Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 517.54

ТЕОРЕМЫ ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, МЕРОМОРФНЫХ И ОДНОЛИСТНЫХ В КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ

В. Н. Дубинин, Е. Г. Прилепкина

Аннотация. Применяются емкостный подход и симметризация к доказательству теорем искажения для аналитических в кольце функций. Показывается, что классическая оценка Тейхмюллера емкости двусвязной области дает серию известных и новых неравенств для однолистных функций. В частности, дополняются результаты Гретша, Дюрена и Хукемана. С помощью диссимметризации конденсаторов устанавливаются точные оценки локального искажения и искажения линий уровня в $n \geq 2$ симметричных направлениях. В терминах функций Робена приводится аналог неравенства Нехари — общая теорема искажения для нескольких точек с учетом граничного поведения функции и описанием случаев равенства. Как следствия даны аналоги некоторых неравенств Солынина, Васильева и Поммеренке, полученные ими ранее для однолистных и ограниченных в круге функций. Доказывается теорема искажения с участием производных Шварца в симметричных точках на единичной окружности.

Ключевые слова: мероморфная функция, однолистная функция, теоремы искажения, производная Шварца, двусвязная область, круговое кольцо, емкость конденсатора, диссимметризация, функция Грина, функция Робена.

Введение и некоторые обозначения

Пусть $K \equiv K(R) = \{z : 1 < |z| < R\}$ — круговое кольцо в случае $R \neq \infty$ и $K(\infty) = \{z : 1 < |z|\}$. Обозначим через $\mathfrak{M}(R, M)$, $R < M \leq \infty$, класс функций f, мероморфных и однолистных в кольце $K(R)$, для которых множество $f(K(R))$ значений $f(z)$ в $K(R)$ лежит в области $K(M)$ и которые отображают окружность $|z| = 1$ на себя, $\mathfrak{M}(R) = \mathfrak{M}(R, \infty)$. Каждая функция f класса $\mathfrak{M}(R, M)$, $M \leq \infty$, допускает аналитическое продолжение в кольцо $1/R < |z| < R$ по принципу симметрии Римана — Шварца. Будем обозначать это продолжение той же буквой f. Данная работа посвящена развитию емкостного подхода [1] и методов симметризации [2] в применении к решению некоторых экстремальных задач для функций классов $\mathfrak{M}(R)$ и $\mathfrak{M}(R, M)$.

В § 1, который носит методический характер, следуя работе [3], показано, как с помощью классической оценки емкости кольцевой области [4] можно установить ряд известных и новых неравенств в виде следствий общих теорем искажения ангармонического отношения четырех точек. В частности, уточнены и обобщены известные оценки Гретша [5] и Тейхмюллера [4] для модулей $|f|$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00028), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2810.2008.1), а также ДВО РАН (грант 09–II–СО–01–003).

и $|f'|$ в классе $\mathfrak{M}(R)$, а также дополнены результаты Дюрена [6] и Хукемана [7]. Экстремальными функциями в полученных неравенствах являются функция Гретша $G(z;R)$ и функция Тейхмюллера $T(z;R)$. Функция $w = G(z) \equiv G(z;R)$ конформно и однолистно отображает кольцо $K(R)$, $R < \infty$, на внешность круга $|w| > 1$ с разрезом по вещественной положительной полуоси от некоторой точки $P(R)$ до ∞ так, что $G(R;R) = P(R)$. Нетрудно убедиться, что

$$G(z;R) = \tau \operatorname{sn}^2 \left(\left(\frac{i}{\pi} \log(zR) + 1 \right) \mathbf{K}(\tau); \tau \right),$$

где $\tau = \tau(R) = 1/P(R)$ — решение уравнения

$$\log R = \frac{\pi}{2} \mathbf{K}(\sqrt{1-\tau^2})/\mathbf{K}(\tau),$$

$\mathbf{K}(\tau)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем τ, $\operatorname{sn}(\cdot;\tau)$ — эллиптическая функция Якоби. Известны также представления параметров τ и $\mathbf{K}(\tau)$ через ряды по степеням R (см., например, [8]). Функция Тейхмюллера $T(z) \equiv T(z;R) = (G(z;R) + 1/G(z;R))/4 - 1/2$ конформно и однолистно отображает кольцо $K(R)$ на плоскость с разрезами по отрезку $[-1,0]$ и вдоль положительной полуоси от точки $T(R)$ до бесконечности.

В § 2, 3 используется понятие конформной емкости конденсатора на комплексной плоскости. Необходимые определения и свойства конденсаторов с двумя пластинами достаточно полно изложены в обзорной статье [2]. Определения и свойства обобщенных конденсаторов подробно рассматриваются в работе [1] и неоднократно повторяются и применяются, например, в статьях [9–14]. Поэтому мы опускаем здесь обсуждение этих понятий, делая, там где это потребуется, необходимые ссылки. В § 2 продолжаются исследования, начатые в работах [9, 15]. Доказательство основных результатов существенно использует диссимметризацию конденсаторов [2]. Устанавливаются оценки локального искажения и искажения линий уровня в $n \geq 2$ симметричных направлениях. Экстремальными в этом случае являются n-кратно симметричные функции Гретша $G(z;n,R)$ и Тейхмюллера $T(z;n,R)$.

В § 3 классическое неравенство Нехари [16, с. 258] для однолистных и ограниченных в круге функций обобщается на случай функций класса $\mathfrak{M}(R,M)$, причем с некоторым учетом граничного искажения. Основной результат этого параграфа (теорема 5) формулируется с использованием понятий функции Робена $g_D(z,\zeta,\gamma)$ и радиуса Робена $r(D,\gamma,\zeta)$. *Функция Робена* $g_D(z,\zeta,\gamma)$ области D с полюсом в точке $\zeta \in D$ определяется так же, как и классическая функция Грина оператора Лапласа $g_D(z,\zeta)$ с полюсом в ζ, с той лишь разницей, что требование $g_D(z,\zeta) = 0$ на ∂D заменяется условиями: $g_D(z,\zeta,\gamma) = 0$ на некотором граничном множестве $\gamma \subset \partial D$, а на оставшейся части границы области D производная по нормали к ∂D от функции $g_D(z,\zeta,\gamma)$ равна нулю [17]. Если граница области D негладкая, то функция Робена определяется с помощью конформного отображения. В отличие от классического случая [17] мы рассматриваем также функцию Робена с полюсом в граничной точке $\zeta \in D \backslash \gamma$ [1]. *Радиусом Робена* относительно конечной точки ζ назовем величину

$$r(D,\gamma,\zeta) = \exp\{\lim_{z\to\zeta} [g_D(z,\zeta,\gamma) + \log|z-\zeta|]\}.$$

В § 3 приводятся некоторые примеры, когда функцию Робена (и, следовательно, радиус Робена) можно выразить через функции $G(z;R)$, $T(z;R)$ либо через функции Грина круговых колец. Напомним одно из представлений функции Грина кольца $K(R)$, $R < \infty$, с полюсом в положительной точке ζ [18, с. 260]:

$$g_{K(R)}(re^{i\theta}, \zeta) = -\frac{\log r}{\log R} \log \zeta - \log \left| \frac{\zeta - re^{i\theta}}{1 - \zeta re^{i\theta}} \right| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{-n}}{n} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{R^n - R^{-n}} (r^n - r^{-n}) \cos n\theta.$$

Сложность представлений функций Робена и экстремальных функций делает проблематичным применение ряда методов теории функций комплексного переменного. Этим объясняется, по-видимому, небольшое число работ о функциях, заданных в кольце, по сравнению с числом публикаций, посвященных регулярным в круге функциям. С другой стороны, емкостный подход [1] довольно просто приводит, например, к общим неравенствам (11), (13) данной статьи, причем с учетом граничного поведения функции и с утверждением о равенстве. Как следствия отсюда получаются оценки для функций класса $\mathfrak{M}(R, M)$ типа теорем искажения, включая двуточечные оценки. В частности, устанавливаются аналоги некоторых неравенств А. Ю. Солынина [19], Поммеренке и А. Васильева [20, 21], доказанные ранее для ограниченных и однолистных в круге функций.

Наконец, в § 4 приводятся теоремы искажения для функций класса $\mathfrak{M}(R)$ с участием производной Шварца $S_f(z) = f'''(z)/f'(z) - (3/2)(f''(z)/f'(z))^2$. Особенно отметим новое неравенство для $f'(z_k)$ и $S_f(z_k)$ в точках z_k, $k = 1, \ldots, n$, симметрично расположенных на единичной окружности. Все выписанные оценки являются точными. Нетрудно показать, что любую регулярную и однолистную в круге функцию f можно представить как предел последовательности функций, которые с точностью до некоторых преобразований подобия областей значений и аргумента принадлежат классу $\mathfrak{M}(R)$. Если при этом f — ограниченная функция, то функции соответствующей последовательности принадлежат классу $\mathfrak{M}(R, M)$, $M < \infty$. Таким образом, любое утверждение данной статьи дает в качестве следствия некоторое утверждение для регулярных и однолистных в круге функций.

