Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 512.54

РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА, ИЗОСПЕКТРАЛЬНАЯ ГРУППЕ $\mathrm{S}_4(3)$

А. В. Заварницин

Аннотация. Построена разрешимая группа G порядка 5 648 590 729 620, множество порядков элементов которой совпадает с таким же множеством группы $\mathrm{S}_4(3)$. Тем самым завершена классификация конечных простых групп, изоспектральных разрешимым группам.

Ключевые слова: конечная простая группа, порядок элемента, распознаваемость.

1. Введение

Множество порядков элементов конечной группы G обозначается через $\omega(G)$ и называется ее *спектром.* Конечные группы G и H *изоспектральны*, если $\omega(G) = \omega(H)$.

В работе [1] показано, что если неабелева простая группа G изоспектральна разрешимой группе, то $G \cong \mathrm{L}_3(3), \mathrm{U}_3(3), \mathrm{S}_4(3), \mathrm{A}_{10}$. Существование разрешимых групп, изоспектральных группам $\mathrm{L}_3(3)$ и $\mathrm{U}_3(3)$, доказано в [2, 3]. Из [4] следует, что не существует разрешимой группы, изоспектральной группе A_{10}. Таким образом, проблема оставалась открытой только для группы $\mathrm{S}_4(3)$. Главным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует конечная разрешимая группа, изоспектральная простой группе* $\mathrm{S}_4(3)$.

Разрешимая группа из теоремы 1 построена как группа матриц 17×17 над полем $\mathbb{F}_3$ из трех элементов. Эта группа имеет порядок

$$5\,648\,590\,729\,620 = 2^2 \cdot 3^{24} \cdot 5$$

и, по всей видимости, является наименьшей рассматриваемой группой. Хотя доказательства, изложенные в этой работе, не зависят от компьютерных вычислений, первое свидетельство в пользу существования такой группы получено с использованием пакета компьютерной алгебры GAP [5].

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Конечная простая неабелева группа G изоспектральна разрешимой группе тогда и только тогда, когда* $G \cong \mathrm{L}_3(3), \mathrm{U}_3(3), \mathrm{S}_4(3)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00322), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–344.2008.1), Фонда содействия отечественной науке (грант от 2009 г.); АВЦП Минобразования России «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/419).

2. Предварительные результаты

Спектр $\omega(G)$ группы G содержит все делители каждого из своих элементов и тем самым однозначно определяется множеством $\mu(G)$ своих максимальных по делимости элементов. Из [6] вытекает, что

$$\mu(\mathrm{S}_4(3)) = \{5, 9, 12\}. \tag{1}$$

Нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 1. *Пусть*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ . & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ . & . & 1 & x_3 & y_3 \\ . & . & . & 1 & x_4 \\ . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

— верхняя унитреугольная матрица размера 5×5 *над (не обязательно коммутативным) кольцом характеристики* 3*, где точки обозначают нули. Тогда* $X^9 = 1$*, и* $|X| < 9$ *в том и только в том случае, когда*

$$x_1x_2x_3 = 0, \quad x_2x_3x_4 = 0, \quad x_1x_2y_3 + x_1y_2x_4 + y_1x_3x_4 = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что

$$X^3 = \begin{pmatrix} 1 & . & . & z_1' & t_1' \\ . & 1 & . & . & z_2' \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 \end{pmatrix},$$

где $z_1' = x_1x_2x_3$, $z_2' = x_2x_3x_4$, $t_1' = x_1x_2y_3 + x_1y_2x_4 + y_1x_3x_4$. Отсюда следует требуемое. $\square$

Пусть G — группа, K — поле и U_1, U_2, U_3 — правые KG-модули. Напомним, что K-билинейное отображение $\varphi : U_1 \times U_2 \to U_3$ называется *сбалансированным*, если

$$\varphi(u_1g, u_2g) = \varphi(u_1, u_2)g$$

для всех $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, $g \in G$. Хорошо известно универсальное свойство тензорного произведения KG-модулей, состоящее в том, что всякое сбалансированное отображение факторизуется через отображение «$\otimes$», т. е. существует единственный гомоморфизм модулей $\widetilde{\varphi} : U_1 \otimes U_2 \to U_3$ такой, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & U_1 \otimes U_2 \arrow[dr, dotted, "\widetilde{\varphi}"] & \\ U_1 \times U_2 \arrow[ur, "\otimes"] \arrow[rr, "\varphi"] & & U_3 \end{tikzcd} \tag{3}$$

