Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 512.553

ИНЪЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ НАД КОЛЬЦАМИ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

П. А. Крылов

Аннотация. Дается описание инъективных модулей над кольцами формальных матриц.

Ключевые слова: кольцо формальных матриц, модуль, инъективность.

В теории колец заметную роль играют кольца формальных (или обобщенных) матриц (такое кольцо называют также *кольцом контекста Мориты*). Кольца формальных матриц расширяют понятие обычного матричного кольца. Среди колец формальных матриц выделяются кольца треугольных матриц. Последние часто появляются в теории представлений артиновых алгебр (см. [1]), служат источником для конструирования колец с асимметричными свойствами. Один параграф книги [2] посвящен кольцам треугольных матриц.

Любое кольцо с нетривиальными идемпотентами при определенных условиях изоморфно некоторому кольцу формальных матриц. Кольцо эндоморфизмов разложимого модуля также является кольцом формальных матриц. Эти факты говорят о целесообразности исследования колец формальных матриц и модулей над ними. Данная проблематика все время находится в поле зрения специалистов. Особым вниманием пользуются кольца треугольных матриц. Ряд вопросов теории этих колец и модулей над ними решен в работах [3–9]. Кольца формальных матриц полезны при изучении колец эндоморфизмов абелевых групп [10–12].

Меньше работ посвящено модулям над кольцами формальных (не обязательно треугольных) матриц и самим таким кольцам. Можно выделить работу Мюллер [13], содержащую построение инъективных оболочек модулей над кольцом формальных матриц. В качестве применения ею получена одна характеризация инъективных модулей. Нужно подчеркнуть, что эту характеризацию трудно использовать при работе с конкретными модулями, поскольку она носит внешний характер и представляет собой некоторый способ конструирования инъективных модулей (см. после доказательства теоремы 3).

В [3] и [14] дано описание инъективных модулей над кольцом треугольных матриц. Оно используется в [15] в процессе исследования абелевых групп как инъективных модулей над кольцами эндоморфизмов.

В настоящей статье описываются инъективные модули над произвольным кольцом формальных матриц. Результаты формулируются в терминах данного модуля. Есть одно интересное применение к проблеме характеризации плоских модулей над кольцом матриц.

Напомним определение кольца формальных матриц и приведем ряд первичных фактов о модулях над такими кольцами (детали см. в [16, 13]). Все наши кольца ассоциативные и с единицей. Пусть R и S — кольца и M — R-S-бимодуль, N — S-R-бимодуль. Предположим, что даны бимодульные гомоморфизмы $\varphi : M \otimes_S N \to R$ и $\psi : N \otimes_R M \to S$, удовлетворяющие условиям: $(mn)m' = m(nm')$ и $(nm)n' = n(mn')$ для всех $m, m' \in M$ и $n, n' \in N$. Здесь мы полагаем $mn = \varphi(m \otimes n)$ и $nm = \psi(n \otimes m)$. Множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$, $r \in R$, $s \in S$, $m \in M$, $n \in N$, с операциями, заданными как в обычном кольце матриц, образует кольцо, называемое *кольцом формальных матриц*. Введенное кольцо обозначаем через $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ или одной буквой K.

Если I и J — образы гомоморфизмов φ и ψ соответственно, то можно записать $I = MN$, $J = NM$, где под MN (соответственно NM) понимаем множество всех конечных сумм элементов вида mn (соответственно nm). Идеалы I и J называют *идеалами следа кольца* K. При $I = 0 = J$ говорят, что K — кольцо с нулевыми идеалами следа. К таким кольцам относятся кольца формальных треугольных матриц (когда $N = 0$ или $M = 0$; для их задания гомоморфизмы φ и ψ не нужны).

Все встречающиеся модули унитарные и левые (кроме одного места в конце статьи). Гомоморфизмы также пишем слева от аргумента. Поэтому удобнее считать, что композиция некоторых отображений λ и μ действует на элементе x по правилу $(\lambda\mu)(x) = \mu(\lambda(x))$.

