Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 512.554

БИАЛГЕБРЫ ЛИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ИЗ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ И ЙОРДАНОВЫХ БИАЛГЕБР

М. Е. Гончаров

Аннотация. Рассматривается связь между простыми альтернативными Д-биалгебрами и биалгебрами Ли. Доказывается, что на любой конечномерной некоммутативной альтернативной алгебре над алгебраически замкнутым полем можно задать нетривиальную структуру альтернативной Д-биалгебры.

Ключевые слова: альтернативная биалгебра, йорданова биалгебра, классическое уравнение Янга — Бакстера, неассоциативная коалгебра, алгебра Кэли — Диксона.

Биалгебры Ли — это одновременно алгебры Ли и коалгебры Ли, коумножение которых является 1-коциклом. Биалгебры Ли введены Дринфельдом [1] для изучения решений классического уравнения Янга — Бакстера. В работах [2, 3] дано определение биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры), связанное с некоторым многообразием алгебр. В частности, определены ассоциативные и йордановы Д-биалгебры, а также рассмотрен ассоциативный аналог уравнения Янга — Бакстера и ассоциативные Д-биалгебры, связанные с решениями этого уравнения. Там же описаны ассоциативные алгебры, допускающие нетривиальную структуру Д-биалгебры с кокоммутативным на центре коумножением. Одним из условий ассоциативных Д-биалгебр является то, что коумножение — это дифференцирование исходной алгебры в ее тензорный квадрат, рассмотренный как бимодуль над исходной алгеброй. Такие биалгебры введены в [4] и изучались в [5]. В последней работе были изучены некоторые свойства решений ассоциативного аналога уравнения Янга — Бакстера и свойства сбалансированных биалгебр (другое название Д-биалгебр). Ассоциативные классические уравнения Янга — Бакстера с параметрами рассматривались в [6]. Класс йордановых Д-биалгебр, связанный с йордановым аналогом уравнения Янга — Бакстера, определен в [7], где доказано, что всякая конечномерная йорданова Д-биалгебра, которая полупроста как алгебра, принадлежит этому классу.

С каждой лиевой, ассоциативной или йордановой биалгеброй можно связать так называемую тройку Манина. В [8] тройки Манина для ассоциативных алгебр изучались как инструмент построения решений уравнения Янга — Бакстера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00157–А), АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты НШ–344.2008.1, МД–2438.2009.1), интеграционного проекта СО РАН №97, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429).

В работе [9] изучались альтернативные Д-биалгебры и их связь с альтернативным уравнением Янга — Бакстера. В частности, описаны все структуры альтернативной Д-биалгебры на матричной алгебре Кэли — Диксона.

В работе [2] установлена связь йордановых Д-биалгебр с биалгебрами Ли. В частности доказано, что если алгебра $L(J)$, полученная по конструкции Кантора — Кехера — Титса (ККТ) из йордановой алгебры J, допускает структуру биалгебры Ли, то при некоторых естественных ограничениях алгебра J допускает структуру йордановой Д-биалгебры.

Там же доказано, что если $(A^{(+)}, \Delta^{(+)})$ является присоединенной йордановой Д-биалгеброй для ассоциативной Д-биалгебры (A, Δ), то на алгебре $L(A^{(+)})$ можно задать структуру биалгебры Ли, связную в некотором смысле с биалгеброй $(A^{(+)}, \Delta^{(+)})$.

В настоящей работе доказывается аналог данного утверждения в случае, когда A — матричная алгебра Кэли — Диксона, а пара (A, Δ) — альтернативная Д-биалгебра. Вместе с этим строится пример альтернативной Д-биалгебры (A, Δ), для которой структуру присоединенной йордановой Д-биалгебры $(A^{(+)}, \Delta^{(+)})$ нельзя продлить до структуры биалгебры Ли на алгебре $L(A^{(+)})$.

§ 1. Определения и предварительные результаты

Для векторных пространств V и U над полем F через $V \otimes U$ обозначим их тензорное произведение над F. На пространстве $V \otimes V$ определим линейное отображение τ, полагая $\tau\big(\sum_i a_i \otimes b_i\big) = \sum_i b_i \otimes a_i$. На пространстве $V \otimes V \otimes V$ определим линейное отображение ξ, полагая $\xi\big(\sum_i a_i \otimes b_i \otimes c_i\big) = \sum_i b_i \otimes c_i \otimes a_i$. Через V^* обозначим пространство всех линейных функционалов, заданных на пространстве V. Для элементов $f \in V^*$ и $v \in V$ выражение $\langle f, v\rangle$ обозначает значение линейного функционала f на элементе v.

Определение. Пара (A, Δ), где A — векторное пространство над F, а $\Delta : A \mapsto A \otimes A$ — линейное отображение, называется *коалгеброй*. При этом отображение Δ называется *коумножением*.

Для элемента $a \in A$ будем использовать обозначение $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

На пространстве A^* определим умножение, полагая

$$\langle fg, a\rangle = \sum \langle f, a_{(1)}\rangle \langle g, a_{(2)}\rangle,$$

где $f, g \in A^*$, $a \in A$ и $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$. Полученная алгебра называется *дуальной алгеброй* коалгебры (A, Δ).

Дуальная алгебра A^* коалгебры (A, Δ) задает бимодульное действие $(\cdot)$ на A, которое определяется следующим образом:

$$f \cdot a = \sum a_{(1)} \langle f, a_{(2)}\rangle \quad \text{и} \quad a \cdot f = \sum \langle f, a_{(1)}\rangle a_{(2)},$$

где $f \in A^*$ и $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

В работе [10] дано следующее определение коалгебры, связанное с некоторым многообразием алгебр.

Определение. Пусть M — произвольное многообразие алгебр. Тогда пара (A, Δ) называется *M-коалгеброй*, если дуальная алгебра A^* принадлежит многообразию M.

Пусть теперь A — произвольная алгебра, на которой заданы коумножение Δ, и A^* — дуальная алгебра коалгебры (A, Δ). Алгебра A задает бимодульное действие $(\bullet)$ на пространстве A^*, определенное формулами

$$\langle f \bullet a, b\rangle = \langle f, ab\rangle \quad \text{и} \quad \langle b \bullet f, a\rangle = \langle f, ab\rangle.$$

Рассмотрим пространство $D(A) = A \oplus A^*$ и зададим на нем умножение, полагая

$$(a + f) * (b + g) = (ab + f \cdot b + a \cdot g) + (fg + f \bullet b + a \bullet g).$$

Тогда $D(A)$ является обычной алгеброй над полем F, а A и A^* — подалгебры в $D(A)$. Алгебру $D(A)$ будем называть *дублем Дринфельда.*

Напомним определение биалгебры Ли. Пусть L — алгебра Ли. Пара (L, Δ) является биалгеброй Ли тогда и только тогда, когда (L, Δ) — коалгебра Ли и коумножение Δ является 1-коциклом(см. [1]), т. е. удовлетворяют равенству

$$\Delta([a, b]) = \sum([a_{(1)}, b] \otimes a_{(2)} + a_{(1)} \otimes [a_{(2)}, b]) + \sum([a, b_{(1)}] \otimes b_{(2)} + b_{(1)} \otimes [a, b_{(2)}]).$$

Как показано в [1], пара (L, Δ) — биалгебра Ли тогда и только тогда, когда дубль Дринфельда $D(L)$ является алгеброй Ли. В связи с этим в [2] дано следующее определение биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры), связанное с некоторым многообразием алгебр.

Определение. Пусть M — произвольное многообразие F-алгебр и A — алгебра из M, на которой дополнительно задано коумножение Δ. Тогда пару (A, Δ) будем называть *M-биалгеброй по Дринфельду*, если алгебра $D(A)$ принадлежит многообразию M.