Напомним также, что для KG-модуля U его внешним квадратом $\wedge^2 U$ является фактор-модуль $U \otimes U$ по подмодулю, порожденному всеми элементами вида $u \otimes u$, $u \in U$.

Начиная с этого места все вводимые обозначения будут фиксированы до конца текста.

Определим следующие матрицы 4×4 над полем $\mathbb{F}_3$:

$$a = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ . & 1 & . & . \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Заметим, что

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0. \tag{5}$$

Пусть $F = \langle a, b \rangle$. Тогда F является группой Фробениуса вида $5 : 4$, которая изоморфна абстрактной группе

$$\langle a, b \mid a^5 = b^4 = 1, a^b = a^2 \rangle, \tag{6}$$

а (4) является ее матричным представлением, соответствующим простому правому $\mathbb{F}_3F$-модулю

$$V = \langle v \mid vb = v,\ v(1 + a + a^2 + a^3 + a^4) = 0 \rangle \tag{7}$$

и записанным в базисе (v, va, va^2, va^3). Заметим, что $\mu(V \leftthreetimes F) = \{5, 12\}$. В частности, элемент a действует на V без нетривиальных неподвижных точек. Кроме того,

$$C_V(b^2) = \langle v, va^2 + va^3 \rangle. \tag{8}$$

В группе F выполнены следующие тождества:

$$\begin{aligned} b^a &= ba^4 = a^2b, (b^2)^a = b^2a^2 = a^3b^2, (b^3)^a = b^3a^3 = ab^3, \\ b^{a^2} &= ba^3 = a^4b, (b^2)^{a^2} = b^2a^4 = ab^2, (b^3)^{a^2} = b^3a = a^2b^3, \\ b^{a^3} &= ba^2 = ab, (b^2)^{a^3} = b^2a = a^4b^2, (b^3)^{a^3} = b^3a^4 = a^3b^3, \\ b^{a^4} &= ba = a^3b, (b^2)^{a^4} = b^2a^3 = a^2b^2, (b^3)^{a^4} = b^3a^2 = a^4b^3. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим через M правый $\mathbb{F}_3F$-модуль $\mathrm{M}_4(\mathbb{F}_3)$, на котором элементы из F действуют сопряжением, т. е. $m \circ g = g^{-1}mg$ для $m \in M$, $g \in F$.

Лемма 2. *Пусть $m \in M$. Отображение $v \mapsto m$ может быть продолжено до гомоморфизма $\mathbb{F}_3F$-модулей $V \to M$, если $m \in \langle b, b^2, b^3 \rangle_{\mathbb{F}_3}$.*

Доказательство. Так как модуль V является циклическим, ввиду (7) достаточно показать, что $m \circ b = m$, $m \circ (1 + a + a^2 + a^3 + a^4) = 0$. Первое соотношение выполнено, поскольку m является линейной комбинацией степеней элемента b и, значит, коммутирует с b. Второе соотношений нужно проверить лишь для m, равного b, b^2, b^3 в силу линейности. По (9) при $m = b$ имеем

$$m \circ (1 + a + a^2 + a^3 + a^4) = b + b^a + b^{a^2} + b^{a^3} + b^{a^4} = b(1 + a + a^2 + a^3 + a^4) = 0$$

ввиду (5). Аналогично требуемое проверяется для m, равного b^2 и b^3. $\square$

Нетрудно показать, что обращение леммы 2 также имеет место. Однако оно нам не потребуется.

Лемма 3. *Существует изоморфизм* $\mathbb{F}_3F$*-модулей*

$$\wedge^2 V \cong V \oplus U,$$

где U — 2*-мерный подмодуль, порожденный элементом* $v\wedge va + v\wedge va^3 + va^2\wedge va^3$.