Пусть X и Y — левые R- и S-модули соответственно. Пусть также существуют гомоморфизмы R-модулей $f : M \otimes_S Y \to X$ и S-модулей $g : N \otimes_R X \to Y$ такие, что выполнены равенства $m(nx) = (mn)x$, $n(my) = (nm)y$ для всех $m \in M$, $n \in N$, $x \in X$, $y \in Y$. Мы считаем, что nx — это $g(n \otimes x)$, а my — это $f(m \otimes y)$. Группа вектор-столбцов $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ образует левый K-модуль при стандартном умножении матрицы на столбец. Верно и обратное. Любой левый K-модуль естественным образом изоморфен некоторому модулю столбцов. Для экономии места модуль вида $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, как и его элементы, записываем в строку. Правый K-модуль — это модуль вектор-строк, модульное умножение в котором есть произведение строки и матрицы. Гомоморфизмы f и g можно назвать *гомоморфизмами модульного умножения*. Пусть MY (соответственно NX) обозначает множество всех конечных сумм элементов вида my (соответственно nx). Понятно, что $MY = \operatorname{Im} f$ и $NX = \operatorname{Im} g$.

Грин [16] доказал, что категория K-модулей эквивалентна некоторой категории четверок вида (X, Y, f, g). Что представляют собой гомоморфизмы K-модулей? Отображение $\Phi : (X, Y) \to (X_1, Y_1)$ будет K-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда существуют R-гомоморфизм $\alpha : X \to X_1$, S-гомоморфизм $\beta : Y \to Y_1$ такие, что $\alpha(my) = m\beta(y)$, $\beta(nx) = n\alpha(x)$ и $\Phi(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$ при всех $m \in M$, $n \in N$, $x \in X$, $y \in Y$. На основании этого K-модульные гомоморфизмы записываем как пары (α, β).

Остановимся на строении подмодулей и фактор-модулей K-модулей. Пусть дан модуль $V = (X, Y)$ над кольцом K. Подмножество W является подмодулем модуля V в том и только в том случае, когда существуют подмодули A и B R-модуля X и S-модуля Y соответственно такие, что $W = (A, B)$ и $MB \subseteq A$, $NA \subseteq B$. Группа строк $(X/A, Y/B)$ каноническим способом является K-модулем, который можно отождествить с фактор-модулем V/W.

Есть один простой метод конструирования K-модулей, используемый в различных вопросах. Имея R-модуль X, возьмем S-модуль $\mathrm{Hom}_R(M,X)$. Группа вектор-строк $(X,\mathrm{Hom}_R(M,X))$ является K-модулем, гомоморфизмы модульного умножения которого $M\otimes_S \mathrm{Hom}_R(M,X)\to X$ и $N\otimes_R X\to \mathrm{Hom}_R(M,X)$ суть $m\otimes\alpha\to\alpha(m)$ и $n\otimes x\to\beta$, где $\beta(m)=(mn)x$, $m\in M$, $n\in N$, $x\in X$, $\alpha\in \mathrm{Hom}_R(M,X)$. В соответствии с нашими соглашениями о записи имеем равенства $m\alpha=\alpha(m)$ и $(nx)(m)=(mn)(x)$. Аналогично S-модуль Y дает K-модуль $(\mathrm{Hom}_S(N,Y),Y)$ с модульными умножениями $n\gamma=\gamma(n)$ и $(my)(n)=(nm)y$, $n\in N$, $m\in M$, $y\in Y$, $\gamma\in \mathrm{Hom}_S(N,Y)$.

Будем использовать обозначения $H(X)$ для $\mathrm{Hom}_R(M,X)$ и $H(Y)$ для $\mathrm{Hom}_S(N,Y)$. К описанной конструкции можно подойти с категорной точки зрения. Именно, сопоставление $(X,Y)\to(X,H(X))\oplus(H(Y),Y)$ вместе с индуцированными гомоморфизмами является ковариантным функтором из категории $R\times S$-mod в категорию K-mod. Модули $(X,H(X))$ и $(H(Y),Y)$ имеют одно весьма важное свойство, связанное с гомоморфизмами.

Лемма 1. *Пусть даны R-модуль X, K-модуль (A,B) и R-гомоморфизм $\alpha: A\to X$. Определим отображение $\beta: B\to H(X)$ формулой $\beta(b)(m)=\alpha(mb)$, $b\in B$, $m\in M$. Тогда β — S-гомоморфизм, а (α,β) — K-гомоморфизм $(A,B)\to(X,H(X))$. Такой β находится единственным образом.*

Аналогичное утверждение справедливо для S-модуля Y, S-гомоморфизма $B\to Y$ и K-модулей (A,B) и $(H(Y),Y)$.