Среди биалгебр Ли особою роль играют треугольные и квазитреугольные биалгебры Ли. Пусть L — алгебра Ли и $R = \sum\limits_i a_i \otimes b_i$ из $(\mathrm{id} - \tau)(L \otimes L)$, т. е. $\tau(R) = -R$. Определим на алгебре L коумножение Δ_R, полагая для любого $a \in L$

$$\Delta_R(a) = \sum_i [a_i, a] \otimes b_i - a_i \otimes [a, b_i].$$

Тогда коумножение Δ_R антикокоммутативно и является 1-коциклом. В [11] показано, что пара (L, Δ_R) — биалгебра Ли тогда и только тогда, когда элемент

$$C_L(R) = [R_{12}, R_{13}] + [R_{12}, R_{23}] + [R_{13}, R_{23}]$$

ad-инвариантен(L-инвариантен), где $[R_{12}, R_{13}] = \sum\limits_{ij} [a_i, a_j] \otimes b_i \otimes b_j$, $[R_{12}, R_{23}] = \sum\limits_{ij} b_i \otimes [a_i, a_j] \otimes b_j$ и $[R_{13}, R_{23}] = \sum\limits_{ij} a_i \otimes a_j \otimes [b_i, b_j]$. Биалгебры такого типа называются *квазитреугольными.* В частности, если

$$[R_{12}, R_{13}] + [R_{12}, R_{23}] + [R_{13}, R_{23}] = 0, \tag{1}$$

то пара (L, Δ_R) — биалгебра Ли. Такие биалгебры называются *треугольными.* Уравнение (1) называется *классическим уравнением Янга — Бакстера.*

Выражение для $C_L(R)$ можно переписать в виде

$$C_L(R) = (\mathrm{id} + \xi + \xi^2)([R_{12}, R_{13}]),$$

где $\xi : L \otimes L \otimes L \longrightarrow L \otimes L \otimes L$ — линейное отображение, удовлетворяющее свойству $\xi(x \otimes y \otimes z) = y \otimes z \otimes x$.

Каждое решение уравнения (1) связно с симплектической алгеброй Ли, т. е. парой (g, ω), где g — алгебра Ли, ω — невырожденная кососимметрическая билинейная форма, удовлетворяющая

$$\omega([a,b],c) + \omega([b,c],a) + \omega([c,a],b) = 0$$

для любых $a, b, c \in g$. В этом случае форму ω будем называть *симплектической.*

Алгебра A называется *альтернативной*, если для любых $x, y \in A$ в ней выполняются тождества

$$(x,x,y) = 0 \quad \text{и} \quad (y,x,x) = 0.$$

Пусть A — альтернативная алгебра, Δ — коумножение, заданное на алгебре A. В работе [9] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы пара (A, Δ) являлась альтернативной биалгеброй по Дринфельду (коротко, альтернативной Д-биалгеброй).

В альтернативном случае также можно выделить классы треугольных и квазитреугольных альтернативных Д-биалгебр.

Рассмотрим $r = \sum\limits_i a_i \otimes b_i$ из $(\mathrm{id} - \tau)(A \otimes A)$, т. е. $\tau\big(\sum\limits_i a_i \otimes b_i\big) = -\sum\limits_i a_i \otimes b_i$, и определим на алгебре A коумножение Δ_r, полагая

$$\Delta_r(a) = \sum_i a_i a \otimes b_i - \sum_i a_i \otimes a b_i. \tag{2}$$

Альтернативные Д-биалгебры, в которых коумножение имеет вид (2), называются *квазитреугольными.*

Пусть теперь $r_{12} = \sum\limits_i a_i \otimes b_i \otimes 1$, $r_{23} = \sum\limits_i 1 \otimes a_i \otimes b_i$, $r_{13} = \sum\limits_i a_i \otimes 1 \otimes b_i$. Определим

$$C_A(r) = r_{23} r_{12} - r_{12} r_{13} - r_{13} r_{23} = (\mathrm{id} + \xi + \xi^2)(r_{23} r_{12}).$$

Используя результаты из [9], можно показать, что если для любого c из A имеет место равенство

$$C_A(r)(c \otimes 1 \otimes 1) - (1 \otimes 1 \otimes c) C_A(r) = 0, \tag{3}$$

то пара (A, Δ_r) является альтернативной Д-биалгеброй.

Элемент $C_A(r)$ можно представить следующим образом:

$$C_A(r) = -\sum_{ij} a_i a_j \otimes b_i \otimes b_j + b_j \otimes a_i a_j \otimes b_i + b_i \otimes b_j \otimes a_i a_j.$$

Уравнение

$$C_A(r) = 0 \tag{4}$$

называется *альтернативным аналогом классического уравнения Янга — Бакстера.* Если элемент $r \in (\mathrm{id} - \tau)(A \otimes A)$ является решением (4), то пара (A, Δ_r) является альтернативной Д-биалгеброй. Биалгебры такого типа называются *треугольными.*

Определение. Пусть A — произвольная F-алгебра и ω — невырожденная билинейная кососимметрическая форма на A. Тогда ω называется *замкнутой формой*, если для любых элементов a, b, c из A выполняется равенство

$$\omega(ab, c) + \omega(bc, a) + \omega(ca, b) = 0.$$

В этом случае по аналогии с алгебрами Ли форму ω будем называть *симплектической*, а пару (A,ω) — *симплектической алгеброй.*

Заметим, что если A является квадратичной алгеброй с единицей, то данное определение замкнутости формы эквивалентно следующим двум условиям:

$$\omega([a,b],c)+\omega([b,c],a)+\omega([c,a],b)=0, \quad \omega(1,a)=0$$

для любых $a,b,c\in A$.

Пусть A — альтернативная алгебра, $r=\sum\limits_i a_i\otimes b_i$ — антисимметричное решение уравнения (4). Как и в случае алгебр Ли [12], любое такое решение находится во взаимно однозначном соответствии с симплектической альтернативной алгеброй.

Пусть B — подалгебра в A, порожденная элементами a_i. Пусть $x_1,\dots,x_n$ — базис B. Тогда $r=\sum\limits_{ij}\alpha_{ij}(x_i\otimes x_j)$, где $\alpha_{ij}\in F$. Пусть матрица (β_{ij}) обратна к матрице (α_{ij}), $x_1^*,\dots,x_n^*$ — дуальный базис к базису $x_1,\dots,x_n$. Определим на пространстве B форму ω_r, полагая для любых $a,b\in B$

$$\omega_r(a,b)=\sum_{ij}\beta_{ij}\langle x_i^*\otimes x_j^*,a\otimes b\rangle.$$

Тогда [12] ω_r — невырожденная симплектическая форма на алгебре B.

Обратно, если B — подалгебра в A и ω — симплектическая форма на алгебре B, то $\omega=\omega_r$ для некоторого элемента $r\in(\mathrm{id}-\tau)(A\otimes A)$, удовлетворяющего уравнению (4).

Пусть F — алгебраически замкнутое поле характеристики, не равной 2, F_2 — алгебра 2×2-матриц над полем F, $\mathscr{C}=F_2\oplus vF_2$ — матричная алгебра Кэли — Диксона (см. [13]). Умножение в F_2 продолжается до умножения в алгебре $\mathscr{C}$ с помощью следующих соотношений:

$$a(vb)=v\bar{a}b,\ (vb)a=v(ab), \quad (va)(vb)=b\bar{a},$$

где $a,b\in\mathscr{F}_2$, а черта над буквой означает стандартную инволюцию алгебры F_2

В работе [9] описаны структуры альтернативной Д-биалгебры, заданной на матричной алгебре Кэли — Диксона $\mathscr{C}$. Если пара $(\mathscr{C},\Delta)$ является альтернативной Д-биалгеброй, то $\Delta=\Delta_r$, где r — антисимметричное решение уравнения (4) на алгебре $\mathscr{C}$. При этом соответствующая подалгебра B с симплектической формой ω изоморфна одной из следующих подалгебр:

Случай 1. Подалгебра $A(2,1,0)$ с базисом e_{11},e_{12}.

Случай 2. Подалгебра $A(2,0,1)$ с базисом e_{11},e_{21}.

Случай 3. Подалгебра $N(2)$ с базисом e_{12},ve_{11}.

Симплектической формой в этих примерах является любая невырожденная кососимметрическая билинейная форма.