Доказательство. Нам потребуется следующий фрагмент таблицы обыкновенных характеров группы F:

	$1a$	$4a$	$4b$	$2a$	$5a$
χ_1	1	i	$-i$	-1	1
χ_2	1	$-i$	i	-1	1
χ_3	4	.	.	.	-1

Модуль V соответствует представлению группы F с характером χ_3. Непосредственно проверяется, что $\wedge^2\chi_3 = \chi_3 + \chi_2 + \chi_1$. Значит, нам нужно лишь найти 2-мерный подмодуль модуля $\wedge^2 V$. Обозначим

$$u_1 = v\wedge va + v\wedge va^3 + va^2\wedge va^3, \quad u_2 = v\wedge va^2 + va\wedge va^2 + va\wedge va^3.$$

Тогда получаем

$$u_1a = u_1, \quad u_1b = u_2, \quad u_2a = u_2, \quad u_2b = -u_1.$$

Таким образом, 2-мерное $\mathbb{F}_3$-подпространство $\langle u_1, u_2\rangle$ является подмодулем, порожденным каждым из векторов u_1 и u_2. $\square$

3. Группа

Введем четыре матрицы 17×17, записанные в блочном виде следующим образом:

$$A = \mathrm{diag}(1, a, a, a, a), \quad B = \mathrm{diag}(1, b, b, b, b),$$

$$C = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & . & . & . & . \\ \hline . & 1 & c_1 & c_3 & . \\ . & . & 1 & . & c_4 \\ . & . & . & 1 & c_2 \\ . & . & . & . & 1 \end{array}\right), \quad D = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & d & . & . & . \\ \hline . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 \end{array}\right),$$

где $d = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{F}_3^4$ и

$$c_1 = b, \quad c_2 = b^3, \quad c_3 = b^2, \quad c_4 = -b^2. \tag{10}$$

Предложение 1. *Группа* $G = \langle A, B, C, D\rangle$ *является разрешимой группой порядка* $2^2\cdot 3^{24}\cdot 5$, *изоспектральной группе* $\mathrm{S}_4(3)$.

Доказательство. Ясно, что $G \cong P \rtimes F$, где $P = \langle C, D\rangle^G$ — наибольшая нормальная 3-подгруппа группы G и F — определенная выше группа Фробениуса вида $5:4$, которую мы отождествим с группой $\langle A, B\rangle$. Для того чтобы определить спектр $\omega(G)$, изучим подробнее строение группы P и действие на ней группы F.

Каждый элемент из P имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ \hline . & 1 & f_1 & f_3 & h \\ . & . & 1 & . & f_4 \\ . & . & . & 1 & f_2 \\ . & . & . & . & 1 \end{array}\right) \tag{11}$$

для некоторых $d_i \in \mathbb{F}_3^4$, $f_i, h \in \mathrm{M}_4(\mathbb{F}_3)$, $i = 1, \ldots, 4$.

Сначала заметим, что группа P имеет период 9. В самом деле, ее период не превосходит 9 по лемме 1. (Для того чтобы применить лемму 1, вложим P естественным образом в группу верхних унитреугольных матриц 5×5 над кольцом $\mathrm{M}_4(\mathbb{F}_3)$.) Далее, из леммы 1 также следует, что элемент (11) имеет порядок 9 тогда и только тогда, когда

$$d_1(f_1f_4 + f_3f_2) \neq 0. \tag{12}$$

Поэтому в P найдется элемент порядка 9 вида CD_1, где $D_1 \in \langle D\rangle^F$. В самом деле, такой элемент имеет порядок 9, в точности когда $0 \neq d_1(c_1c_4 + c_3c_2) = d_1(b - b^3)$, где $d_1 \in \mathbb{F}_3^4$ — блок матрицы D_1 в позиции $(1,2)$. Поскольку группа $\langle D\rangle^F$ изоморфна $V = \mathbb{F}_3^4$ как $\mathbb{F}_3F$-модуль, элемент d_1 можно выбрать произвольно, и мы выберем его так, чтобы он не аннулировался ненулевой матрицей $b - b^3$.