Доказательство. Отображение β сохраняет сумму элементов. Затем для произвольных $s\in S$, $b\in B$ и $m\in M$ имеем $\beta(sb)(m)=\alpha(m(sb))$ и $(s\beta(b))(m)=\beta(b)(ms)=\alpha((ms)b)$. Но $m(sb)=(ms)b$, откуда $\beta(sb)=s\beta(b)$. Получили, что β — S-гомоморфизм.

Для того чтобы пара (α,β) была K-гомоморфизмом, достаточно выполнения равенств $\alpha(mb)=m\beta(b)$ и $\beta(na)=n\alpha(a)$, $m\in M$, $n\in N$, $a\in A$, $b\in B$. Они справедливы, так как $m\beta(b)=\beta(b)(m)=\alpha(mb)$. Далее, $\beta(na)(m)=\alpha(m(na))=\alpha((mn)a)=(mn)\alpha(a)=(n\alpha(a))(m)$ и $\beta(na)=n\alpha(a)$.

Единственность β понимается, конечно, в таком смысле. Если $(\alpha,\gamma):(A,B)\to(X,H(X))$ — какой-то K-гомоморфизм, то $\gamma=\beta$. Действительно, согласно определению модуля $(X,H(X))$ имеем $\gamma(b)(m)=m\gamma(b)$, $b\in B$, $m\in M$. С другой стороны, $m\gamma(b)=\alpha(mb)$ и $\beta(b)(m)=\alpha(mb)$, что влечет $\gamma(b)(m)=\beta(b)(m)$ и $\gamma=\beta$.

Для модулей (A,B) и $(H(Y),Y)$ доказательство проводится похожим образом.

Следующее утверждение известно (см. [13]). Его можно без труда доказать с помощью леммы 1, используя только определение инъективного модуля.

Предложение 1. *Инъективность K-модуля $(X,H(X))$ равносильна инъективности R-модуля X. То же верно для модуля $(H(Y),Y)$.*

Возьмем произвольный K-модуль (A,B) с гомоморфизмами модульного умножения $f': M\otimes_S B\to A$ и $g': N\otimes_R A\to B$ (немного изменим первоначальные обозначения модульных умножений). Они индуцируют гомоморфизмы S-модулей $f: B\to \mathrm{Hom}_R(M,A)$ и R-модулей $g: A\to \mathrm{Hom}_S(N,B)$, где $f(b)(m)=f'(m\otimes b)=mb$ и $g(a)(n)=g'(n\otimes a)=na$, $b\in B$, $a\in A$, $m\in M$, $n\in N$. Гомоморфизмы f и g соответствуют f' и g' при естественном изоморфизме $\mathrm{Hom}_R(M\otimes_S B,A)\cong \mathrm{Hom}_S(B,\mathrm{Hom}_R(M,A))$ и таком же для бимодуля N.

Определим подмодули $L(A)$ и $L(B)$ модулей A и B соответственно, положив $L(A)=\{a\in A\mid na=0$ для каждого $n\in N\}$ и $L(B)=\{b\in B\mid mb=0$ для каждого $m \in M\}$. Понятно, что $L(A)$ — это ядро гомоморфизма g, а $L(B)$ — гомоморфизма f. Таким образом, имеем точные последовательности R- и S-модулей соответственно:

$$0 \to L(A) \to A \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}_S(N, B),$$

$$0 \to L(B) \to B \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}_R(M, A).$$

Затем из леммы 1 заключаем, что отображения $(1, f) : (A, B) \to (A, H(A))$ и $(g, 1) : (A, B) \to (H(B), B))$ будут K-гомоморфизмами. Еще заметим, что если взять любой R-модуль X, то для K-модуля $(X, H(X))$ имеем $L(X) = \{x \in X \mid Ix = 0\}$, а $L(H(X)) = 0$.

Перейдем к описанию инъективных K-модулей. Здесь можно выделить две содержательные ситуации. Позже мы увидим, что общий случай сводится к этим двум ситуациям.