§ 1. Экстремальная задача Тейхмюллера и классические теоремы искажения

Пусть D — двусвязная область в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, и пусть E_1, E_2 — компоненты дополнения этой области. Задача Тейхмюллера состоит в отыскании области D с наибольшим значением модуля $M(D)$ при следующих условиях: E_1 содержит точки 0 и -1, а E_2 содержит ∞ и хотя бы одну точку на расстоянии s от начала координат. Хорошо известно, что единственным решением этой задачи является так называемое кольцо Тейхмюллера $D_s = \mathbf{C} \backslash \{[-1, 0] \cup [s, +\infty)\}$ [4]. Введем обозначения: $K(r_1, r_2, r_3, r_4) = K \backslash \{[-R, r_1] \cup [r_2, r_3] \cup [r_4, R]\}$, где $-R \le r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \le R$; (a, b, c, d) — ангармоническое отношение четырех точек a, b, c и d на сфере $\overline{\mathbf{C}}$ [22].

Теорема 1. *Пусть функция f мероморфна и однолистна в кольце K, и пусть $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$, $r_1 r_2 > 0$, $r_3 r_4 > 0$, $1 \le |r_k| \le R$, $k = 1, 2, 3, 4$. Предположим, что образ кольца $K(r_1, r_2, r_3, r_4)$ при отображении f отделяет некоторые точки w_2, w_3 от точек w_1, w_4, причем w_2 и w_3 принадлежат той связной компоненте дополнения области $f(K(r_1, r_2, r_3, r_4))$, которая содержит предельные значения $f(z)$, когда $z \to r_2$, $z \to r_3$. Тогда справедливо неравенство*

$$|(w_3, w_1, w_2, w_4)| \le |(T(r_3), T(r_1), T(r_2), T(r_4))|. \tag{1}$$

Равенство в (1) имеет место только для суперпозиций $f = \varphi(T(e^{i\theta}z))$ и точек w_k, являющихся образами точек $e^{-i\theta}r_k$ или $e^{-i\theta}r_{5-k}$ соответственно при отображении f, $k = 1,2,3,4$. Здесь φ — произвольное дробно-линейное отображение, а θ — любое вещественное число, если одновременно $r_1 = -R$, $r_2 = -1$, $r_3 = 1$ и $r_4 = R$, в противном случае $\theta = 0$.

Доказательство. Можно считать, что все точки w_k, $k = 1,2,3,4$, различные. Обозначим через $g(w)$ дробно-линейное отображение сферы $\overline{\mathbf{C}}$ на себя, переводящее точки w_1, w_2, w_3 соответственно в точки ∞, -1 и 0. Ввиду инвариантности ангармонического отношения

$$(w_3, w_1, w_2, w_4) = (0, \infty, -1, g(w_4)) = -1/g(w_4).$$

Используя конформную инвариантность модуля и решение задачи Тейхмюллера, получим

$$M(K(r_1, r_2, r_3, r_4)) = M(g(f(K(r_1, r_2, r_3, r_4)))) \leq M(D_s),$$

где $s = |g(w_4)|$. С другой стороны, если $m(w)$ — дробно-линейное отображение, переводящее точки $T(r_1)$, $T(r_2)$, $T(r_3)$ в точки ∞, -1 и 0 соответственно, то аналогично

$$(T(r_3), T(r_1), T(r_2), T(r_4)) = (0, \infty, -1, m(T(r_4))) = -1/m(T(r_4)),$$

$$M(K(r_1, r_2, r_3, r_4)) = M(D_q),$$

где $q = m(T(r_4))$. Из монотонности модуля вытекает неравенство $s \geq q$, равносильное (1).

Предположим теперь, что в (1) имеет место равенство. Тогда необходимо $s = q$ и функции $g \circ f$ и $m \circ T$ отображают кольцо $K(r_1, r_2, r_3, r_4)$ на одно и то же кольцо D_s. Если одна из точек r_k, $1 \leq k \leq 4$ (например, r_2), принадлежит области K, то из аналитичности функции $f(z)$ в кольце K вытекает, что $g(f(r_2)) = -1$ либо $g(f(r_2)) = 0$. В первом случае имеем $g \circ f \equiv m \circ T$ и, следовательно, $f \equiv g^{-1} \circ m \circ T$, что доказывает утверждение о равенстве, при этом $f(r_k) = w_k$, $k = 1,2,3,4$. Во втором случае суперпозиция $h \circ g \circ f$, где $h(w) = (sw + s)/(w - s)$, отображает кольцо $K(r_1, r_2, r_3, r_4)$ на кольцо D_s и точку r_2 в точку -1, что вновь дает соотношение $f \equiv g^{-1} \circ h^{-1} \circ m \circ T$, причем $f(r_1) = w_4$, $f(r_2) = w_3$, $f(r_3) = w_2$, $f(r_4) = w_1$. Пусть теперь $r_1 = -R$, $r_2 = -1$, $r_3 = 1$ и $r_4 = R$. Тогда из условия равенства вытекает, что $g(f(z)) \equiv m(T(e^{i\theta}z))$, где θ — некоторое вещественное число, а g и m определены выше. Отсюда $f = \varphi(T(e^{i\theta}z))$ и $f(e^{-i\theta}r_k) = w_k$ либо $f(e^{-i\theta}r_k) = w_{5-k}$, $k = 1,2,3,4$. Здесь φ — дробно-линейное отображение. Теорема доказана.

Для функций f класса $\mathfrak{M}(R)$ прямое применение теоремы 1 ведет к грубой оценке. Точные неравенства получаются, если заметить, что каждая такая функция аналитически продолжается в кольцо $1/R < |z| < R$, и применить теорему 1 к суперпозиции $f(z/R)$, заданной в кольце $K(R^2)$. В результате получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть функция f принадлежит классу $\mathfrak{M}(R)$, и пусть $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$, $r_1 r_2 > 0$, $r_3 r_4 > 0$, $1/R \leq |r_k| \leq R$, $k = 1,2,3,4$. Предположим, что образ кольца $\{1/R < |z| < R\} \backslash \{[-R, r_1] \cup [r_2, r_3] \cup [r_4, R]\}$ при отображении f отделяет некоторые точки w_2, w_3 от точек w_1, w_4. Тогда*

$$|(w_3, w_1, w_2, w_4)| \leq |(G(r_3), G(r_1), G(r_2), G(r_4))|. \tag{2}$$

Равенство в (2) *реализуется для суперпозиций* $\varphi \circ G$, *где* φ — *конформный автоморфизм внешности круга* $|w| > 1$, *и для точек* w_k, *являющихся соответственно образами точек* r_k *или* r_{5-k} *при этом отображении,* $k = 1, 2, 3, 4$.

Другой способ применения теоремы 1 к функциям класса $\mathfrak{M}(R)$ заключается в следующем. Обозначим через $\psi(w) = (w + 1/w)/2$ функцию Жуковского. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для любых точек a, b, c и d, лежащих в $|w| > 1$, выполняется равенство

$$(\psi(a), \psi(b), \psi(c), \psi(d)) = \frac{(a, b, c, d)}{(b^{-1}, a^{-1}, c, d)}.$$

Если теперь $f \in \mathfrak{M}(R)$, то суперпозиция $\psi \circ f$ мероморфна и однолистна в кольце K и теорема 1 дает

Следствие 2. *Пусть функция* f *принадлежит* $\mathfrak{M}(R)$, *и пусть точки* r_k *и* w_k *удовлетворяют условиям теоремы* 1, *причем* $|w_k| \geq 1$, $k = 1, 2, 3, 4$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{|(w_3, w_1, w_2, w_4)|}{|(1/w_1, 1/w_3, w_2, w_4)|} \leq \frac{|(G(r_3), G(r_1), G(r_2), G(r_4))|}{|(1/G(r_1), 1/G(r_3), G(r_2), G(r_4))|}. \tag{3}$$

Равенство в (3) *имеет место в случае, когда* $f = \varphi \circ G$, *где* φ — *конформный автоморфизм области* $|w| > 1$, *сохраняющий вещественную ось, и точки* w_k *являются соответственно образами точек* r_k *или* r_{5-k}, $k = 1, 2, 3, 4$.