Случай 4. Подалгебра $A(4,1,2)$ с базисом e_{11}, e_{12}, ve_{11}, ve_{12}. Симплектической формой на алгебре $A(4,1,2)$ является любая невырожденная кососимметрическая билинейная форма, удовлетворяющая равенству

$$\omega(e_{11},e_{12})=-\omega(ve_{11},ve_{12}).$$

Случай 5. Подалгебра $A(4,2,1)$ с базисом e_{11}, ve_{21}, ve_{22}, e_{21}. Симплектической формой на алгебре $A(4,2,1)$ является любая невырожденная кососимметрическая билинейная форма, удовлетворяющая равенству

$$\omega(e_{11},e_{21})=\omega(ve_{21},ve_{22}).$$

§ 2. Связь простых альтернативных Д-биалгебр с биалгебрами Ли

Напомним конструкцию Кантора — Кехера — Титса для йордановых алгебр. Пусть J — йорданова алгебра с 1. Для элемента $a \in J$ через a' обозначим оператор правого умножения на элемент a. Линейное подпространство пространства $\mathrm{End}_F(J)$, порожденное операторами a', обозначим через J'. Линейное отображение $d : J \longrightarrow J$ называется *дифференцированием алгебры* J, если $(ab)d = (ad)b + a(bd)$ для любых элементов a, b из J. Если $a, b \in J$, то положим $[a', b'] = a'b' - b'a'$ и $a \bigtriangledown b = (ab)' - [a', b']$. Как известно, линейная комбинация операторов вида $[a', b']$ является дифференцированием алгебры J. Такие дифференцирования называются *внутренними.*

Пусть $\mathrm{Der}(J)$ $(\mathrm{Intder}(J))$ — линейное подпространство всех дифференцирований (внутренних дифференцирований) алгебры J. Тогда пространство $\mathrm{Der}(J)$ — алгебра Ли относительно операции коммутирования, причем $\mathrm{Intder}(J)$ — идеал в $\mathrm{Der}(J)$. Пусть теперь D — подалгебра Ли алгебры $\mathrm{Der}(J)$, содержащая $\mathrm{Intder}(J)$, и $\overline{J}$ — изоморфная копия пространства J. Рассмотрим линейное пространство

$$L(J) = J \oplus J' \oplus D \oplus \overline{J}.$$

Зададим на пространстве $L(J)$ линейное отображение ϵ, определенное формулой

$$\epsilon(a + b' + d + \bar{c}) = c - b' + d + \bar{a},$$

где $a, b, c \in J$ и $d \in D$.

Теперь определим на $L(J)$ операцию умножения $[,]_L$, положив

$$[a_1+V_1+\bar{b}_1, a_2+V_2+\bar{b}_2]_L = a_1V_2-a_2V_1+\overline{b_1\epsilon V_2}-\overline{b_2\epsilon V_1}+a_1\bigtriangledown b_2-a_2\bigtriangledown b_1+V_1V_2-V_2V_1,$$

где $a_i, b_i \in J$, $V_i \in J' \oplus D$, $i = 1, 2$. Тогда пространство $L(J)$ с введенной таким образом операцией умножения является $-1, 1$-градуированной алгеброй Ли, которая называется *конструкцией Кантора — Кехера — Титса* (ККТ-*конструкцией*) йордановой алгебры J. Через L_i обозначим компоненты $L(J)$, где $i = -1, 0, 1$, при этом $L_{-1} = J$, $L_0 = J' \oplus D$, $L_1 = \overline{J}$. Через U обозначим простую трехмерную подалгебру алгебры $L(J)$, порожденную элементами $1, 1'$ и $\overline{1}$. Отображение $\epsilon : L(J) \longrightarrow L(J)$ является автоморфизмом алгебры $L(J)$.

Предположим, что на пространстве $L(J)$ задано коумножение Δ_L. Будем говорить, что Δ_L *согласовано с* градуировкой алгебры $L(J)$, если $\Delta_L(L_i) \subset \sum\limits_{j+k=i} L_j \otimes L_k$. Пусть Δ — коумножение, заданное на пространстве J. Будем говорить, что Δ_L *связано с* Δ, если для любого элемента $a \in J$ имеет место включение

$$\Delta_L(a) \in \sum a_{(1)} \otimes a'_{(2)} - a'_{(2)} \otimes a_{(1)} + L_1 \otimes D + D \otimes L_1,$$

где $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

Пусть алгебра Ли $L(J)$ получена из йордановой алгебры J по ККТ-конструкции. Тогда справедлива следующая

Теорема [2]. *Пусть характеристика поля F не равна 2, 3. Предположим, что пара $(L(J), \Delta_L)$ является биалгеброй Ли, причем коумножение Δ_L согласовано с градуировкой алгебры $L(J)$ и $\Delta_L(U) = 0$. Тогда алгебра J допускает* *структуру йордановой Д-биалгебры с коумножением* Δ*, причем коумножение* Δ_L *связано с* Δ.

Обратно, пусть пара (A, Δ) — ассоциативная Д-биалгебра, $A^{(+)}$ — присоединенная йорданова алгебра с умножением

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$$

и заданным на нем коумножением

$$\Delta^{(+)}(a) = \frac{1}{2}(\Delta(a) + \tau(\Delta(a))).$$

Тогда пара $(A^{(+)}, \Delta^{(+)})$ — йорданова Д-биалгебра. В работе [2] доказано, что на алгебре $L(A^{(+)})$ можно задать структуру биалгебры Ли с таким коумножением Δ_L, что Δ_L согласовано с градуировкой алгебры $L(A^{(+)})$, связано с $\Delta^{(+)}$ и $\Delta_L(U) = 0$. Для альтернативных алгебр имеет место

Теорема 1. *Пусть* $(\mathscr{C}, \Delta_r)$ *— треугольная альтернативная Д-биалгебра, пара* $(\mathscr{C}^{(+)}, \Delta_r^{(+)})$ *— присоединенная йорданова Д-биалгебра. Тогда структура этой йордановой Д-биалгебры индуцирует на алгебре* $L(\mathscr{C}^{(+)})$ *структуру треугольной биалгебры Ли* $(L(\mathscr{C}^{(+)}), \Delta_R)$*. При этом*

$$R = \sum_i a_i \otimes \bar{b}_i + \bar{a}_i \otimes b_i - a_i' \otimes b_i' + R_0,$$

где $R_0 \in (\mathrm{id} - \tau)(\mathrm{Intder}(\mathscr{C}^{(+)}) \otimes \mathrm{Intder}(\mathscr{C}^{(+)}))$.

Доказательство. Для доказательства теоремы с каждым решением $r = \sum\limits_i a_i \otimes b_i$ уравнения (4) надо связать $R_0 \in (\mathrm{id} - \tau)(\mathrm{Intder}(\mathscr{C}^{(+)}) \otimes \mathrm{Intder}(\mathscr{C}^{(+)}))$, так, чтобы элемент

$$R = \sum_i a_i \otimes \bar{b}_i + \bar{a}_i \otimes b_i - a_i' \otimes b_i' + R_0$$

был решением классического уравнения Янга — Бакстера в $L(\mathscr{C}^{(+)})$.

Эту задачу можно переформулировать на языке симплектических форм следующим образом: для каждой подалгебры B алгебры $\mathscr{C}$, на которой можно задать невырожденную симплектическую форму ω, найти такую подалгебру P в $\mathrm{Intder}(\mathscr{C}^{(+)})$, состоящую из $B^{(+)}$-инвариантных дифференцирований, для которой на подалгебре

$$B_L = B^{(+)} + (B^{(+)})' + [(B^{(+)})', (B^{(+)})'] + P + \overline{B^{(+)}}$$

алгебры $L(\mathscr{C}^{(+)})$ можно задать невырожденную симплектическую форму ω_L, удовлетворяющую условию

$$\omega_L(a_1 + b_1' + d_1 + \bar{c}_1, a_2 + b_2' + d_2 + \bar{c}_2) = -\omega(a_1, c_2) - \omega(c_1, a_2) + \omega(b_1, b_2) + \omega_L(d_1, d_2), \tag{5}$$

где $a_i, b_i, c_i \in B^{(+)}$, $i = 1, 2$; $d_i \in [B^{(+)}, B^{(+)}] + P$.

Нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть B — подалгебра в $\mathscr{C}$, на которой задана невырожденная симплектическая форма ω. Пусть P — подалгебра Ли в $\mathrm{Intder}(\mathscr{C}^{(+)})$, состоящая из $B^{(+)}$-инвариантных дифференцирований, и $[(B^{(+)})', (B^{(+)})'] \cap P = 0$. Предположим, что на алгебре $L = (B^{(+)})' + [(B^{(+)})', (B^{(+)})'] + P$ задана симплектическая форма ω_1, удовлетворяющая условиям*

$$\omega_1(a', b') = \omega(a, b);$$

$$\omega_1(a', D) = \omega_1(D, a') = 0$$

для любых $a, b \in B$, $D \in [(B^{(+)})', (B^{(+)})'] + P$. Тогда на алгебре

$$B_L = B^{(+)} + (B^{(+)})' + [(B^{(+)})', (B^{(+)})'] + P + \overline{B^{(+)}}$$

можно задать невырожденную симплектическую форму, удовлетворяющую условию (5).