Теорема 1. *K-модуль (A, B) такой, что $L(A) = 0 = L(B)$, инъективен в точности тогда, когда A и B — инъективные модули. При этом g и f — изоморфизмы.*

Доказательство. Пусть (A, B) — инъективный модуль. Из условия вытекает, что g и f — мономорфизмы. Значит, то же верно для $(1, f)$. На основании инъективности модуля (A, B) образ $\mathrm{Im}(1, f)$ есть прямое слагаемое в $(A, H(A))$. Дополнительное слагаемое имеет вид $(0, Z)$, где Z — какое-то слагаемое в $H(A)$. Следовательно, $MZ = 0$ и $Z \subseteq L(H(A))$. Как недавно замечено, $L(H(A)) = 0$ и $Z = 0$. Получается, что $(1, f)$ — изоморфизм. Отсюда $(A, H(A))$ — инъективный модуль и f — изоморфизм. По предложению 1 модуль A инъективен. Таким же образом доказывается, что g — изоморфизм и B — инъективный модуль.

Предположим теперь, что A и B — инъективные модули. Снова используем гомоморфизмы $(1, f)$ и $(g, 1)$. Образуем K-модуль $(\mathrm{Hom}_S(N, H(A)), H(A))$ и рассмотрим K-гомоморфизм $(h, 1) : (A, H(A)) \to (\mathrm{Hom}_S(N, H(A)), H(A))$, описанный в лемме 1. Вычисления показывают, что $h = gf_*$, где $f_* : \mathrm{Hom}_S(N, B) \to \mathrm{Hom}_S(N, H(A))$ — гомоморфизм, индуцированный f. Так как g и f_* — мономорфизмы, то и h — мономорфизм. Модуль $(A, H(A))$ инъективен (предложение 1). Как в первой части доказательства, можно вывести, что h — изоморфизм. Следовательно, и f_* — изоморфизм (как мономорфизм и эпиморфизм), и g — изоморфизм. Аналогично можно доказать, что f — изоморфизм. Итак, $(1, f) : (A, B) \to (A, H(A))$ — изоморфизм, и модуль (A, B) инъективен, что заканчивает доказательство.

Подмножества $(L(A), 0)$, $(0, L(B))$ и $(L(A), L(B))$ являются подмодулями в любом модуле (A, B). Вторая важная ситуация, встречающаяся при исследовании инъективности K-модулей, это ситуация, когда $(L(A), L(B))$ — существенный подмодуль в (A, B). (Это всегда так, если идеалы следа кольца K нулевые.)

Напомним ряд понятий теории модулей (о них можно прочитать в книге [17]). Пусть V — модуль над некоторым кольцом. Подмодуль G модуля V называется *замкнутым*, если G не имеет собственных существенных расширений в V. Подмодуль G называется *замыканием подмодуля* Z, если $Z \subseteq G$, Z существенный в G и G замкнутый. Каждый подмодуль обладает замыканием, однако оно не однозначно. Символ $C(Z)$ будет обозначать какое-то замыкание подмодуля Z.

Теорема 2. *Пусть* (A, B) — K*-модуль такой, что* $(L(A), L(B))$ — *существенный подмодуль. Модуль* (A, B) *инъективен тогда и только тогда, когда существуют замыкания* $C(L(A))$ *и* $C(L(B))$ *такие, что они инъективны,* $L(A) \cap MC(L(B)) = 0$ *и* $NC(L(A)) \cap L(B) = 0$, $\mathrm{Hom}_R(M, C(L(A))) \subseteq \mathrm{Im}\, f$ *и* $\mathrm{Hom}_S(N, C(L(B))) \subseteq \mathrm{Im}\, g$.

Доказательство. Предположим, что (A, B) — инъективный модуль. Существуют замыкания (A_1, B_2) и (A_2, B_1) подмодулей $(L(A), 0)$ и $(0, L(B))$ соответственно такие, что $(A_1, B_2) \cap (A_2, B_1) = 0$ [17, утверждение 2.20]. Замкнутые подмодули инъективного модуля инъективны. Следовательно, $(A_1, B_2) \oplus (A_2, B_1)$ — существенный инъективный подмодуль, поэтому $(A, B) = (A_1, B_2) \oplus (A_2, B_1)$. Несложно убедиться, что A_1 — существенное расширение $L(A)$ в A, а B_1 — существенное расширение $L(B)$ в B. Подмодули A_1, B_1 как прямые слагаемые являются замкнутыми. Значит, они служат замыканиями для $L(A)$ и $L(B)$ соответственно, и можно написать $A_1 = C(L(A))$ и $B_1 = C(L(B))$. На основании леммы 1 имеем гомоморфизм K-модулей $(1, f) : (A_1, B_2) \to (A_1, H(A_1))$ (точнее, нужно взять ограничение f на B_2). Поскольку $B_2 \cap L(B) = 0$, то $(1, f)$ — мономорфизм. Учитывая инъективность модуля (A_1, B_2), так же, как и в доказательстве теоремы 1, находим, что $(1, f)$ — изоморфизм. Следовательно, модуль $(A_1, H(A_1))$ инъективен, тогда и A_1 инъективен (предложение 1). Кроме того, $\mathrm{Hom}_R(M, A_1) \subseteq \mathrm{Im}\, f$. Наконец, из $L(A) \subseteq A_1$ и $MB_1 \subseteq A_2$ заключаем, что $L(A) \cap MB_1 = 0$. Аналогично получаются оставшиеся утверждения; в частности, $(g, 1) : (A_2, B_1) \to (H(B_1), B_1)$ есть изоморфизм.