Отметим некоторые следствия неравенств (1)–(3). Запишем сначала неравенство (2) в явном виде:

$$\left|\frac{(w_2 - w_3)(w_4 - w_1)}{(w_2 - w_1)(w_4 - w_3)}\right| \leq \left|\frac{(G(r_2) - G(r_3))(G(r_4) - G(r_1))}{(G(r_2) - G(r_1))(G(r_4) - G(r_3))}\right|. \tag{$2'$}$$

Пусть f — регулярная функция класса $\mathfrak{M}(R)$ и z — произвольная точка кольца K. Обозначим через θ произвольное значение аргумента точки z, и пусть φ_θ — поворот вокруг начала координат на угол θ. Положим $r_1 = -R$, $r_2 = -1/R$, $r_3 = 1/|z|$, $r_4 = |z|$, $w_1 = \infty$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1/\overline{f(z)}$, $w_4 = f(z)$ и применим следствие 1 к функции $f \circ \varphi_\theta$. Неравенство ($2'$) дает классическую оценку

$$|f(z)| \geq |G(|z|)|, \quad z \in K. \tag{4}$$

Оценка модуля функции сверху

$$|f(z)| \leq |G(-|z|)|, \quad z \in K, \tag{5}$$

также вытекает из неравенства ($2'$), если положить $r_1 = -R$, $r_2 = -|z|$, $r_3 = -1/|z|$, $r_4 = -1/R$, $w_1 = \infty$, $w_2 = f(z)$, $w_3 = 1/\overline{f(z)}$, $w_4 = 0$ и применить следствие 1 к функции $f \circ \varphi_{\theta+\pi}$. Далее, применяя ($2'$) в случае регулярной функции $f \in \mathfrak{M}(R)$ и точек $r_1 = -R < r_2 < r_3 < r_4 = -1/R$, а также точек $w_1 = \infty$, $w_2 = f(r_2)$, $w_3 = f(r_3)$, $w_4 = 0$, приходим к новому неравенству

$$\left|\frac{f(r_2) - f(r_3)}{f(r_3)}\right| \leq \left|\frac{G(r_2) - G(r_3)}{G(r_3)}\right|,$$

справедливому для любых точек r_2, r_3, $-R < r_2 < r_3 < -1/R$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $r_2 \to r_3$ и привлекая при необходимости поворот вокруг начала, получим следующую оценку модуля логарифмической производной:

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \left|\frac{G'(-|z|)}{G(-|z|)}\right|, \quad z \in K.$$

Учитывая (5), имеем

$$|f'(z)| \leq |G'(-|z|)|, \quad z \in K.$$

Аналогично, положив $r_1 = -R$, $r_2 = -1/R$, $w_1 = \infty$, $w_2 = 0$, $w_3 = f(r_3)$ и $w_4 = f(r_4)$, получаем неравенство

$$\left|\frac{f(r_4) - f(r_3)}{f(r_3)}\right| \geq \left|\frac{G(r_4) - G(r_3)}{G(r_3)}\right|, \quad 1/R < r_3 < r_4 < R,$$

а также неравенства

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \geq \left|\frac{G'(|z|)}{G(|z|)}\right|, \quad z \in K,$$

$$|f'(z)| \geq |G'(|z|)|, \quad z \in K. \tag{6}$$

Отдельные доказательства оценок $|f(z)|$ и $|f'(z)|$ методом экстремальных метрик приведены в [23, с. 24–29]. Неравенство (1) совпадает по форме с неравенством (2$'$), если функцию T заменить на G. Предельным переходом в (1) при $r_1 \to r_2$, $r_4 \to r_3$ получаем следующий результат [9, неравенство (1.1)]:

$$\frac{|f'(r_2)f'(r_3)|}{|f(r_2) - f(r_3)|^2} \geq \frac{|T'(r_2)T'(r_3)|}{|T(r_2) - T(r_3)|^2}, \tag{7}$$

справедливый для любых мероморфных и однолистных в K функций и любых вещественных точек r_2, $r_3 \in K$, отличных от полюсов f.

В работах [6, 7] изучался класс $\mathscr{F}_\rho$ регулярных и однолистных в кольце $R_\rho := \{z : \rho < |z| < 1\}$ функций f, удовлетворяющих условиям $f(R_\rho) \subset \{w : 0 < |w| < 1\}$ и $f(\{z : |z| = 1\}) = \{w : |w| = 1\}$. Учитывая аналитическое продолжение f по принципу симметрии через окружность $|z| = 1$, заключаем, что класс $\mathscr{F}_\rho$ совпадает, по существу, с подклассом регулярных функций класса $\mathfrak{M}(1/\rho)$. Неравенства (4), (5) дают оценки модуля функции в классе $\mathscr{F}_\rho$:

$$|G(-|z|; 1/\rho)| \leq |f(z)| \leq |G(|z|; 1/\rho)|, \quad z \in R_\rho \tag{8}$$

(ср. [7, с. 195–199]). В дополнение к результатам Дюрена и Хукемана приведем новые оценки модулей производных в классе $\mathscr{F}_\rho$. Значения функции f в точках, симметричных относительно окружности $|z| = 1$, связаны следующим образом: $f(z) = 1/\overline{f(1/\bar{z})}$, $z \in R_\rho$. Поэтому указанные выше неравенства для модулей логарифмических производных в подклассе регулярных функций класса $\mathfrak{M}(R)$ влекут оценки

$$\left|\frac{G'(|z|; 1/\rho)}{G(|z|; 1/\rho)}\right| \leq \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \left|\frac{G'(-|z|; 1/\rho)}{G(-|z|; 1/\rho)}\right|, \quad z \in R_\rho.$$

Далее, если $f \in \mathscr{F}_\rho$, то $f(\rho z) \in \mathfrak{M}(1/\rho^2)$. Следовательно, из (7) вытекает, что

$$\frac{|f'(r_2)f'(r_3)|}{|f(r_2) - f(r_3)|^2} \geq \frac{|T'(r_2/\rho; 1/\rho^2)T'(r_3/\rho; 1/\rho^2)|}{\rho^2|T(r_2/\rho; 1/\rho^2) - T(r_3/\rho; 1/\rho^2)|^2} = \frac{|G'(r_2; 1/\rho)G'(r_3; 1/\rho)|}{|G(r_2; 1/\rho) - G(r_3; 1/\rho)|^2}$$

для любых вещественных $r_2,\ r_3 \in \{z : \rho < |z| < 1/\rho\}$. Пусть z — произвольная точка кольца R_ρ. Привлекая при необходимости поворот вокруг начала на $\arg z$ и полагая $r_2 = |z|$, $r_3 = 1/|z|$, получаем

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \geq \frac{|G'(|z|; 1/\rho)|}{1 - |G(|z|; 1/\rho)|^2}.$$

Ввиду (8) последнее неравенство сильнее известной оценки Дюрена [6]:

$$|f'(z)| \geq |G'(|z|;1/\rho)|$$

(см. также [7, с. 221].) Положим в следствии 2 $r_1 = -R < r_2 < r_3 < -1 = r_4$, $w_1 = \infty$, $w_2 = f(r_2)$, $w_3 = f(r_3)$, $w_4 = -1$ и затем перейдем к пределу при $r_2 \to r_3$. В результате получим неравенство

$$\left|\frac{f'(r_3)(f(r_3)-1)}{f(r_3)(f(r_3)+1)}\right| \leq \left|\frac{G'(r_3)(G(r_3)-1)}{G(r_3)(G(r_3)+1)}\right|, \quad -R < r_3 < -1,$$

которое с учетом поворота справедливо при замене в левой части r_3 на $z \in K$, а в правой — на $-|z|$. Пусть теперь $f \in \mathscr{F}_\rho$, $-1 < a < -\rho$. Из последнего неравенства вытекает, что

$$\frac{|f'(a)|(1+|f(a)|)}{|f(a)|(1-|f(a)|)} \leq \frac{|G'(a;1/\rho)|(1+|G(a;1/\rho)|)}{|G(a;1/\rho)|(1-|G(a;1/\rho)|)}.$$

Поскольку функция $t = (1+x)/[x(1-x)]$ возрастает на промежутке $[\sqrt{2}-1,\ 1)$, с учетом (8) имеем

$$|f'(a)| \leq |G'(a;1/\rho)|$$

в тех случаях, когда $|G(a;1/\rho)| \geq \sqrt{2}-1$ (ср. [6; 7, с. 216]). В общем случае оценка $|f'(a)|$ сверху дана в работе [7].

В дополнение к теореме 1 рассмотрим также теорему искажения для двух точек z_1 и z_2, не лежащих на одной прямой.

Теорема 2. *Пусть функция f мероморфна и однолистна в кольце K, и пусть z_1, z_2 — произвольные различные точки этого кольца. Предположим, что точки w_3 и w_4 принадлежат той связной компоненте дополнения области $f(K)$, которая содержит предельные значения $f(z)$, когда $z \to 1$. Тогда*

$$|(f(z_1), w_3, f(z_2), w_4)| \leq |(T(-|z_1|), T(1), T(|z_2|), T(-1))|.$$

Если точки w_3 и w_4 принадлежат другой связной компоненте дополнения $f(K)$, то справедливо неравенство

$$|(f(z_1), w_3, f(z_2), w_4)| \leq |(T(-|z_1|), T(R), T(|z_2|), T(-R))|.$$

Равенство в каждом из этих случаев имеет место тогда и только тогда, когда точки z_1 и z_2 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, и по разные стороны от этого начала, $w_3 = f(z_2/|z_2|)$, $w_4 = f(z_1/|z_1|)$ в первом случае и $w_3 = f(Rz_2/|z_2|)$, $w_4 = f(Rz_1/|z_1|)$ — во втором, а функция f — суперпозиция, состоящая из поворота $\zeta = -z|z_1|/z_1$, функции T и произвольного дробно-линейного автоморфизма сферы.