Доказательство. Определим на алгебре B_L форму ω_L, полагая

$$\omega_L(a_1 + u_1 + \bar{c}_1, a_2 + u_2 + \bar{c}_2) = -\omega(a_1, c_2) - \omega(c_1, a_2) + \omega_1(u_1, u_2),$$

где $a_i, c_i \in B^{(+)}$, $u_i \in L$. Очевидно, что ω_L — кососимметрическая невырожденная билинейная форма. Пусть a, b, c — произвольные элементы из $B^{(+)}$, $D \in [(B^{(+)})', (B^{(+)})'] + P$. Тогда в силу симплектичности форм ω и ω_1 получаем

$$\begin{aligned}\omega_L([a, \bar{b}]_L, c' + D) &= \omega(a \circ b, c) - \omega_1([a', b'], D)\\ &= -\omega(b \circ c, a) - \omega(c \circ a, b) + \omega_1([b', D]_L, a') + \omega_1([D, a']_L, b')\\ &= \omega(-c \circ a - aD, b) + \omega(-b \circ c + bD, a) = -\omega_L([c' + D, a]_L, \bar{b}) - \omega_L([\bar{b}, c' + D]_L, a),\end{aligned}$$

откуда и следует искомый результат.

Лемма 2. *Пусть B — подалгебра в $\mathscr{C}$, на которой задана невырожденная симплектическая форма ω. Пусть P — подалгебра Ли в $\mathrm{Intder}(\mathscr{C}^{(+)})$, состоящая из $B^{(+)}$-инвариантных дифференцирований и такая, что $[(B^{(+)})', (B^{(+)})'] \cap P = 0$. Определим на алгебре $L = (B^{(+)})' + [(B^{(+)})', (B^{(+)})'] + P$ форму ω_1, полагая для любых $a, b, c, d, e, f \in B^{(+)}$, $D, D_1, D_2 \in P$*

$$\omega_1(a' + [c', d'], b' + [e', f']) = \omega(a, b) + \omega((e, c, f)^{(+)}, d) + \omega(c, (e, d, f)^{(+)});$$

$$\omega_1(a' + [b', c'], D) = \omega_1((cD)', b') - \omega_1((bD)', c');$$

$$\omega_1(D, a' + [b', c']) = -\omega_1(a' + [b', c'], D);$$

$$\omega_1(D_1, D_2) = 0.$$

Здесь $(a, b, c)^{(+)}$ обозначает ассоциатор в алгебре $\mathscr{C}^{(+)}$. Тогда форма ω_1 является симплектической на алгебре L.

Доказательство. По предложению 2 из [12] данная форма является симплектической на подалгебре $(B^{(+)})' + [(B^{(+)})', (B^{(+)})']$.

Очевидно, что ω_1 является билинейной кососимметрической формой. По определению формы имеем

$$\omega_1([a', x]_L, D) + \omega_1([x, D]_L, a') + \omega_1([D, a']_L, x) = 0 \tag{6}$$

для любых $a \in B, D \in [(B^{(+)})', (B^{(+)})'] + P$, $x \in L$.

Так как P является подалгеброй и $\omega_1(D_i, D_j) = 0$ для любых $D_i, D_j \in P$, то $\omega_1([D_1, D_2]_L, D_3) + \omega_1([D_2, D_3]_L, D_1) + \omega_1([D_3, D_1]_L, D_2) = 0$ для любых $D_1, D_2, D_3 \in P$.

Учитывая равенство (6) и тот факт, что $[[a', b'], D] = [(aD)', b'] + [a', (bD)']$, имеем

$$\begin{aligned}\omega_1([[a', b'], D_1]_L, D_2) &+ \omega_1([D_1, D_2]_L, [a', b']) + \omega_1([D_2, [a', b']]_L, D_1)\\ = \omega_1((aD_1)', (bD_2)') &+ \omega_1((aD_1D_2)', b') + \omega_1(a', (bD_1D_2)') + \omega_1((aD_2)', (bD_1)')\\ &+ \omega_1((b[D_1, D_2])', a') + \omega_1(b', (a[D_1, D_2])') - \omega_1(a', (bD_2D_1)')\\ &- \omega_1((aD_1)', (bD_2)') - \omega_1((aD_2)', (bD_1)') - \omega_1((aD_2D_1)', b') = 0,\end{aligned}$$

для любых $a, b \in B^{(+)}$, $D_1, D_2 \in [(B^{(+)})', (B^{(+)})'] + P$. Поэтому

$$\omega_1([D_1, D_2]_L, D_3) + \omega_1([D_2, D_3]_L, D_1) + \omega_1([D_3, D_1]_L, D_2) = 0$$

для любых $D_1, D_2, D_3 \in [(B^{(+)})', (B^{(+)})'] + P$. Лемма доказана.

В работе [9] описаны все подалгебры в $\mathscr{C}$, на которых можно задать невырожденную симплектическую форму. Докажем, что в каждом из этих случаев можно найти подалгебру P в $\mathrm{Intder}(\mathscr{C}^{(+)})$, удовлетворяющую условию леммы 2, такую, чтобы форма ω_1 была невырожденной.

Случай 1. Подалгебра B изоморфна подалгебре с базисом $\{e_{11}, e_{12}\}$. Рассмотрим элемент $T_0 = [e'_{12}, e'_{21}]$. Так как $e_{11}T_0 = 0$ и $e_{12}T_0 = -\frac{1}{2}e_{12}$, то $B^{(+)}$ является D_0-инвариантной. Пусть P — алгебра, порожденная элементом T_0. По определению формы ω_1 имеем $\omega_1([e'_{11}, e'_{12}], [e'_{12}, e'_{21}]) = -2\omega(e_{11}, e_{12}) \neq 0$. Поэтому форма ω_1 является невырожденной и по леммам 1 и 2 на алгебре $B_L = B^{(+)} + (B^{(+)})' + [(B^{(+)})', (B^{(+)})'] + P + \overline{B^{(+)}}$ можно задать невырожденную симплектическую форму, удовлетворяющую условию (5).

Случай 2. Подалгебра B изоморфна подалгебре с базисом e_{11}, e_{21}. Аналогично случаю 1 в качестве базиса P надо взять тот же элемент $T_0 = [e'_{12}, e'_{21}]$.

Случай 3. Подалгебра B изоморфна подалгебре с базисом e_{12}, ve_{11}. Аналогично случаям 1 и 2 в качестве базиса P можно опять взять то же дифференцирование $T_0 = [e'_{12}, e'_{21}]$.

Случай 4. Пусть B подалгебра с базисом $\{e_{11}, e_{12}, ve_{11}, ve_{12}\}$, ω — симплектическая форма на B. Рассмотрим множества дифференцирований:

$$T_1 = -2[e'_{12}, e'_{21}]:\ e_{12}T_1 = e_{12};\ e_{21}T_1 = -e_{21},$$

$$T_2 = 2[e'_{21}, ve'_{11}]:\ e_{12}T_2 = ve_{11};\ ve_{22}T_2 = -e_{21},$$

$$T_3 = 2[e'_{21}, ve'_{12}]:\ e_{12}T_3 = ve_{12},\ ve_{21}T_3 = e_{21},$$

$$S_1 = -2[e'_{12}, ve'_{22}]:\ ve_{11}S_1 = e_{12},\ e_{21}S_1 = -ve_{22},$$

$$S_2 = -2[ve'_{11}, ve'_{22}]:\ ve_{11}S_2 = ve_{11},\ ve_{22}S_2 = ve_{22},$$

$$S_3 = -2[ve'_{12}, ve'_{22}]:\ ve_{11}S_3 = ve_{12},\ ve_{21}S_3 = ve_{22},$$

$$Q_1 = 2[e'_{12}, ve'_{21}]:\ ve_{12}Q_1 = e_{12},\ e_{21}Q_1 = ve_{21},$$

$$Q_2 = 2[ve'_{11}, ve'_{21}],\ ve_{12}Q_2 = ve_{11},\ ve_{22}Q_2 = ve_{21},$$

$$Q_3 = 2[ve'_{12}, ve'_{21}]:\ ve_{12}Q_3 = ve_{12},\ ve_{21}Q_3 = -ve_{21}.$$

Здесь обозначены только те элементы, на которых дифференцирования действуют ненулевым образом. Как легко видеть, приведенные дифференцирования линейно независимы, и подпространство, порожденное этими дифференцированиями, является подалгеброй в $\mathrm{Intder}(\mathscr{C}^{(+)})$, которую мы обозначим через H. Ясно, что H состоит из $B^{(+)}$-инвариантных дифференцирований.