Теперь покажем, что P обладает F-инвариантным нормальным рядом, факторы которого изоморфны V как $\mathbb{F}_3F$-модули. Отсюда будет следовать, что G не имеет элементов порядка 15.

Из (11) видно, что $P = \langle D\rangle^G \leftthreetimes \langle C\rangle^F$, где группа $\langle D\rangle^G$ состоит из матриц вида (11), в которых $f_i, h = 0$, и изоморфна $V^{\oplus 4}$ как $\mathbb{F}_3F$-модуль, тогда как $\langle C\rangle^F$ состоит из матриц (11), в которых $d_i = 0$. Заметим, что компоненты f_i и h в (11) не могут быть выбраны произвольно. Если мы отождествим элемент из $\langle C\rangle^F$ с набором (f_1, f_2, f_3, f_4, h), то получим

$$\begin{aligned}(f_1, f_2, f_3, f_4, h) \cdot (f_1', f_2', f_3', f_4', h')\\ = (f_1 + f_1',\ f_2 + f_2',\ f_3 + f_3',\ f_4 + f_4',\ h + h' + f_1f_4' + f_2f_3').\end{aligned} \tag{13}$$

По лемме 2 отображения $\alpha_i : v \mapsto c_i$, $i = 1, \ldots, 4$, могут быть продолжены до гомоморфизмов $\mathbb{F}_3F$-модулей $V \to M$. Пусть T — подгруппа группы $\{(u, m) \mid u \in V, m \in M\}$ с умножением

$$(u, m) \cdot (u', m') = (u + u', m + m' + u\alpha_1 \cdot u'\alpha_4 + u\alpha_3 \cdot u'\alpha_2)$$

и покомпонентным действием группы F, порожденная элементом $(v, 0)$ как F-группа, т. е. $T = \langle (v, 0)\rangle^F$. Тогда существует гомоморфизм F-групп $\alpha : T \to \langle C\rangle^F$ (в том смысле, что α коммутирует с действием F), определяемый отображением

$$\alpha : (v, 0) \mapsto (v\alpha_1, v\alpha_2, v\alpha_3, v\alpha_4, 0) = C. \tag{14}$$

Заметим, что $[(u, m), (u', m')] = (0, \varphi(u, u'))$, где

$$\varphi(u, u') = u\alpha_1 \cdot u'\alpha_4 - u'\alpha_1 \cdot u\alpha_4 + u\alpha_3 \cdot u'\alpha_2 - u'\alpha_3 \cdot u\alpha_2$$

определяет отображение $\varphi : V \times V \to M$, образ которого порождает $\mathbb{F}_3F$-модуль W, изоморфный коммутанту группы $\langle C\rangle^F$. Ясно, что φ является сбалансированным отображением $\mathbb{F}_3F$-модулей и, значит, W — гомоморфный образ модуля $V \otimes V$ под действием гомоморфизма $\widetilde{\varphi}$, как в (3). Далее, $\widetilde{\varphi}(u \otimes u) = \varphi(u, u) = 0$ для всех $u \in V$, поэтому W — гомоморфный образ внешнего квадрата $\wedge^2 V$. Используя соотношения (9), получаем

$$\begin{aligned}&\widetilde{\varphi}(v \wedge va + v \wedge va^3 + va^2 \wedge va^3) = \varphi(v, va) + \varphi(v, va^3) + \varphi(va^2, va^3)\\
&= b \cdot (-b^2)^a - b^a \cdot (-b^2) + b^2 \cdot (b^3)^a - (b^2)^a \cdot b^3 + b \cdot (-b^2)^{a^3} - b^{a^3} \cdot (-b^2) + b^2 \cdot (b^3)^{a^3}\\
&\quad - (b^2)^{a^3} \cdot b^3 + b^{a^2} \cdot (-b^2)^{a^3} - b^{a^3} \cdot (-b^2)^{a^2} + (b^2)^{a^2} \cdot (b^3)^{a^3} - (b^2)^{a^3} \cdot (b^3)^{a^2}\\
&= -b^3a^2 + b^3a + ba^3 - ba - b^3a + b^3a^3 + ba^4 - ba^3 - b^3a^3 + b^3a^2 + ba - ba^4 = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $\widetilde{\varphi}(U)=0$, где U — 2-мерный подмодуль модуля $\wedge^2 V$ из леммы 3, и, значит, $W\cong V$. Этим показано, в частности, что группа $\langle C\rangle^F$ имеет ступень нильпотентности 2 и порядок 3^8. Таким образом, P имеет порядок $3^{16}\cdot 3^8$ и A действует на P без (нетривиальных) неподвижных точек.