Считаем теперь, что условия теоремы выполняются. Возьмем замыкания $C(L(A))$, $C(L(B))$ со свойствами, указанными в теореме. Обозначим их через A_1 и B_1 соответственно. Рассмотрим также подмодули (A_1, NA_1) и (MB_1, B_1). Отметим, что их пересечение равно нулю. Возьмем еще K-модули $(A_1, H(A_1))$ и $(H(B_1), B_1)$, которые инъективны в силу предложения 1. Рассмотрим гомоморфизмы $(1, f) : (A_1, NA_1) \to (A_1, H(A_1))$ и $(g, 1) : (MB_1, B_1) \to (H(B_1), B_1)$ (под f и g понимаются, конечно, ограничения на соответствующих подмодулях). На самом деле имеем мономорфизмы, так как $\mathrm{Ker}\, f = L(B) \cap NA_1 = 0$ и то же верно для $\mathrm{Ker}\, g$. Сумма отображений $(1, f) + (g, 1)$ продолжается до мономорфизма из (A, B) в $(A_1, H(A_1)) \oplus (H(B_1), B_1)$. Отождествим (A, B) с образом этого мономорфизма. Уточним, что подмодуль $L(A)$ играет в записанной сумме ту же роль, что и в (A, B).

Имеем прямые разложения $A = A_1 \oplus A_2$, $B = B_2 \oplus B_1$, где $A_2 = A \cap H(B_1)$, $B_2 = B \cap A_1$. Понятно, что существуют K-модули (A_1, B_2), (A_2, B_1) и разложение $(A, B) = (A_1, B_2) \oplus (A_2, B_1)$. Удобно вернуться к исходному модулю (A, B) и считать данное разложение его разложением. Опять возьмем мономорфизм $(1, f) : (A_1, B_2) \to (A_1, H(A_1))$. Пусть $\alpha \in H(A_1)$. Поскольку $H(A_1) \subseteq \mathrm{Im}\, f$, то $\alpha = f(b)$ для некоторого $b \in B$. Запишем $b = c + d$ с $c \in B_2$, $d \in B_1$. Для всякого $m \in M$ имеем $\alpha(m) = f(b)(m) = mb = mc + md$. Здесь mc, $mb \in A_1$ и $md \in A_2$. Откуда $md = 0$ и $mb = mc$. Теперь получаем $\alpha(m) = mc = f(c)(m)$ и $\alpha = f(c)$. Нашли, что $(1, f)$ — изоморфизм. Точно так же $(g, 1) : (A_2, B_1) \to (H(B_1), B_1)$ — изоморфизм. Таким образом, $(A, B) \cong (A_1, H(A_1)) \oplus (H(B_1), B_1)$, и (A, B) — инъективный модуль. Теорема доказана.

Следствие 1. *В условиях и обозначениях теоремы* 2 *имеет место канонический изоморфизм* $(A, B) \cong (A_1, H(A_1)) \oplus (H(B_1), B_1)$.

Следствие 2. K*-модуль* $(A, 0)$ *инъективен в точности тогда, когда* A — *инъективный* R*-модуль и* $\mathrm{Hom}_R(M, A) = 0$.