Рассмотрим элементы e_{12}, ve_{11}, ve_{12}. Из невырожденности формы ω следует, что существуют такие линейно независимые элементы $e_1, e_2, e_3 \in e_{12}F \oplus ve_{11}F \oplus ve_{12}F$, что $\omega(e_{11}, e_1) \neq 0$, $\omega(e_2, e_3) \neq 0$, $\omega(e_{11}, e_2) = \omega(e_{11}, e_3) = \omega(e_1, e_2) = 0$.

Введем обозначения $D_1 = [e'_{11}, e'_1]$, $D_2 = [e'_{11}, e'_2]$, $D_3 = [e'_{11}, e'_3]$, $D_4 = [e'_1, e'_2]$, $D_5 = [e'_1, e'_3]$, $D_6 = [e'_2, e'_3]$.

В H можно выбрать такие линейно независимые дифференцирования B_0, B_1, B_2, B_3, для которых

$$e_1B_0 = e_1, \quad e_2B_0 = e_2, \quad e_3B_0 = e_3,$$

$$e_1B_1 = e_3, \quad e_2B_1 = e_3B_1 = 0,$$
$$e_1B_2 = e_2, \quad e_2B_2 = e_3B_2 = 0,$$
$$e_1B_3 = e_3B_3 = 0, \quad e_2B_3 = e_2.$$

При этом B_0, B_1, B_2, B_3 образуют подалгебру, которую обозначим через P. Докажем, что она является искомой. Для этого достаточно доказать, что ограничение формы ω_1 на алгебру $[(B^{(+)})', (B^{(+)})'] \oplus P$ является невырожденным.

Имеют место следующие соотношения:

$$\omega_1(D_1, D_2) = -\omega(e_1, e_2), \quad \omega_1(D_1, D_3) = -\omega(e_1, e_3),$$
$$\omega_1(D_1, D_4) = \omega_1(D_1, D_5) = \omega_1(D_1, D_6) = 0,$$
$$\omega_1(D_2, D_3) = -\omega(e_2, e_3), \quad \omega_1(D_2, D_4) = \omega_1(D_2, D_5) = \omega_2(D_2, D_6) = 0,$$
$$\omega_1(D_3, D_4) = \omega_1(D_3, D_5) = \omega_1(D_3, D_6) = 0,$$
$$\omega_1(D_4, D_5) = \omega_1(D_4, D_6) = \omega(D_5, D_6) = 0,$$
$$\omega_1(D_1, B_0) = -\omega(e_1, e_{11}),\ \omega_1(D_2, B_0) = -\omega(e_2, e_{11}),\ \omega_1(D_3, B_0) = -\omega(e_3, e_{11}),$$
$$\omega_1(D_4, B_0) = 2\omega(e_1, e_2) = 0,\ \omega_1(D_5, B_0) = 2\omega(e_1, e_3),\ \omega_1(D_6, B_0) = 2\omega(e_2, e_3).$$

Учитывая тот факт, что $\omega(e_{11}, e_2) = \omega(e_{11}, e_3) = \omega(e_1, e_2) = 0$, имеем

$$\omega_1(D_1, B_1) = \omega(e_3, e_{11}) = 0, \quad \omega_1(D_2, B_1) = \omega_1(D_3, B_1) = 0,$$
$$\omega_1(D_4, B_1) = -\omega(e_2, e_3), \quad \omega_1(D_5, B_1) = \omega_1(D_6, B_1) = 0,$$
$$\omega_1(D_1, B_2) = \omega(e_2, e_{11}) = 0, \quad \omega_1(D_2, B_2) = \omega_1(D_3, B_2) = 0,$$
$$\omega_1(D_4, B_2) = 0, \quad \omega_1(D_5, B_2) = \omega(e_2, e_3), \quad \omega_1(D_6, B_2) = 0,$$
$$\omega_1(D_1, B_3) = 0, \quad \omega_1(D_2, B_3) = \omega(e_{11}, e_2) = 0, \quad \omega_1(D_3, B_3) = 0,$$
$$\omega_1(D_4, B_3) = \omega(e_1, e_2) = 0, \quad \omega_1(D_5, B_3) = 0, \quad \omega_1(D_6, B_3) = \omega(e_2, e_3).$$

Форма ω_1 является невырожденной.

Случай 5. Аналогично случаю 4.

Теорема доказана.

Замечание. Заметим, что коумножение Δ_R согласовано с градуировкой алгебры $L(\mathscr{C}^{(+)})$, связано с $\Delta_r^{(+)}$ и $\Delta_R(U) = 0$.

Аналогично теореме 2 и лемме 6 из [7] доказываются следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть A — простая альтернативная алгебра над F. Предположим, что на A задана структура альтернативной Д-биалгебры с коумножением Δ. Пусть N — ниль-радикал алгебры $D(A)$. Тогда $N \neq 0$, $N^2 = 0$ и $D(A) = A + N$.*

Утверждение 2. *Пусть A — простая альтернативная алгебра над F. Предположим, что на A задана структура альтернативной Д-биалгебры с коумножением Δ. Тогда существует такой элемент r из $(\mathrm{id} - \tau)(A \otimes A)$, что $C_A(r) = 0$ и $\Delta = \Delta_r$.*

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть A — конечномерная простая альтернативная алгебра над алгебраически замкнутым полем. Предположим, что пара (A, Δ) является альтернативной Д-биалгеброй, пара $(A^{(+)}, \Delta^{(+)})$ — присоединенная йорданова Д-биалгебра. Тогда на алгебре $L(A^{(+)})$ можно задать структуру биалгебры Ли с таким коумножением Δ_L, что Δ_L согласовано с градуировкой алгебры $L(A^{(+)})$, связано с $\Delta^{(+)}$ и $\Delta_L(U) = 0$.*

Доказательство следует из утверждения 2, теоремы 3 в [2] и теоремы 1.

Следующий пример показывает, что в общем случае утверждение теоремы 2 неверно.

Пример 1. Пусть $\mathscr{C}$ — матричная алгебра Кэли — Диксона над полем комплексных чисел. Рассмотрим альтернативную алгебру $A = \mathscr{C} \oplus (\mathscr{C})_1 \oplus (\mathscr{C})_2$ (прямая сумма алгебр), где $(\mathscr{C})_i$, $i = 1, 2$, являются изоморфными копиями алгебры $\mathscr{C}$. Элементы $e_{12}, ve_{11}, (e_{12})_1, (e_{12})_2$ образуют в A подалгебру с нулевым умножением, поэтому элемент $r = e_{12} \otimes (e_{12})_1 + ve_{11} \otimes (e_{12})_2 - (e_{12})_1 \otimes ve_{12} - (e_{12})_2 \otimes ve_{11}$ является антисимметричным решением (4). Следовательно, пара (A, Δ_r) — альтернативная Д-биалгебра.

Рассмотрим йорданову Д-биалгебру $(A^{(+)}), \Delta^{(+)})$. Так как алгебра $\mathscr{C}^{(+)}$ проста, алгебра $A^{(+)}$ будет полупростой йордановой алгеброй. Известно, что у полупростой йордановой алгебры все дифференцирования являются внутренними. Поэтому для любого $D \in \mathrm{Der}(A^{(+)})$ справедливо включение $D(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{C}$.

Заметим, что как векторное пространство $A^{(+)}$ будет изоморфно пространству $A^{(+)'}$ правых умножений.

Предположим, что на алгебре $L(A^{(+)})$ можно задать коумножение Δ_L такое, что пара $(L(A^{(+)}), \Delta_L)$ является биалгеброй Ли, причем коумножение Δ_L согласовано с градуировкой алгебры $L(A^{(+)})$, связано с $\Delta^{(+)}$ и $\Delta_L(U) = 0$. Так как алгебра $A^{(+)}$ является полупростой йордановой алгеброй, то алгебра $L(A^{(+)})$ полупроста. Следовательно, $(L(A^{(+)}), \Delta_L)$ является квазитреугольной биалгеброй Ли, т. е. существует

$$R = \sum_i X_i \otimes Y_i \in (\mathrm{id} - \tau)(L(A^{(+)}) \otimes L(A^{(+)}))$$

такой, что $\Delta_L(a) = [R, a]$ для любого $a \in L(A^{(+)})$. При этом элемент

$$C_{L(A^{(+)})}(R) = \sum_{ij} [X_i, X_j] \otimes Y_i \otimes Y_j + Y_i \otimes Y_j \otimes [X_i, X_j] + Y_j \otimes [X_i, X_j] \otimes Y_i$$

должен быть ad-инвариантным.