Доказательство. Рассмотрим двусвязную область

$$\widetilde{K}(z_1, z_2) := K \backslash \{[z_1, Rz_1/|z_1|] \cup [z_2, Rz_2/|z_2|]\}.$$

Из свойств поляризации [2] вытекает неравенство для модулей

$$M(K(r_1, r_2, r_3, r_4)) \leq M(\widetilde{K}(z_1, z_2)),$$

где $r_1 = -|z_1|$, $r_2 = -1$, $r_3 = 1$, $r_4 = |z_2|$. Следуя доказательству теоремы 1, применяем решение задачи Тейхмюллера к двусвязной области $g(f(\widetilde{K}(z_1, z_2)))$ и повторяем это доказательство с переобозначением $w_1 = f(z_1) \leftrightarrow w_3$, $(w_2 = f(z_2))$. Второй случай вытекает из первого либо рассматривается аналогично, но уже с привлечением области $K \backslash \{[z_1, z_1/|z_1|] \cup \{[z_2, z_2/|z_2|]\}$ вместо $\widetilde{K}(z_1, z_2)$. Теорема доказана.

§ 2. Теоремы искажения, связанные с n-кратной симметрией

Введем обозначения

$$G(z;n,R)=\sqrt[n]{G(z^n;R^n)},\quad z\in K,\quad (\sqrt[n]{1}=1);$$

$$T(z;n,R)=\sqrt[n]{T(z^n;R^n)+1},\quad z\in K,\quad (\sqrt[n]{1}=1);$$

$$D_k=\{z=re^{i\theta}:0<r<\infty,\ |\theta-2\pi k/n|<\pi/n\},\quad k=1,\dots,n.$$

Нетрудно видеть, что функция $w=G(z;n,R)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(R)$ и отображает кольцо K на область $|w|>1$ с разрезами по лучам $\arg(w^n)=0$, $G(R^n;R^n)\le|w^n|\le\infty$, а функция $w=T(z;n,R)$ конформно и однолистно отображает кольцо K на плоскость с разрезами по отрезкам $\arg(w^n)=0$; $0\le|w|\le 1$ и по лучам $\arg(w^n)=0$, $T(R^n;R^n)+1\le|w^n|\le\infty$.

Теорема 3. *Пусть функция f мероморфна и однолистна в кольце K, r — действительное число, $1<r<R$, и z_k, $k=1,\dots,n$ $(n\ge 2)$, — произвольные точки, удовлетворяющие условиям $|z_k|=r$, $f(z_k)\in D_k$, $k=1,\dots,n$. Тогда имеет место неравенство*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{f(z_k)^{n/2-1}f'(z_k)}{\mathrm{Re}f(z_k)^{n/2}}\right|}\ge\frac{T'(r;n,R)}{T(r;n,R)}.$$

Равенство достигается для функций вида $f(z)=cT(z;n,R)$ и точек

$$z_k=r\exp(2\pi ik/n),\quad k=1,\dots,n,$$

где c — произвольная положительная постоянная.

Доказательство. Следуя работе [9], рассмотрим два конденсатора [2]:

$$C^*=\left(\bigcup_{k=1}^{n}[0,re^{i2\pi k/n}]\cup E,\bigcup_{k=1}^{n}[(r+\Delta r)e^{i2\pi k/n},Re^{i2\pi k/n}]\cup\{z:|z|\ge R\}\right),$$

$$C=\left(\bigcup_{k=1}^{n}[0,z_k]\cup E,\bigcup_{k=1}^{n}[z_k+z_k\Delta r/r,z_kR/r]\cup\{z:|z|\ge R\}\right),$$

где $E=\{z:|z|\le 1\}$ и положительное число Δr выбрано настолько малым, что точки $f(z_k+z_k\Delta r/r)$ принадлежат секторам D_k, $k=1,\dots,n$. Конденсатор C является результатом дессимметризации конденсатора C^*, и по теореме 1.10 в [2, с. 35] для емкостей этих конденсаторов выполняется неравенство

$$\mathrm{cap}\ C^*\ge\mathrm{cap}\ C. \tag{9}$$

Обозначим через $f(C)$ образ конденсатора C при отображении f. Согласно следствию 2.5 работы [9] справедлива оценка

$$\mathrm{cap}\ C=\mathrm{cap}\ f(C)\ge 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbf{K}(q_k)}{\mathbf{K}(\sqrt{1-q_k^2})}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{4}{\sqrt{1-q_k^2}}+o(1),\quad \Delta r\to 0,$$

где

$$q_k=\frac{|f^{n/2}(z_k+z_k\Delta r/r)+\overline{f^{n/2}(z_k)}|-|f^{n/2}(z_k+z_k\Delta r/r)-f^{n/2}(z_k)|}{|f^{n/2}(z_k+z_k\Delta r/r)+\overline{f^{n/2}(z_k)}|+|f^{n/2}(z_k+z_k\Delta r/r)-f^{n/2}(z_k)|}.$$

С другой стороны, конденсатор C^* конформно эквивалентен конденсатору $(\{z : 0 \le z^n \le 1\},\ \{z : z^n \ge t^n\})$, $t = T(r+\Delta r; n, R)/T(r; n, R)$, и его емкость равна

$$\operatorname{cap} C^* = 2n\frac{\mathbf{K}(\sqrt{t^{-n}})}{\mathbf{K}(\sqrt{1-t^{-n}})} = \frac{4n}{\pi}\log\frac{4}{\sqrt{1-t^{-n}}} + o(1), \quad \Delta r \to 0$$

(см. [8, с. 116]). С учетом неравенства (9) приходим к соотношению

$$\prod_{k=1}^{n}\bigl(1-q_k^2\bigr) \ge (1-t^{-n})^n(1+o(1)).$$

Осталось заметить, что

$$1 - q_k^2 = n\Delta r\left|\frac{f(z_k)^{n/2-1}f'(z_k)}{\mathrm{Re} f(z_k)^{n/2}}\right| + o(\Delta r), \quad \Delta r \to 0,$$

$$(1-t^{-n}) = n\Delta r\left|\frac{T'(r; n, R)}{T(r; n, R)}\right| + o(\Delta r), \quad \Delta r \to 0.$$

Теорема доказана.

Следствие 3. *Если функция f мероморфна и однолистна в K, а точки z_k, $k = 1, \dots, n$ $(n \ge 2)$, удовлетворяют условиям $|z_k| = r$, $1 < r < R$, $\arg f(z_k)/f(z_1) = 2\pi(k-1)/n$, $k = 1, \dots, n$, то*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{f'(z_k)}{f(z_k)}\right|} \ge \frac{T'(r; n, R)}{T(r; n, R)}.$$

Равенство имеет место для функций вида $f(z) = cT(e^{-i\theta}z; n, R)$ и точек $z_k = r\exp(i(\theta + 2\pi k/n))$, $k = 1, \dots, n$, где θ — вещественная, а c — произвольная отличная от нуля постоянные.

Следствие 4. *Если $f \in \mathfrak{M}(R)$, а точки z_k, $k = 1, \dots, n$, как в предыдущем следствии, то*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{f'(z_k)}{f(z_k)}\right|} \ge \frac{G'(r; n, R)}{G(r; n, R)}.$$

Равенство достигается для функций $f(z) = e^{i\psi}G(e^{-i\theta}z; n, R)$ и точек

$$z_k = r\exp(i(\theta + 2\pi k/n)), \quad k = 1, \dots, n,$$

где θ и ψ — вещественные постоянные.

Следствие 5. *Если $f \in \mathfrak{M}(R)$, то для любых точек z_1, z_2, z_3 на окружности $|z| = 1$ имеет место точная оценка*

$$\frac{\left|\prod\limits_{k=1}^{3} f'(z_k)\right|}{|(f(z_1)-f(z_2))(f(z_2)-f(z_3))(f(z_3)-f(z_1))|} \ge \frac{\sqrt{3}}{9}\left[\frac{G'(r; 3, R)}{G(r; 3, R)}\right]^3$$

с равенством для функций $f(z) = e^{i\psi}G(e^{-i\theta}z; 3, R)$ и точек $z_k = \exp(i(\theta + 2\pi k/3))$, $k = 1, 2, 3$, где θ и ψ — вещественные постоянные.