Теорема 2 применима к модулям над кольцом K с нулевыми идеалами следа. Прежде заметим, что подмодуль $(L(A)+MB, L(B)+NA)$ является существенным в любом модуле (A,B) над произвольным кольцом K. Действительно, пусть $(a,b) \in (A,B)$ и $a \neq 0$. Если $na = 0$ для всех $n \in N$, то $a \in L(A)$. Иначе найдется n с $na \neq 0$, и тогда $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}(a,b) = (0, na) \in (0, NA)$. Случай $b \neq 0$ разбирается аналогично. Пусть теперь K имеет нулевые идеалы следа. Тогда $MB \subseteq L(A)$, $NA \subseteq L(B)$ и заключаем, что $(L(A), L(B))$ существенный в (A,B).

Следствие 3. (1) *Модуль (A,B) над кольцом K с нулевыми идеалами следа инъективен тогда и только тогда, когда $L(A)$ и $L(B)$ — инъективные модули и $\mathrm{Hom}_R(M, L(A)) \subseteq \mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Hom}_S(N, L(B)) \subseteq \mathrm{Im}\, g$.*

(2) [3, 14]. *Для кольца треугольных матриц $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ инъективность модуля (A,B) равносильна тому, что A и $L(B)$ — инъективные модули и $f : B \to \mathrm{Hom}_R(M, A)$ — эпиморфизм.*

Доказательство. (1) Во-первых, для кольца K с нулевыми идеалами следа в любом K-модуле $(X, H(X))$ будет $L(X) = X$ и $L(H(X)) = 0$. То же для модуля вида $(H(Y), Y)$. Считаем теперь, что модуль (A,B) инъективен. Если отождествить его с образом изоморфизма из следствия 1, то получится, что $L(A) = C(L(A))$ и $L(B) = C(L(B))$. Значит, $L(A)$ и $L(B)$ — инъективные модули. Все оставшееся получается из теоремы 2.

В (2) нужно учесть, что $L(A) = A$.

Теорема 3. *Произвольный K-модуль (A,B) инъективен тогда и только тогда, когда некоторое замыкание подмодуля $(L(A), L(B))$ инъективно, и найдутся соответствующие замыкания $C(L(A))$, $C(L(B))$ такие, что фактор-модули $A/(C(L(A)) + g^{-1}H(C(L(B))))$, $B/(C(L(B)) + f^{-1}H(C(L(A))))$ инъективны.*

Доказательство. Предположим, что (A,B) — инъективный модуль. Замкнутые подмодули инъективных модулей инъективны. Можно написать $(A,B) = (G,H) \oplus (C,D)$, где первое слагаемое — это некоторое замыкание подмодуля $(L(A), L(B))$, а второе — дополнительное слагаемое. Модуль (G,H) попадает под действие теоремы 2. Следовательно, существуют инъективные замыкания A_1, B_1 подмодулей $L(A)$, $L(B)$ соответственно и подмодули A_2, B_2, для которых $(G,H) = (A_1, B_2) \oplus (A_2, B_1)$. Дополнительно отображения $(1,f) : (A_1, B_2) \to (A_1, H(A_1))$ и $(g,1) : (A_2, B_1) \to (H(B_1), B_1)$ являются изоморфизмами (это видно из доказательства теоремы 2). Модуль (C,D) инъективен, и $L(C) = 0 = L(D)$. Согласно теореме 1 инъективны модули C и D. Осталось заметить, что $C \cong A/(A_1 \oplus A_2) = A/(A_1 + g^{-1}H(B_1))$. Аналогичные соотношения верны и для другого фактор-модуля.

Пусть выполняются условия теоремы. Значит, $(A,B) = (G,H) \oplus (C,D)$ для какого-то замыкания (G,H) подмодуля $(L(A), L(B))$ и модуля (C,D) с $L(C) = 0 = L(D)$. К первому слагаемому снова применима теорема 2. Как и выше, можно написать $(G,H) = (A_1, B_2) \oplus (A_2, B_1)$. Также являются изоморфизмами отображения $(1,f)$ и $(g,1)$. Рассуждения, подобные проведенным недавно, доказывают инъективность модулей C и D. Ввиду теоремы 1 (C,D) и (A,B) — инъективные модули. Теорема доказана.

На основании доказанных теорем можно сделать такой вывод. Любой инъективный модуль (A,B) равен $(A_1, B_2) \oplus (A_2, B_1) \oplus (C,D)$, где $A_1 = C(L(A))$,

$B_1 = C(L(B))$, $L(C) = 0 = L(D)$, и канонические отображения

$$B_2 \to \mathrm{Hom}_R(M, A_1),\ A_2 \to \mathrm{Hom}_S(N, B_1),\ D \to \mathrm{Hom}_R(M, C),\ C \to \mathrm{Hom}_S(N, D)$$

суть изоморфизмы.