Осталось доказать, что G не имеет элементов порядка 18. По теореме Шура — Цассенхауса все инволюции группы G сопряжены с B^2. Мы покажем, что централизатор $C_P(B^2)$ не содержит элементов порядка 9. Каждый элемент из $C_P(B^2)$ имеет вид (11), где $d_i\in C_V(b^2)$ и $f_i,h\in C_M(b^2)$. Кроме того, ввиду изоморфизма F-групп (14) компоненты f_i такого элемента должны иметь вид $u\alpha_i$ для некоторого $u\in C_V(b^2)$. Таким образом, ввиду условия (12) нужно лишь показать, что

$$w\psi(u)=0 \tag{15}$$

для всех $w,u\in C_V(b^2)$, где отображение $\psi: C_V(b^2)\to M$ определяется так:

$$\psi(u)=u\alpha_1\cdot u\alpha_4+u\alpha_3\cdot u\alpha_2.$$

Пусть N — $\mathbb{F}_3\langle b\rangle$-модуль, порожденный образом $\operatorname{Im}\psi$. Заметим, что $C_V(b^2)$ является $\langle b\rangle$-инвариантным. Значит, условие (15) нужно проверить, только когда $\psi(u)$ является порождающим модуля N. Используя (8), можно показать, что N порождается как модуль элементами $\psi(v)$ и $\psi(va^2+va^3)$. (В самом деле, отображение ψ квадратично зависит от u, откуда следует, что N — гомоморфный образ симметрического квадрата модуля $C_V(b^2)$, который порождается двумя элементами.) По (9) и (5) имеем $\psi(v)=b\cdot(-b^2)+b^2\cdot b^3=(1-b^2)b$ и

$$\begin{aligned}\psi(va^2+va^3)&=(b^{a^2}+b^{a^3})((-b^2)^{a^2}+(-b^2)^{a^3})+((b^2)^{a^2}+(b^2)^{a^3})((b^3)^{a^2}+(b^3)^{a^3})\\&=-(ba^3+ba^2)(b^2a^4+b^2a)+(b^2a^4+b^2a)(b^3a+b^3a^4)\\&=-b^3(a+a^2+a^3+a^4)+b(a+a^2+a^3+a^4)=-(1-b^2)b,\end{aligned}$$

т. е. в обоих случаях $\psi(u)$ делится слева на $1-b^2$. Однако если $w\in C_V(b^2)$, то $w(1-b^2)=0$, и, значит, (15) имеет место, что и требовалось доказать. □

Теорема 1 теперь является следствием предложения 1.

Автор выражает благодарность В. Д. Мазурову за обсуждение проблемы и замечания по содержанию статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lucido M. S., Moghaddamfar A. R.* Groups with complete prime graph connected components // J. Group Theory. 2004. V. 7, N 3. P. 373–384.
2. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных простых групп $\mathrm{S}_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.
3. *Зиновьева М. Р.* Распознавание конечных групп по свойствам множества порядков элементов: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2003.
4. *Старолетов А. М.* Неразрешимость конечных групп, изоспектральных знакопеременной группе степени 10 // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 20–24.
5. *The GAP group.* GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Version 4.4.10 (2007). http://www.gap-system.org.
6. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

Статья поступила 28 апреля 2009 г.

Заварницин Андрей Витальевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
zav@math.nsc.ru