Из условия $\Delta_L(U) = 0$ получаем, что

$$R = \sum_i a_i \otimes \bar{b}_i - \bar{b}_i \otimes a_i - (a_i)' \otimes (b_i)' + R_0,$$

где $a_i, b_i \in A^{(+)}$, $R_0 \in (\mathrm{id} - \tau)(\mathrm{Der}(A^{(+)}) \otimes \mathrm{Der}(A^{(+)}))$.

Пусть $r_1 = \sum\limits_i a_i \otimes b_i$. Так как $R \in (\mathrm{id} - \tau)(L(A^{(+)}) \otimes L(A^{(+)}))$, то $r_1 \in (\mathrm{id} - \tau)(A^{(+)} \otimes A^{(+)})$. Из того, что коумножение Δ_L связано с $\Delta_r^{(+)}$, получаем, что $\Delta_r = \Delta_{r_1}$. Пусть $e, (e)_1, (e)_2$ — единицы алгебр $\mathscr{C}$, $(\mathscr{C})_1$ и $(\mathscr{C})_2$ соответственно. Имеем

$$\Delta_r^{(+)}(e) = e_{12} \otimes (e_{12})_1 + ve_{11} \otimes (e_{12})_2 + (e_{12})_1 \otimes ve_{12} + (e_{12})_2 \otimes ve_{11},$$

$$\Delta_{r_1}(e) = \sum_i a_i \circ e \otimes b_i - a_i \otimes e \circ b_i.$$

Так как для любых $a \in A^{(+)}$ будет $a \circ e \in \mathscr{C}$, из равенства $\Delta_r^{(+)}(e) = \Delta_{r_1}(e)$ следует, что

$$\sum_i a_i \circ e \otimes b_i = e_{12} \otimes (e_{12})_1 + ve_{11} \otimes (e_{12})_2.$$

Аналогично из равенств $\Delta_r^{(+)}((e)_1) = \Delta_{r_1}((e)_1)$ и $\Delta_r^{(+)}((e)_2) = \Delta_{r_1}((e)_2)$ вытекает, что

$$\sum_i a_i \circ (e)_1 \otimes b_i = -(e)_1 \otimes e_{12} \quad \text{и} \quad \sum_i a_i \circ (e)_2 \otimes b_i = -(e)_2 \otimes ve_{11}.$$

Складывая полученные равенства, получаем, что $r_1 = r$. Таким образом,

$$\begin{aligned} R = e_{12} \otimes \overline{(e_{12})_1} + ve_{11} \otimes \overline{(e_{12})_2} - (e_{12})_1 \otimes \overline{e_{12}} - (e_{12})_2 \otimes \overline{ve_{11}} \\ -\overline{(e_{12})_1} \otimes e_{12} - \overline{(e_{12})_2} \otimes ve_{11} + \overline{e_{12}} \otimes (e_{12})_1 + \overline{ve_{11}} \otimes (e_{12})_2 - e_{12}' \otimes (e_{12})_1' - ve_{11}' \otimes (e_{12})_2' \\ + (e_{12})_1' \otimes ve_{12}' + (e_{12})_2' \otimes ve_{11}' + \sum_i D_i \otimes Q_i, \end{aligned}$$

где $D_i, Q_i \in \mathrm{Der}(A^{(+)})$.

Для элемента $C_{L(A^{(+)})}(R)$ будем иметь

$$\begin{aligned} C_{L(A^{(+)})}(R) = (\mathrm{id} + \xi + \xi^2)(-[e_{12}', ve_{11}'] \otimes \overline{(e_{12})_1} \otimes (e_{12})_2 + \sum_i D_i(e_{12}) \otimes \overline{(e_{12})_1} \otimes Q_i \\ + [e_{12}', ve_{11}'] \otimes \overline{(e_{12})_2} \otimes (e_{12})_1 + \sum_i D_i(ve_{11}) \otimes \overline{(e_{12})_2} \otimes Q_i - \sum_i D_i((e_{12})_1) \otimes \overline{e_{12}} \otimes Q_i \\ - \sum_i D_i((e_{12})_2) \otimes \overline{ve_{11}} \otimes Q_i - \sum_i \overline{D_i((e_{12})_1)} \otimes e_{12} \otimes Q_i - \sum_i \overline{D_i((e_{12})_2)} \otimes ve_{11} \otimes Q_i \\ - [e_{12}', ve_{11}'] \otimes (e_{12})_1 \otimes \overline{(e_{12})_2} - \sum_i \overline{D_i(e_{12})} \otimes (e_{12})_1 \otimes Q_i + [e_{12}', ve_{11}'] \otimes (e_{12})_2 \otimes \overline{(e_{12})_1} \\ + \sum_i \overline{D_i(ve_{11})} \otimes (e_{12})_2 \otimes Q_i + [e_{12}', ve_{11}'] \otimes (e_{12})_1' \otimes (e_{12})_2' - \sum_i D_i(e_{12})' \otimes (e_{12})_1' \otimes Q_i \\ - [e_{12}', ve_{11}'] \otimes (e_{12})_2' \otimes (e_{12})_1' - \sum_i D_i(ve_{11})' \otimes (e_{12})_2' \otimes Q_i + \sum_i D_i((e_{12})_1)' \otimes e_{12}' \otimes Q_i \\ + \sum_i \overline{D_i((e_{12})_2)} \otimes ve_{11} \otimes Q_i + \sum_i D_i((e_{12})_2)' \otimes ve_{11}' \otimes Q_i - \sum_i D_i(e_{12}) \otimes Q_i \otimes \overline{(e_{12})_1} \\ - \sum_i D_i(ve_{11}) \otimes Q_i \otimes \overline{(e_{12})_2} + \sum_i D_i((e_{12})_1) \otimes Q_i \otimes \overline{e_{12}} + \sum_i D_i((e_{12})_2) \otimes Q_i \otimes \overline{ve_{11}} \end{aligned}$$

$$+\sum_i \overline{D_i((e_{12})_1)}\otimes Q_i\otimes e_{12}+\sum_i \overline{D_i((e_{12})_2)}\otimes Q_i\otimes ve_{11}-\sum_i \overline{D_i(e_{12})}\otimes Q_i\otimes (e_{12})_1$$
$$-\sum_i \overline{D_i(ve_{11})}\otimes Q_i\otimes (e_{12})_2+\sum_i D_i(e_{12})'\otimes Q_i\otimes (e_{12})'_1+\sum_i D_i(ve_{11})'\otimes Q_i\otimes (e_{12})'_2$$
$$-\sum_i D_i((e_{12})_1)'\otimes Q_i\otimes e'_{12}-\sum_i D_i((e_{12})_2)'\otimes Q_i\otimes ve'_{11}+\sum_{i,j}[D_i,D_j]\otimes Q_i\otimes Q_j).$$

Так как элемент $C_{L(A^{(+)})}(R)$ является ad-инвариантным, то

$$0=[C_{L(A^{(+)})}(R),(e)_1]$$
$$=(\mathrm{id}+\xi+\xi^2)([e'_{12},ve'_{11}]\otimes(e_{12})'_1\otimes(e_{12})_2-\sum_i D_i(e_{12})\otimes(e_{12})'_1\otimes Q_i$$
$$+\sum_i D_i((e_{12})_1)'\otimes e_{12}\otimes Q_i-[e'_{12},ve'_{11}]\otimes(e_{12})_2\otimes(e_{12})'_1-[e'_{12},ve'_{11}]\otimes(e_{12})_1\otimes(e_{12})'_2$$
$$+\sum_i D_i(e_{12})'\otimes(e_{12})_1\otimes Q_i+[e'_{12},ve'_{11}]\otimes(e_{12})'_2\otimes(e_{12})_1-\sum_i D_i((e_{12})_1)\otimes e'_{12}\otimes Q_i$$
$$+\sum_i D_i(e_{12})\otimes Q_i\otimes(e_{12})'_1-\sum_i (D_i((e_{12})_1))'\otimes Q_i\otimes e_{12}-\sum_i D_i(e_{12})'\otimes Q_i\otimes(e_{12})_1$$
$$+\sum_i D_i((e_{12})_1)\otimes Q_i\otimes e'_{12}).$$

