *Bratteli O.* Inductive limits of finite dimensional C^*-algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 171. P. 195–234.

12. *Салахутдинов А. Ф.* C^*-алгебры, порожденные полугруппами // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна, 2008: Тез. докл. Воронеж: ВорГУ, 2008. С. 120–121

13. *Мерфи Д.* C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.

14. *Григорян С. А., Салахутдинов А. Ф.* C^*-алгебры, порожденные полугруппами // Изв. вузов. 2009. № 10. С. 68–71.

Статья поступила 20 января 2009 г.

Григорян Сурен Аршакович, Салахутдинов Айрат Фаридович
Казанский гос. энергетический университет, кафедра высшей математики,
ул. Красносельская 51, Казань 420066
gsuren@mail.ru, salahutdinov@mail.ru