Доказательство вытекает из следствия 3, примененного к суперпозиции $\Phi \circ f$, где Φ — конформный автоморфизм области $|w| > 1$, переводящий точки $f(z_k)$ в симметричные точки на единичной окружности $|w| = 1$.

Введем следующие обозначения:

$L(r, f)$ $(1 \leq r < R)$ — образ окружности $|z| = r$ при отображении $f \in \mathfrak{M}(R)$ (линия уровня);

$w(r, f, \varphi)$ — произвольная точка пересечения линии уровня $L(r, f)$ с лучом $\arg w = \varphi$ (разные точки могут получить одно обозначение);

$X_f(r, \varphi)$ $(1 < r \leq R)$ — расстояние от начала координат до ближайшей граничной точки множества $f(\{z : 1 < |z| < r\})$, лежащей на луче $\arg w = \varphi$, $1 < |w| < \infty$ $(f \in \mathfrak{M}(R))$. Если при данном φ указанной точки не существует, то полагаем $X_f(r, \varphi) = +\infty$.

Теорема 4. *Если f — регулярная функция класса $\mathfrak{M}(R)$, то для любых θ, r и ρ, $1 \leq r < R$, $1 \leq \rho < R$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\log\frac{w(r, f, \theta + 2\pi k/n)}{w(\rho, f, \theta + 2\pi k/n)}\right| \geq \left|\log\frac{G(r; n, R)}{G(\rho; n, R)}\right|.$$

Равенство имеет место для функций $f(z) = e^{i\theta}G(z; n, R)$ и любых r, ρ.

Доказательство. Можно считать, что $1 \leq r < \rho < R$. Обозначим через γ_k отрезок $[w(r, f, \theta + 2\pi k/n), w(\rho, f, \theta + 2\pi k/n)]$, и пусть $z = z_k(t)$ — кусочно непрерывная на отрезке $[r, \rho]$ функция, удовлетворяющая условиям: $z_k(t) \in f^{-1}(\gamma_k)$, $|z_k(t)| = t$, $r \leq t \leq \rho$, $k = 1, \dots, n$. С учетом следствия 4 при $n \geq 2$ и неравенства (6) в случае $n = 1$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\log\frac{w(r, f, \theta + 2\pi k/n)}{w(\rho, f, \theta + 2\pi k/n)}\right| = \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k}\frac{|dw|}{|w|} \geq \sum_{k=1}^{n}\int_{f^{-1}(\gamma_k)}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right||dz|$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n}\int_{r}^{\rho}\left|\frac{f'(z_k(t))}{f(z_k(t))}\right|dt \geq n\int_{r}^{\rho}\frac{G'(t; n, R)}{G(t; n, R)}\,dt = n\log\frac{G(\rho; n, R)}{G(r; n, R)}.$$

Теорема доказана.

Полагая в теореме 4 $\rho = 1$, получаем

Следствие 6 [9, § 3]. *Для любой регулярной функции класса $\mathfrak{M}(R)$ и любых n, θ, r, $1 < r \leq R$, выполняется точное неравенство*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} X_f(r, \theta + 2\pi k/n)} \geq G(r; n, R).$$

Следствие 7. *Пусть f — регулярная функция класса $\mathfrak{M}(R)$, $1 < r < R$, и пусть точки z_k, $k = 1, \dots, n$ $(n \geq 1)$, удовлетворяют условиям $|z_k| = r$, $\arg(f(z_k)/f(z_1)) = 2\pi(k-1)/n$, $k = 1, \dots, n$. Тогда*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} |f'(z_k)|} \geq G'(r; n, R).$$

Равенство имеет место для $f(z) = e^{i\psi}G(e^{-i\theta}z; n, R)$ и точек $z_k = r\exp(i(\theta + 2\pi k/n))$, $k = 1, \dots, n$.

Это утверждение непосредственно вытекает из следствия 4 $(n \geq 2)$, неравенства (6) $(n = 1)$ и следствия 6.

§ 3. Аналог неравенства Нехари и граничное искажение при конформном отображении

Пусть функция f регулярна и однолистна в круге $U := \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяет условию $|f(z)| < 1$ при $z \in U$. В теории функций хорошо известно неравенство Нехари [16, с. 258]

$$\left|\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l \log \frac{f(z_k) - f(z_l)}{z_k - z_l}\right| \le \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \bar{\delta}_l \log \frac{1 - f(z_k)\overline{f(z_l)}}{1 - z_k \bar{z}_l},$$

справедливое для любых точек z_k, $k = 1, \ldots, n$, в круге U и любых комплексных постоянных δ_k, $k = 1, \ldots, n$, таких, что $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = 0$. Поскольку функция Грина в круге U имеет вид

$$g_U(z, a) = \log \left|\frac{1 - \bar{a}z}{z - a}\right|,$$

ограничиваясь вещественными постоянными δ_k, $k = 1, \ldots, n$, приходим к соотношению

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log(r(U, z_k)|f'(z_k)|) + \sum_{\substack{k,l=1,\\ k\ne l}}^{n} \delta_k \delta_l g_U(z_k, z_l) \le \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log r(U, f(z_k)) + \sum_{\substack{k,l=1,\\ k\ne l}}^{n} \delta_k \delta_l g_U(f(z_k), f(z_l)). \quad (10)$$

Рассмотрим близкие неравенства для функций f, заданных в кольце $K(R)$, с заменой функций Грина функциями Робена, а внутренних радиусов — радиусами Робена [1, 17].

Теорема 5. *Пусть функция f принадлежит классу $\mathfrak{M}(R, M)$, γ — непустое замкнутое подмножество $\partial K(R)$, состоящее из конечного числа невырожденных жордановых дуг, и пусть Γ — такое же подмножество границы $\partial K(M)$. Пусть z_k, $k = 1, \ldots, n$, — произвольные точки множества $\overline{K(R)} \backslash \gamma$, причем в случае $|z_k| = R$ требуем дополнительно, чтобы $M \ne \infty$, $|f(z_k)| = M$ и отображение f было конформно в z_k, $1 \le k \le n$, а в случае $M = \infty$ точки z_k были отличны от полюса функции f, $k = 1, \ldots, n$. Предположим, что $f(\gamma) \subset \Gamma$, где образ $f(\gamma)$ понимается в смысле граничного соответствия. Тогда для любых вещественных чисел δ_k, $k = 1, \ldots, n$, справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_k^2 \log(r(K(R), \gamma, z_k)|f'(z_k)|) + \sum_{\substack{k,l=1,\\ k\ne l}}^{n} \alpha_k \delta_k \delta_l g_{K(R)}(z_k, z_l, \gamma) \ge \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_k^2 \log r(K(M), \Gamma, f(z_k)) + \sum_{\substack{k,l=1\\ k\ne l,}}^{n} \alpha_k \delta_k \delta_l g_{K(M)}(f(z_k), f(z_l), \Gamma), \quad (11)$$

где $\alpha_k = 1$, если $z \in \partial K(R)$, и $\alpha_k = 2$, если $z \in K(R)$, $k = 1, \ldots, n$. Равенство в (11) при $\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \ne 0$ достигается тогда и только тогда, когда $\overline{f(K(R))} = \overline{K(M)}$, $f(\gamma) = \Gamma$ и множество $K(M) \cap \partial f(K(R))$ состоит из конечного числа кусочно *гладких кривых, во внутренних точках которых производная по нормали от функции*

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_k g_{K(M)}(w,f(z_k),\Gamma) \tag{12}$$

равна нулю.

Если для отображения f верно включение $f((\partial K(R))\backslash\gamma)\subset(\partial K(M))\backslash\Gamma$, то для любых вещественных δ_k, $k=1,\dots,n$, справедливо неравенство в другую сторону:

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\delta_k^2\log(r(K(R),\gamma,z_k)|f'(z_k)|)+\sum_{\substack{k,l=1,\\ k\neq l}}^{n}\alpha_k\delta_k\delta_l g_{K(R)}(z_k,z_l,\gamma)$$
$$\leq\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\delta_k^2\log r(K(M),\Gamma,f(z_k))+\sum_{\substack{k,l=1,\\ k\neq l}}^{n}\alpha_k\delta_k\delta_l g_{K(M)}(f(z_k),f(z_l),\Gamma). \tag{13}$$

Равенство в (13) при $\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k^2\neq 0$ имеет место в том и только в том случае, когда $\overline{f(K(R))}=\overline{K(M)}$, $f(\gamma)\cap\partial K(M)=\Gamma$ и функция (12) равна нулю на множестве $K(M)\cap f(\gamma)$.