Пусть $P: L(A^{(+)})\otimes L(A^{(+)})\otimes L(A^{(+)})\longrightarrow \mathrm{Der}(A^{(+)})\otimes(A^{(+)})'\otimes A^{(+)}$ — проекция. Имеем

$$P([C_{L(A^{(+)})}(R),(e)_1])=[e'_{12},ve'_{11}]\otimes(e_{12})'_1\otimes(e_{12})_2+\sum_i Q_i\otimes D_i((e_{12})_1)'\otimes e_{12}$$
$$+\sum_i Q_i\otimes D_i(e_{12})'\otimes(e_{12})_1+[e'_{12},ve'_{11}]\otimes(e_{12})'_2\otimes(e_{12})_1+\sum_i Q_i\otimes(e_{12})'_1\otimes D_i(e_{12})$$
$$+\sum_i Q_i\otimes e'_{12}\otimes D_i((e_{12})_1)=0.$$

Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы

$$\sum_i Q_i\otimes(e_{12})'_1\otimes D_i(e_{12})=-[e'_{12},ve'_{11}]\otimes(e_{12})'_1\otimes(e_{12})_2+\dots,$$

что, в свою очередь, возможно, только если $D_i(e_{12})=(e_{12})_2+c$ для некоторого i, где $c\in A^{(+)}$. Противоречие с тем, что $D_i(\mathscr{C})\subseteq\mathscr{C}$.

§ 3. Альтернативные алгебры, допускающие нетривиальную структуру альтернативной Д-биалгебры

Определение. Пусть A — произвольная F-алгебра с коумножением Δ и $\Delta(z)=\tau\Delta(z)$ для любого центрального элемента z. Тогда будем говорить, что коумножение Δ *кокоммутативно* на центре.

Если A — альтернативная алгебра и $r\in(\mathrm{id}-\tau)(A\otimes A)$, то коумножение Δ_r кокоммутативно на центре. Действительно, пусть z — центральный элемент алгебры A. Тогда

$$\Delta_r(z)=\sum_i a_iz\otimes b_i-a_i\otimes zb_i=-\sum_i b_iz\otimes a_i+b_i\otimes za_i=\tau(\Delta(z)).$$

В работе [3] доказано, что любая ассоциативная некоммутативная конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем допускает нетривиальную структуру ассоциативной Д-биалгебры с кокоммутативным на центре коумножением. Следующая теорема обобщает данный результат на случай альтернативных Д-биалгебр, когда характеристика поля не равна 2.

Теорема 3. *Пусть A — альтернативная неассоциативная конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики, не равной 2. Тогда существует элемент $r \in (\mathrm{id} - \tau)(A \otimes A)$ такой, что пара (A, r) является квазитреугольной альтернативной Д-биалгеброй, причем коумножение Δ_r не является тривиальным.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть для алгебры A не существует такого элемента r. Тогда алгебра A не содержит в качестве подалгебр алгебру F_n $n \times n$-матриц, $n \geq 2$, так как в противном случае можно определить элемент $r = e_{11} \otimes e_{12} - e_{12} \otimes e_{11}$, для которого $r_{23}r_{12} = e_{12} \otimes e_{12} \otimes e_{11} - e_{12} \otimes e_{11} \otimes e_{12}$. Поэтому

$$C_A(r) = (\mathrm{id} + \xi + \xi^2) r_{23} r_{12} = 0.$$

Но $\Delta_r(e_{11}) = e_{12} \otimes e_{11} \neq 0$; противоречие.

По теореме Маккриммона [14] $A = B \oplus N$ (полупрямая сумма), где B — полупростая подалгебра и N — наибольший нильпотентный идеал. Так как алгебра A не содержит матричных подалгебр, то либо $B = Fe_1 \oplus \dots \oplus Fe_k$ — прямая сумма полей, либо $B = 0$. Поскольку алгебра A неассоциативна, в каждом из этих случаев $N \neq 0$.

Покажем, что B принадлежит коммутативному центру алгебры A. Пусть a — элемент из N такой, что коммутатор $[e_i, a]$ отличен от нуля для некоторого идемпотента e_i. Так как $[e_i, a] = e_i[e_i, a] + [e_i, a]e_i$, то либо $e_i[e_i, a] \neq 0$, либо $[e_i, a]e_i \neq 0$. Предположим для определенности, что $b = e_i[e_i, a] \neq 0$. Тогда $be_i = 0, e_ib = b, b^2 = be_ib = 0$. Рассмотрим элемент $r = e_i \otimes b - b \otimes e_i$. Имеем $r_{23}r_{12} = e_i \otimes b \otimes b - b \otimes e_i \otimes b$ и $C_A(r) = 0$. При этом $\Delta_r(e_i) = e_i \otimes b \neq 0$; противоречие. Поэтому $e_i[e_i, a] = 0$. Аналогично $[e_i, a]e_i = 0$. Но тогда $[e_i, a] = 0$, т. е. B принадлежит центру алгебры A.

Поскольку N является идеалом в A, то $N = \sum\limits_{ij} N_{ij}$ $(i, j = 0, \dots, k)$, где

$$N_{ij} = \{x_{ij} \in N \mid e_l x_{ij} = \delta_{li} x_{ij},\ x_{ij} e_l = \delta_{jl} x_{ij}\}$$

— пирсовское разложение N относительно системы ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_k$, δ_{ij} — символ Кронекера (см. [15, гл. 3, § 2]). Так как B принадлежит коммутативному центру, то $N_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Отсюда следует, что $N = N_0 \oplus N_1 \oplus \ldots \oplus N_k$, где $N_0 = \{x \in N \mid xe_i = 0$ для любого $e_i\}$ и $N_i = \{x \in N \mid xe_i = x\}$.

Как показано в [15, с. 33], в любой альтернативной алгебре для любых ортогональных идемпотентов e_i и e_j и произвольного элемента x ассоциатор (e_i, e_j, x) равен 0. Несложно видеть, что для любых $x \in N_k$, $y \in N_l$ и произвольного идемпотента e_i ассоциатор (x, y, e_i) равен 0. Следовательно, B принадлежит ассоциативному центру алгебры A.

Так как алгебра A не является ассоциативной, то $N^3 \neq 0$. Следовательно, существует $i \in \{0, \dots, k\}$ такой, что $N_i^3 \neq 0$. Пусть $N_i^k = 0$, $k \geq 4$. Рассмотрим произвольный $a \in N_i$. Допустим, что $a^3 \neq 0$.

Пусть $a^l = 0$ и $a^{l-1} \neq 0$, $4 \leq l \leq k$. Пусть $\mathrm{Ann}\, N_i = \{x \in N_i \mid N_i x = x N_i = 0\}$. Так как N_i нильпотентный, то $\mathrm{Ann}\, N_i \neq 0$. Пусть $b \in \mathrm{Ann}\, N_i$. Рассмотрим элемент $r = a^{l-2} \otimes b - b \otimes a^{l-2}$. Поскольку $l \geq 4$, элементы a^{l-2} и b образуют подалгебру с нулевым умножением. Поэтому $C_A(r) = 0$. Следовательно, для любого $c \in N_i$ имеем $\Delta_r(c) = a^{l-2}c \otimes b + b \otimes ca^{l-2} = 0$. Отсюда $a^{l-2}c = \alpha b$ и $ca^{l-2} = -\alpha b$, где $\alpha \in F$. В частности, полагая $c = a$, имеем $a^{l-1} = -a^{l-1}$, и так как характеристика поля F не равна двум, то $a^{l-1} = 0$; противоречие. Поэтому $a^3 = 0$ для любого $a \in N_i$.

Пусть $a \in N_i$, $b \in \operatorname{Ann} N_i$. Рассмотрим элемент $r = a^2 \otimes b - b \otimes a^2$. Легко видеть, что $C_A(r) = 0$. Поэтому $\Delta_r(c) = 0$ для любого $c \in N_i$. Отсюда следует, что

$$a^2c = \alpha b, \quad ca^2 = -\alpha b, \tag{7}$$

где $\alpha \in F$. Из произвольности элементов a и c получаем, что $x^2y, yx^2 \in \operatorname{Ann} N_i$ для любых $x, y \in N_i$.