Уместно теперь привести описание инъективных модулей, данное Мюллер в [13] (оно упоминалось в начале статьи). Именно, модуль (A, B) инъективен в том и только в том случае, когда найдутся инъективные R-модуль X и S-модуль Y такие, что $(A, B) \cong (X, H(X)) \oplus (Y, H(Y))$ (для доказательства нужно применить факт, записанный в предыдущем абзаце, и теоремы 1, 2).

Полученной информации об инъективных модулях достаточно для описания инъективных оболочек. Мы не будем этого делать, поскольку похожее описание есть в статье Мюллер. Тем не менее отметим, что наши доказательства более простые и прозрачные.

Для многих задач о модулях над кольцами матриц требуется информация о плоских модулях. Например, это касается вопросов о наследственности модулей и колец.

Следствие 4. *Плоскостность K-модуля (A, B) такого, что $NA = B$, $MB = A$, равносильна плоскостности модулей A и B.*

Доказательство. Левый модуль V над некоторым кольцом плоский в точности тогда, когда его правый модуль характеров V^*, равный $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, инъективен. Модуль характеров K-модуля (A, B) естественным образом отождествляется с правым K-модулем (A^*, B^*). Последний удовлетворяет условиям правого аналога теоремы 1. Следовательно, модуль (A^*, B^*) инъективен в точности тогда, когда инъективны модули A^* и B^*. Это же эквивалентно плоскостности модулей A и B.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Auslander M., Reiten I., Smalø S. O.* Representation theory of Artin algebras. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
2. *Goodearl K. R.* Ring theory. New York: Marcel Dekker, 1976.
3. *Haghany A., Varadarajan K.* Study of formal triangular matrix rings // Comm. Algebra. 1999. V. 27. P. 5507–5527.
4. *Haghany A., Varadarajan K.* Study of modules over formal triangular matrix rings // J. Pure Appl. Algebra. 2000. V. 147. P. 41–58.
5. *Birkenmeier G. F., Park J. K., Rizvi S. T.* Generalized triangular matrix rings and the fully invariant extending property // Rocky Mountain J. Math. 2002. V. 32, N 4. P. 1299–1319.
6. *Haghany A.* Injectivity conditions over a formal triangular matrix ring // Arch. Math. 2002. V. 78. P. 268–274.
7. *Fossum R. M., Griffith P. A., Reiten I.* Trivial extensions of Abelian categories. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1975. (Lecture Notes in Math.; V. 456).
8. *Hirano Y.* Another triangular matrix ring having Auslander–Gorenstein property // Comm. Algebra. 2001. V. 29. P. 719–735.
9. *Sheiham D.* Universal localization of triangular matrix rings // Proc. Amer. Math. Soc. 2006. V. 134, N 12. P. 3465–3474.
10. *Крылов П. А., Классен Е. Д.* Центр кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 5. С. 1074–1085.
11. *Крылов П. А.* Наследственные кольца эндоморфизмов смешанных абелевых групп // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 1. С. 1008–1019.
12. *Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A.* Endomorphism rings of Abelian groups. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2003.
13. *Müller M.* Rings of quotient of generalised matrix rings // Comm. Algebra. 1987. V. 15. P. 1991–2015.

14. *Крылов П. А., Пахомова Е. Г.* Исследование группы $\mathrm{Hom}(A, B)$ как инъективного $E(B)$-модуля // Абелевы группы и модули. Томск: ТГУ, 1996. С. 132–169.
15. *Grinshpon S. Ya., Krylov P. A.* Fully invariant subgroups, full transitivity, and homomorphism groups of Abelian groups // J. Math. Sci. 2005. V. 128, N 3. P. 2894–2997.
16. *Green E. L.* On the representation theory of rings in matrix form // Pacific J. Math. 1982. V. 100, N 1. P. 123–138.
17. *Пунинский Г. Е., Туганбаев А. А.* Кольца и модули. М.: Союз, 1998.

Статья поступила 25 июня 2008 г.

Крылов Петр Андреевич
Томский гос. университет, механико-математический факультет,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
krylov@math.tsu.ru