Доказательство. Можно считать, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k^2\neq 0$. Пусть выполняется включение $f(\gamma)\subset\Gamma$. Для достаточно малого r рассмотрим обобщенные конденсаторы [1]:

$$C_1=C\bigl(r;K(R),\gamma,\{z_k\}_{k=1}^n,\{\delta_k\}_{k=1}^n,\{r,\dots,r\}\bigr),$$

$$C_2=C\bigl(r;f(K(R)),f(\gamma),\{f(z_k)\}_{k=1}^n,\{\delta_k\}_{k=1}^n,\{r|f'(z_k)|\}_{k=1}^n\bigr),$$

$$C_3=C\bigl(r;K(M),\Gamma,\{f(z_k)\}_{k=1}^n,\{\delta_k\}_{k=1}^n,\{r|f'(z_k)|\}_{k=1}^n\bigr).$$

Ввиду конформной инвариантности и монотонности емкости (теоремы 1 и 2 работы [1]) имеем

$$\mathrm{cap}\ C_1=\mathrm{cap}\ C_2\leq\mathrm{cap}\ C_3.$$

Осталось применить асимптотическую формулу (7) работы [1] для емкостей конденсаторов C_1 и C_3 при $r\to 0$. Утверждение о равенстве в (11) вытекает из теорем 1 и 3 статьи [12]. Аналогично устанавливается неравенство (13), когда справедливо включение $f((\partial K(R))\backslash\gamma)\subset(\partial K(M))\backslash\Gamma$. В этом случае к конденсаторам C_1, C_2 и C_3 необходимо применить теоремы 3 и 7 работы [1]. Для доказательства случая равенства при $\gamma\neq\partial K(R)$ используются теоремы 1 и 2 [12], а при $\gamma=\partial K(R)$ — теорема 1 работы [13]. Теорема доказана.

В случае, когда $\gamma=\partial K(R)$, $\Gamma=\partial K(M)$, включение $f(\varnothing)\subset\varnothing$ выполняется по определению и неравенство (13) является аналогом неравенства Нехари (10) для функций f, заданных в кольце, причем без условия $\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k=0$. Приведем некоторые следствия теоремы 5 для специальных подобранных множеств γ, Γ, точек z_k и чисел δ_k, $k=1,\dots,n$.

Следствие 8. *Пусть функция f класса $\mathfrak{M}(R, M)$, $M \neq \infty$, принимает вещественные значения в точках кольца $K(R)$ на вещественной оси, и пусть $f(1) = 1$. Тогда для любого α, $|\alpha| = 1$, $\alpha \neq 1$, и любой вещественной точки $z \in K(R)$ имеет место неравенство*

$$|f'(z)| \geq \left| \frac{T(\alpha; R) T'(z; R) T(f(z); M)(T(f(z); M) - T(f(\alpha); M))}{T(f(\alpha); M) T'(f(z); M) T(z; R)(T(z; R) - T(\alpha; R))} \right|. \qquad (14)$$

Равенство в (14) достигается для функций класса $\mathfrak{M}(R, M)$, отображающих кольцо $K(R)$ на кольцо $K(M)$ с разрезами по вещественной оси.

Доказательство. Возьмем в теореме 5 в качестве множества γ дугу окружности $|z| = 1$, соединяющую точки α, $\bar{\alpha}$ и проходящую через точку $z = 1$, и пусть $n = 1$, $z_1 = z$, $\delta_1 = 1$. Неравенство (11) дает оценку

$$|f'(z)| \geq \frac{r(K(M), f(\gamma), f(z))}{r(K(R), \gamma, z)}. \qquad (15)$$

Для вычисления радиусов Робена заметим, что функция

$$w = \Phi(z) \equiv T(z; R)/(T(z; R) - T(\alpha; R))$$

конформно и однолистно отображает кольцо $K(R)$ на w — плоскость с разрезами по вещественной оси, причем дуга γ переходит в смысле граничного соответствия в луч $[-\infty, 0]$. Учитывая симметрию функции Грина такой плоскости с разрезами с полюсом в вещественной точке $\Phi(z)$, заключаем, что

$$r(K(R), \gamma, z) \cdot |\Phi'(z)| = r(\mathbf{C}_w \setminus [-\infty, 0], \Phi(z)) = 4\Phi(z).$$

Отсюда находим радиус Робена $r(K(R), \gamma, z)$. Аналогично вычисляется величина $r(K(M), f(\gamma), f(z))$. Утверждение о равенстве вытекает из теоремы 5 и того факта, что производная по нормали к вещественной оси от функции $g_{K(M)}(w, f(z), f(\gamma))$ в точках кольца $K(M)$, отличных от полюса $f(z)$, равна нулю. Следствие доказано.

Из приведенного доказательства видно, что в случае $\alpha = -1$ условие вещественности z и вещественности f на вещественной оси можно убрать. При этом вновь справедливо неравенство (14), где необходимо заменить z, $f(z)$ на $|z|$, $|f(z)|$ соответственно, и $\alpha = f(\alpha) = -1$, $T(\alpha; R) = T(f(\alpha); M) = -1$.

В случае $M = \infty$ вновь имеем неравенство (15), где для вычисления радиусов Робена необходимо воспользоваться функцией $(z + 1/z)/4 - 1/2$ вместо функции Тейхмюллера $T(z; R)$. В этом случае мы дополняем соответствующую оценку $|f'(z)|$ снизу из §1 с учетом граничного поведения f на окружности $|z| = 1$.

Из результатов Дженкинса [24] следует, что $f(\gamma) \subset G(\gamma; R, M)$, где $G(z; R, M)$ — функция, конформно и однолистно отображающая кольцо $K(R)$ на кольцо $K(M)$ с разрезом по некоторому отрезку $[-M, \delta(M, R)]$, $G(1; R, M) = 1$. Поэтому из неравенства (15) вытекает оценка

$$|f'(z)| \geq \frac{r(K(M), G(\gamma; R, M), f(z))}{r(K(R), \gamma, z)}$$

с равенством для функции $G(z; R, M)$.

Аналогично следствию 8 устанавливается

Следствие 9. *Если функция f класса $\mathfrak{M}(R, M)$, $M \neq \infty$, определена также в некоторой граничной точке z, $|z| = R$, причем $|f(z)| = M$ и f конформна в точке z, то для любого замкнутого подмножества γ единичной окружности $|z| = 1$, состоящего из конечного числа невырожденных жордановых дуг, справедливо неравенство* (15) *с равенством в случае, когда $f(\cdot) = G(\cdot; R, M)$, $z = R$ и множество γ симметрично относительно вещественной оси.*

В простейшем случае $\gamma = \{z : |z| = 1\}$ (и, следовательно, $f(\gamma) = \{w : |w| = 1\}$) неравенство (15) для граничной точки z перепишется в виде

$$|f'(z)| \geq \frac{r(K(M^2), M)}{r(K(R^2), R)}, \quad |z| = R,\ |f(z)| = M.$$

Учитывая связь между функциями класса $\mathfrak{M}(R, M)$ и ограниченными в круге функциями (см. введение), заключаем, что выписанное неравенство содержит в пределе оценку Солынина — Поммеренке — Васильева вида $|f'(z)| \geq 1/\sqrt{|f'(0)|}$ [19, с. 125; 20].

Мы пропускаем оценки модуля производной, получающиеся, как и выше, но из неравенства (13), и переходим к двуточечным теоремам искажения (см. также [14]). Приведем частный случай теоремы 5 с указанием некоторых способов вычисления функций и радиусов Робена.

Следствие 10. *Пусть функция $w = f(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(R, M)$, и пусть z_1 и z_2 — произвольные различные точки множества $\overline{K(R)}$, причем либо обе эти точки одновременно принадлежат кольцу $K(R)$, либо у них одинаковый модуль. Кроме того, в случае $|z_1| = |z_2| = R$ считаем, что $M \neq \infty$, $|f(z_1)| = |f(z_2)| = M$ и отображение f конформно в точках z_k, $k = 1, 2$. Тогда при $|z_k| \neq 1$, $|z_k| \neq \infty$, $k = 1, 2$, для любых вещественных δ_1 и δ_2 справедливо неравенство*

$$|f'(z_1)|^{\delta_1^2}|f'(z_2)|^{\delta_2^2} \geq \left[\frac{r(K(M), \Gamma, f(z_1))}{r(K(R), \gamma, z_1)}\right]^{\delta_1^2}\left[\frac{r(K(M), \Gamma, f(z_2))}{r(K(R), \gamma, z_2)}\right]^{\delta_2^2} \times \exp\{2\delta_1\delta_2[g_{K(M)}(f(z_1), f(z_2), \Gamma) - g_{K(R)}(z_1, z_2, \gamma)]\}, \quad (11')$$