Зафиксируем произвольный элемент $c \in N_i$. Рассмотрим $r_1 = aca \otimes b - b \otimes aca$. Так как $(aca)^2 = aca^2ca = 0$, то $C_A(r_1) = 0$. Следовательно, $\Delta_{r_1}(c) = 0$ для любого $c \in A$. Отсюда $acac = \varphi b$, $caca = -\varphi b$, где $\varphi \in F$.

Рассмотрим элемент $r' = ac \otimes b - b \otimes ac$. Для него $r'_{23}r'_{12} = -b \otimes (ac)^2 \otimes b = -\varphi b \otimes b \otimes b$. Поэтому $C_A(r') = -3\varphi b \otimes b \otimes b$. Покажем, что для любого c из A имеет место равенство

$$C_A(r')(c \otimes 1 \otimes 1) - (1 \otimes 1 \otimes c)C_A(r') = 0.$$

Так как $C_A(r') \in N_i \otimes N_i \otimes N_i$, достаточно проверить это равенство для $c \in N_i$. Поскольку $C_A(r') \in \operatorname{Ann} N_i \otimes \operatorname{Ann} N_i \otimes \operatorname{Ann} N_i$, то

$$C_A(r')(N_i \otimes 1 \otimes 1) = (1 \otimes 1 \otimes N_i)C_A(r') = 0.$$

Следовательно, пара (A, r') является альтернативной Д-биалгеброй. Но тогда $\Delta_{r'}(a) = 0$, а это эквивалентно тому, что $aca = \gamma b$, $a^2c = -\gamma b$, $\gamma \in F$. Используя равенство (7), получаем, что $\gamma = -\alpha$ и окончательно

$$aca = -\alpha b. \tag{8}$$

Отсюда следует, что $(ac)^2 = (ca)^2 = 0$.

Так как $a^2c, c^2a \in \operatorname{Ann} N_i$, то $(ca)(ac) = (ac)(ca) = 0$. Поэтому элементы ac и ca порождают подалгебру с нулевым умножением и для элемента $r_2 = ac \otimes ca - ca \otimes ac$ имеем $C_A(r_2) = 0$. Следовательно, $\Delta_{r_2}(a) = 0$. Ввиду равенств (7) и (8)

$$\begin{aligned}\Delta_{r_2}(a) &= aca \otimes ca - ca^2 \otimes ac - ac \otimes aca + ca \otimes a^2c \\ &\quad - \alpha b \otimes ca + \alpha b \otimes ac + \alpha ac \otimes b + \alpha ca \otimes b = \alpha(b \otimes (ac - ca) + (ac + ca) \otimes b).\end{aligned}$$

Если $\alpha \neq 0$, то $ac - ca = \beta b$, $ac + ca = -\beta b$, $\beta \in F$. Отсюда, так как характеристика поля не равна 2, $ac = 0$. Противоречие с тем, что $\alpha \neq 0$. Следовательно, $\alpha = 0$, и $a^2 \in \operatorname{Ann} N_i$ для любого $a \in N_i$.

Покажем, что $N_i^3 = 0$. Действительно, пусть $a \in N_i$, $b \in \operatorname{Ann} N_i$ и $r_3 = a \otimes b - b \otimes a$. Легко видеть, что $C_A(r_3) \in \operatorname{Ann} N_i \otimes \operatorname{Ann} N_i \otimes \operatorname{Ann} N_i$. Поэтому для любого элемента $c \in A$

$$C_A(r_3)(c \otimes 1 \otimes 1) - (1 \otimes 1 \otimes c)C_A(r_2) = 0.$$

Отсюда следует, что $\Delta_{r_3}(c) = 0$ для любого $c \in N_i$. Следовательно, $ac \in \operatorname{Ann} N_i$ и $N_i^3 = 0$ для любых $a, c \in N_i$; противоречие. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и теоремы 2 из [3] следует

Теорема 4. *Пусть A — альтернативная некоммутативная конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики, не равной 2. Тогда A допускает нетривиальную структуру альтернативной Д-биалгебры с кокоммутативным на центре коумножением.*

Замечание. Как показывает следующий пример, на ассоциативной некоммутативной алгебре не всегда можно задать структуру нетривиальной квазитреугольной ассоциативной Д-биалгебры.

Пример 2. Пусть W — трехмерная алгебра с базисом a, b, c над полем F и таблицей умножения

$$a^2 = b^2 = c^2 = 0, \quad ab = -ba = c, \quad ac = bc = ca = cb = 0. \tag{9}$$

Легко видеть, что $(W, W, W) = 0$, поэтому W является ассоциативной нильпотентной алгеброй и индекс нильпотентности ее равен трем. Также из (9) следует, что алгебра W является антикоммутативной и $W^2 = \operatorname{Ann} W = Fc$.

Лемма 3. *Пусть элемент $r \in W \otimes W$ такой, что $\tau(r) = -r$, и пара (W, r) — квазитреугольная ассоциативная Д-биалгебра. Тогда $\Delta_r(w) = 0$ для любого элемента $w \in W$.*

Доказательство. Предположим противное. Так как $\tau(r) = -r$, можно считать, что $r = \alpha a \otimes b - \alpha b \otimes a + c \otimes c_1 - c_1 \otimes c$.

Предположим, что $\alpha = 0$. Тогда для любого $w \in W$ в силу (9) имеем

$$\Delta_r(w) = [r, w] = -c_1 w \otimes c - c \otimes w c_1 = 0;$$

противоречие с предположением. Поэтому можно считать, что $\alpha = 1$.

По предложению 1 из [3] для любого элемента $w \in W$ имеет место равенство

$$(1 \otimes 1 \otimes w) C_W(r) = C_W(r)(w \otimes 1 \otimes 1).$$

Проводя необходимые вычисления, получим

$$(1 \otimes 1 \otimes a) C_W(r) = -ba \otimes a \otimes ab - c_1 a \otimes c \otimes ab - a \otimes ab \otimes ab - c \otimes ac_1 \otimes ab,$$

$$C_W(r)(a \otimes 1 \otimes 1) = -ba \otimes a \otimes ab - ba \otimes c \otimes ac_1 - ba \otimes ba \otimes a - ba \otimes c_1 a \otimes c,$$

$$(1 \otimes 1 \otimes a) C_W(r) - C_W(r)(a \otimes 1 \otimes 1) = -a \otimes ab \otimes ab + ba \otimes ba \otimes a \neq 0;$$

противоречие.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дринфельд В. Г.* Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга — Бакстера // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 2. С. 285–287.
2. *Желябин В. Н.* Йордановы биалгебры и их связь с биалгебрами Ли // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 3–25.
3. *Желябин В. Н.* Йордановы биалгебры симметрических элементов и биалгебры Ли // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 299–308.
4. *Joni S. A., Rota G. C.* Coalgebras and bialgebras in combinatorics // Stud. Appl. Math. 1979. V. 61. P. 93–139.
5. *Aguiar M.* On the associative analog of Lie bialgebras // J. Algebra. 2001. V. 244. P. 492–532.
6. *Polishchuk A.* Classical Yang–Baxter equation and the A_∞-constraint // Adv. Math. 2002. V. 168, N 1. P. 56–96.
7. *Желябин В. Н.* Об одном классе йордановых Д-биалгебр // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 4. С. 64–94.

8. *Mudrov A. I.* Associative triples and the Yang–Baxter equation // Israel J. Math. 2004. V. 139, N 1. P. 11–28.
9. *Гончаров М. Е.* Классическое уравнение Янга — Бакстера на альтернативных алгебрах. Структура альтернативной Д-биалгебры на матричной алгебре Кэли — Диксона // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1009–1025.
10. *Anquela J. A., Cortes T., Montaner F.* Nonassociative coalgebras // Comm. Algebra. 1994. V. 22, N 12. P. 4693–4716.
11. *Drinfeld V. G.* Quantum groups // Proc. Intern. congr. math. Berkeley, CA. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1986, 1987. P. 798–820.
12. *Zhelyabin V. N.* Jordan *D*-bialgebras and symplectic forms on Jordan algebras // Siberian Adv. Math. 2000. V. 10, N 2. P. 134–142.
13. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
14. *McCrimmon K.* Malcev's theorem for alternative algebras // J. Algebra. 1974. V. 28, N 3. P. 484–496.
15. *Schafer R. D.* An introduction to nonassociative algebras. New York: Acad. Press, 1966.

Статья поступила 26 ноября 2008 г.

Гончаров Максим Евгеньевич
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
gme@math.nsc.ru