где $\gamma = \{z : |z| = 1\}$, $\Gamma = \{w : |w| = 1\}$. Равенство в $(11')$ *при $\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0$ достигается тогда и только тогда, когда $\overline{f(K(R))} = \overline{K(M)}$ и множество $K(M) \cap \partial f(K(R))$ состоит из конечного числа кусочно гладких кривых, во внутренних точках которых производная по нормали функции $\delta_1 g_{K(M)}(w, f(z_1), \Gamma) + \delta_2 g_{K(M)}(w, f(z_2), \Gamma)$ равна нулю. В случае $M \neq \infty$ и $|z_k| \neq R$, $k = 1, 2$, для любых вещественных δ_1 и δ_2 имеет место неравенство*

$$|f'(z_1)|^{\delta_1^2}|f'(z_2)|^{\delta_2^2} \leq \left[\frac{r(K(M), \Gamma_M, f(z_1))}{r(K(R), \gamma_R, z_1)}\right]^{\delta_1^2}\left[\frac{r(K(M), \Gamma_M, f(z_2))}{r(K(R), \gamma_R, z_2)}\right]^{\delta_2^2} \times \exp\{2\delta_1\delta_2[g_{K(M)}(f(z_1), f(z_2), \Gamma_M) - g_{K(R)}(z_1, z_2, \gamma_R)]\}, \quad (13')$$

где $\gamma_R = \{z : |z| = R\}$, $\Gamma_M = \{w : |w| = M\}$. Равенство в $(13')$ *при $\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0$ выполняется в том и только в том случае, когда $\overline{f(K(R))} = \overline{K(M)}$ и функция $\delta_1 g_{K(M)}(w, f(z_1), \Gamma_M) + \delta_2 g_{K(M)}(w, f(z_2), \Gamma_M)$ равна нулю на множестве $K(M) \cap f(\gamma_R)$.*

Функции и радиусы Робена в неравенствах $(11')$ и $(13')$ можно выразить через функции Грина, внутренние радиусы либо через функцию Гретша. Например, очевидно равенство

$$g_{K(R)}(z, \zeta, \gamma) = g_{K(R^2)}(z, R^2/\bar{\zeta}) + g_{K(R^2)}(z, \zeta), \quad z \in K(R).$$

Отсюда
$$\log r(K(R),\gamma,\zeta)=g_{K(R^2)}(\zeta,R^2/\bar\zeta)+\log r(K(R^2),\zeta).$$
Далее, непосредственно убеждаемся в соотношении
$$g_{K(R)}(z,\zeta,\gamma)=\log\left|\frac{1-G(z|\zeta|/\zeta;R)G(|\zeta|;R)}{G(z|\zeta|/\zeta;R)-G(|\zeta|;R)}\right|,\quad z,\zeta\in K(R).$$
Следовательно,
$$r(K(R),\gamma,\zeta)=\left|\frac{G^2(|\zeta|;R)-1}{G'(|\zeta|;R)}\right|,\quad \zeta\in K(R).$$
Из определения функций Грина и Робена вытекают равенства
$$g_{K(\infty)}(w,\omega,\Gamma)=g_{K(\infty)}(w,\omega)=\log\left|\frac{1-\overline{\omega}w}{\omega-w}\right|,$$
$$r(K(\infty),\Gamma,\omega)=r(K(\infty),\omega)=|\omega|^2-1.$$
Аналогично считаются другие функции и радиусы Робена из следствия 10.

Неравенство ($11'$) при $|z_1|=|z_2|=R$ и $|f(z_1)|=|f(z_2)|=M$ является распространением результата Поммеренке — Васильева [21, неравенства (1.1), (2.25)] на случай функций, заданных в кольце, и на случай любых δ_k, $k=1,2$. Неравенство ($13'$) при $\delta_1=-\delta_2=1$ и $M\to\infty$ дает оценку, близкую теореме 1.4 работы [9], но отличную от нее. Наконец, то же неравенство при $|z_1|=|z_2|=1$ и $\delta_1=-\delta_2=1$ совпадает, по существу, с результатом Солынина [19, неравенство 4.13].

В заключение приведем следующее наблюдение. Пусть $K(R)^+$ — это часть кольца $K(R)$, лежащая в верхней полуплоскости, а $\gamma^+=[-R,-1]\cup\{z:|z|=1, \operatorname{Im} z\geq 0\}\cup[1,R]$. Тогда для любой фиксированной точки ζ на окружности $|\zeta|=R$, $\operatorname{Im}\ \zeta>0$, и любых точек $z\in K(R)$ имеем
$$g_{K(R)^+}(z,\zeta,\gamma^+)=g_{K(R)}(z,\zeta,\gamma)-g_{K(R)}(z,\bar\zeta,\gamma).$$
Отсюда
$$\log[r(K(R),\gamma,\zeta)r(K(R),\gamma,\bar\zeta)]-2g_{K(R)}(\zeta,\bar\zeta,\gamma)=2\log r(K(R)^+,\gamma^+,\zeta).$$
С другой стороны,
$$r(K(R)^+,\gamma^+,\zeta)|T'(\zeta;R)|=r(\mathbf{C}_w\backslash[-\infty,T(R)],T(\zeta;R))=4(T(\zeta;R)-T(R)).$$
Аналогичные соображения справедливы для кольца $K(M)$, $M\neq\infty$, а также для обоих колец, повернутых вокруг начала координат. Поэтому неравенство ($11'$) в случае $|z_1|=|z_2|=R$, $|f(z_1)|=|f(z_2)|=M$ имеет вид
$$|f'(z_1)f'(z_2)|\geq\left|\frac{\left[T\left(f(z_1)\frac{|f(z_1)+f(z_2)|}{f(z_1)+f(z_2)};M\right)-T(M;M)\right]T'\left(z_1\frac{|z_1+z_2|}{z_1+z_2};R\right)}{\left[T\left(z_1\frac{|z_1+z_2|}{z_1+z_2};R\right)-T(R;R)\right]T'\left(f(z_1)\frac{|f(z_1)+f(z_2)|}{f(z_1)+f(z_2)};M\right)}\right|^2.$$

§ 4. Неравенства с участием производной Шварца

Теорема 5 и, в частности, следствие 10 при $\delta_1=-\delta_2=1$ приводят к некоторым оценкам шварциана для функций класса $\mathfrak{M}(R,M)$. В качестве примера рассмотрим одну из таких оценок.

Теорема 6. *Если $f\in\mathfrak{M}(R)$, то для любого положительного $z\in K(R)$ имеет место неравенство*
$$\operatorname{Re}\ S_f(z)+\frac{6|f'(z)|^2}{(|f(z)|^2-1)^2}\geq S_G(z)+\frac{6|G'(z)|^2}{(|G(z)|^2-1)^2},$$
где $G(z)=G(z;R)$.

Доказательство. Пусть z_0 — вещественная точка кольца $K(R)$ на положительной полуоси, и пусть $\rho > 0$ настолько мало, что точка $z_0 + \rho$ также принадлежит кольцу $K(R)$. Положив в следствии 10 $z_1 = z_0$, $z_2 = z_0 + \rho$, $\delta_1 = -\delta_2 = 1$, $M = \infty$ и учитывая представления функций и радиусов Робена через функцию $G(z;R)$, приведенные после этого следствия, получаем из (11′) следующее неравенство:

$$\frac{|f'(z_0)f'(z_0+\rho)|}{|f(z_0)-f(z_0+\rho)|^2}\cdot\frac{|1-\overline{f(z_0)}f(z_0+\rho)|^2}{(|f(z_0)|^2-1)(|f(z_0+\rho)|^2-1)} \geq \frac{|G'(z_0)G'(z_0+\rho)|}{|G(z_0)-G(z_0+\rho)|^2}\cdot\frac{|1-G(z_0)G(z_0+\rho)|^2}{(G(z_0)^2-1)(G(z_0+\rho)^2-1)}. \tag{16}$$

В некоторой окрестности точки z_0 функция f представима в виде степенного ряда $f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + \ldots$ и, следовательно, $f'(z) = c_1 + 2c_2(z-z_0) + 3c_3(z-z_0)^2 + \ldots$. Отсюда несложно установить асимптотику первого сомножителя в левой части неравенства (16):

$$\frac{|f'(z_0)f'(z_0+\rho)|}{|f(z_0)-f(z_0+\rho)|^2} = \frac{1}{\rho^2}\left|1+\left(\frac{c_3}{c_1}-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)\rho^2+o(\rho^2)\right| = \frac{1}{\rho^2}\left|1+\frac{1}{6}S_f(z_0)\rho^2+o(\rho^2)\right|, \quad \rho\to 0.$$

Также элементарный, но более длинный счет дает

$$\frac{|1-\overline{f(z_0)}f(z_0+\rho)|^2}{(|f(z_0)|^2-1)(|f(z_0+\rho)|^2-1)} = 1+\frac{|c_1|^2}{(|c_0|^2-1)^2}\rho^2+o(\rho^2), \quad \rho\to 0.$$

Полагая $f = G$, получаем асимптотику правой части неравенства (16), что в итоге приводит к утверждению теоремы 6.

Неравенство (13) теоремы 5 дает, как и выше, аналогичную оценку $\operatorname{Re} S_f(z)$ сверху. Более того, емкостный подход приводит к оценке Сингха [25] для шварциана $S_f(z)$, зависящей от ядер Бергмана области $K(R)$ относительно класса всех функций, регулярных и с интегрируемым квадратом модуля в ней [26] (см. [следствие 3.8, 14]). Многочисленные неравенства с участием шварциана в терминах различных ядер установлены Ю. Е. Аленицыным в работе [27]. Приведем новые оценки для функций класса $\mathfrak{M}(R)$ и симметричных точек на единичной окружности. Эти оценки вытекают из свойств емкостей обобщенных конденсаторов. Однако для упрощения доказательств нам удобнее здесь воспользоваться результатами о неналегающих областях работ [10, 11].

Теорема 7. *Для любой функции f класса $\mathfrak{M}(R)$ выполняются неравенства*

$$\frac{n^2-1}{2}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{G_n'(z_k)}{f'(z_k)}\right|^2\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{Re}\left[z_k^2(S_f(z_k)-S_{G_n}(z_k))\right]}{|f'(z_k)|^2} \leq \frac{n^2+2}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{G_n'(z_k)}{f'(z_k)}\right|^2-n\right),$$

где $G_n(z) = G(z;n,R)$ и $z_k = \exp(i(\pi/n + 2\pi(k-1)/n))$, $k = 1,\ldots,n$.

Доказательство. Всюду ниже мы рассматриваем функции f и G_n продолженными в кольцо $1/R < |z| < R$ по принципу симметрии. Заметим, что функция G_n отображает область $B_k := \{z : 1/R < |z| < R,\ 2\pi(k-1)/n < \arg\, z < 2\pi k/n\}$ на угол $\{w : \ 2\pi(k-1)/n < \arg\, w < 2\pi k/n\}$ так, что $G_n(z_k) = z_k$, $k = 1,\ldots,n$. Введем следующие обозначения: $h_1(\zeta) = G_n^{-1}[(i(1+\zeta)/(1-\zeta))^{2/n}]$, $h(0) = z_1$, $h_k(\zeta) = \exp(i(2\pi(k-1)/n))h_1(\zeta)$, $|\zeta| < 1$, $k = 1,\ldots,n$. Функция

h_k отображает круг $|\zeta| < 1$ конформно и однолистно на область B_k, причем $h_k(0) = z_k$, $k = 1, \dots, n$. Поэтому суперпозиции $g_k := f \circ h_k$ отображают круг $|\zeta| < 1$ на попарно не налегающие области и $|g_k(0)| = 1$, $k = 1, \dots, n$. Из теоремы 8 работы [10] и теоремы 8 из [11] вытекают неравенства

$$\frac{n(n^2-1)}{12} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|g_k'(0)|^2} \le \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\ \frac{g_k^2(0) S_{g_k}(0)}{(g_k'(0))^2} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|g_k'(0)|^2} - \frac{n(n^2+2)}{24}.$$

Отсюда

$$\frac{n(n^2-1)}{12} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|f'(z_k) h_1'(0)|^2} \le \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\ \left[\frac{f^2(z_k) S_f(z_k)}{(f'(z_k))^2} + \frac{S_{h_1}(0)}{|f'(z_k) h_1'(0)|^2} \right]$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|f'(z_k) h_1'(0)|^2} - \frac{n(n^2+2)}{24}. \quad (17)$$

Здесь и ниже мы неоднократно пользуемся тем фактом, что функция f отображает окружность $|z| = 1$ на окружность $|w| = 1$ и что для произвольной суперпозиции $f \circ h$ справедлива формула $S_{f \circ h} = (S_f \circ h)(h')^2 + S_h$. Элементарные вычисления дают

$$|h_1'(0)| = \frac{4}{n G_n'(z_1)},$$

$$\frac{S_{h_1}(0)}{|h_1'(0)|^2} = -z_1^2 S_{G_n}(z_1) + (G_n'(z_1))^2 \frac{n^2-4}{8} = -z_k^2 S_{G_n}(z_k) + |G_n'(z_k)|^2 \frac{n^2-4}{8},$$

$k = 1, \dots, n$. Подставляя эти соотношения в (17), получим требуемые неравенства. Теорема доказана.

Заметим, что метод симметризации [2] приводит к оценке

$$\prod_{k=1}^{n} |f'(z_k)| \le \prod_{k=1}^{n} |G_n'(z_k)| = (G_n'(z_1))^n, \quad f \in \mathfrak{M}(R),\ n \ge 2$$

(см. [19, с. 135]), а также к неравенству

$$\prod_{k=1}^{n} |f'(\widetilde{z}_k)| \ge (G_n'(1))^n, \quad f \in \mathfrak{M}(R),\ n \ge 2,$$

справедливому для точек $\tilde{z}_k$, расположенных на единичной окружности $|z| = 1$ и таких, что $f(\tilde{z}_k) = \exp(i(\theta + 2\pi k/n))$, θ — вещественное число, $k = 1, \dots, n$ [10, § 3]. Вопрос об оценке произведения $\prod\limits_{k=1}^{n} |f'(z_k)|$ снизу, а также об оценке сверху суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} |f'(z_k)|^{-2}$ остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубинин В. Н.* Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкостей при вырождении некоторых пластин // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. 2003. Т. 302. С. 38–51.
2. *Дубинин В. Н.* Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 1. С. 3–76.
3. *Дубинин В. Н., Костюченко Е. В.* Экстремальная задача Тейхмюллера и теоремы искажения в теории однолистных функций // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 302–306.
4. *Teichmüller O.* Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung // Deutsch. Math. 1938. V. 3. P. 621–678.
5. *Grötzsch H.* Über einige Extremalprobleme der konformer Abbildung // Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.- phys. Kl. 1928. Bd 80. S. 367–376.

6. *Duren P. L.* Distortion in certain conformal mappings of an annulus // Michigan Math. J. 1963. V. 10. P. 431–441.

7. *Huckemann F.* Extremal elements in certain classes of conformal mappings of an annulus // Acta Math. 1967. V. 118, N 3, 4. P. 193–221.

8. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

9. *Дубинин В. Н., Костюченко Е. В.* Экстремальные задачи теории функций, связанные с n-кратной симметрией // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. 2001. Т. 276. С. 83–111.

10. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. 1997. Т. 237. С. 56–73.

11. *Дубинин В. Н., Эйрих Н. В.* Некоторые применения обобщенных конденсаторов в теории аналитических функций // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. 2004. Т. 314. С. 52–75.

12. *Дубинин В. Н., Прилепкина Е. Г.* О сохранении обобщенного приведенного модуля при геометрических преобразованиях плоских областей // Дальневост. мат. журн. 2005. Т. 6, № 1, 2. С. 39–56.

13. *Ковалев Л. В.* Монотонность обобщенного приведенного модуля // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. 2001. Т. 276. С. 219–236.

14. *Dubinin V. N., Vuorinen M.* Robin functions and distortion theorems for regular mappings // Math. Nachrichten. (To appear).

15. *Дубинин В. Н.* Теоремы покрытия отрезков при конформном отображении кольца // Изв. вузов. Математика. 1987. № 9. С. 42–50.

16. *Nehari Z.* Some inequalities in the theory of functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 75, N 2. P. 256–286.

17. *Duren P.* Robin capacity // Computational methods and function theory (CMFT'97) / N. Papamichael, St. Ruscheweyh, E. B. Saff (Eds.). Singapore: World Sci. Publ. Co., 1999. P. 177–190.

18. *Henrici P.* Applied and computational complex analysis.. New York: Wiley–Intersci., 1986. V. 3.

19. *Солынин А. Ю.* Граничное искажение и экстремальные задачи в некоторых классах однолистных функций // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. 1993. Т. 204. С. 115–142.

20. *Pommerenke Ch., Vasil'ev A.* On bounded univalent functions and the angular derivative // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. Sect. A. 2000. V. 8. P. 79–106.

21. *Pommerenke Ch., Vasil'ev A.* Angular derivatives of bounded univalent functions and extremal partitions of the unit disk // Pacific J. Math. 2002. V. 206, N 2. P. 425–450.

22. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. М.: Наука, 1967.

23. *Антонюк Г. К.* Некоторые вопросы теории экстремальных метрик. Краснодар: Изд-во Кубанского гос. ун-та, 1983.

24. *Jenkins J. A.* Some theorems on boundary distortion // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 81, N 2. P. 477–500.

25. *Singh V.* Grunsky inequalities and coefficients of bounded schlicht functions // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI. Math. 1962. N 310. P. 1–21.

26. *Шиффер М.* Некоторые новые результаты в теории конформных отображений // Р. Курант. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. Приложение. С. 234–301.

27. *Аленицын Ю. Е.* Об однолистных функциях без общих значений в многосвязной области // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1968. Т. 94. С. 4–18.

Статья поступила 27 января 2009 г.

Дубинин Владимир Николаевич, Прилепкина Елена Гумеровна
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041
dubinin@iam.dvo.ru, pril-elena@yandex.ru