Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 512.542

РАСПОЗНАВАНИЕ ПРОСТЫХ ГРУПП $B_p(3)$ ПО МНОЖЕСТВУ ПОРЯДКОВ ЭЛЕМЕНТОВ

М. Р. Зиновьева, Р. Шен, В. Ши

Аннотация. Пусть G — конечная группа и $\omega(G)$ — множество порядков ее элементов. Доказывается, что если $\omega(G) = \omega(B_p(3))$, где p — нечетное простое число, то $G \cong B_3(3)$ или $D_4(3)$ при $p = 3$ и $G \cong B_p(3)$ при $p > 3$.

Ключевые слова: конечная простая группа, граф простых чисел, распознавание по спектру.

Введение

Для конечной группы G через $\omega(G)$ обозначается *спектр* группы G, т. е. множество порядков ее элементов. Для произвольного подмножества ω множества натуральных чисел через $h(\omega)$ обозначим число попарно не изоморфных конечных групп G таких, что $\omega(G) = \omega$. Если k — натуральное число, то говорят, что группа G является *k-распознаваемой по спектру* (коротко, *k-распознаваемой*), если $h(\omega(G)) = k$. В частности, говорят, что G *распознаваема*, если $h(\omega(G)) = 1$, и *нераспознаваема*, если $h(\omega(G))$ бесконечно. Проблема распознаваемости для конечной группы G считается решенной, если определено $h(\omega(G))$. Так как конечная группа с нетривиальной разрешимой нормальной подгруппой нераспознаваема, в проблеме распознаваемости рассматриваются, главным образом, почти простые группы.

К настоящему времени имеется большой список конечных простых и почти простых групп, для которых проблема распознавания решена (см., например, последний обзор В. Д. Мазурова [1]). Многие такие группы являются группами с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Первый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп с несвязным графом простых чисел заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости, более слабого, чем распознаваемость. По [2] конечная неабелева простая группа P *квазираспознаваема*, если каждая конечная группа H с условием $\omega(H) = \omega(P)$ имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P. Заметим, что для квазираспознаваемой конечной простой группы положительно решается вопрос 12.39 Ши из [3] о распознаваемости конечных простых групп по спектру и порядку.

Среди конечных простых групп группы с несвязными графами простых чисел довольно редкие. Теорема Грюнберга — Кегеля позволяет изучать только группы с несвязными графами простых чисел. В статье А. В. Васильева

Работа выполнена при финансовой поддержке ГФЕН Китая (проект 10571128), the SRFDP of China (Grant No. 20060285002), the Key Foundation of Department of Education of Hubei Province in China (Grant No. D200629001) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00148).

[4] доказана структурная теорема, которая при исследовании распознаваемости группы дает дополнительные ограничения. В частности, теорема А. В. Васильева может быть применена к простым группам лиева типа с несвязным графом простых чисел.

В данной статье мы доказываем распознаваемость для бесконечной серии конечных ортогональных простых групп над полем порядка 3, существенно используя классификацию конечных простых групп.

Теорема. *Пусть $L = B_p(3)$, где p — нечетное простое число. Если G — конечная группа с условием $\omega(G) = \omega(L)$, то $G \cong B_3(3)$, $D_4(3)$ при $p = 3$ и $G \cong B_p(3)$ при $p > 3$.*

Из теоремы следует, что число $h(\omega(B_3(3)))$ равно 2 при $p = 3$ и 1 при $p > 3$. Фактически Ши и Танг в [5] доказали, что $h(\omega(B_3(3))) = 2$, используя другой подход. Липшутц и Ши в [6] доказали, что группа $B_2(3)$ нераспознаваема.

Теорема подтверждает гипотезу Ши 12.39 из [3] для простой группы $B_p(3)$.

Следствие. *Пусть G — конечная группа. Тогда $G \cong B_p(3)$ для нечетного простого p тогда и только тогда, когда $|G| = |B_p(3)|$ и $\omega(G) = \omega(B_p(3))$.*

В дальнейшем p обозначает нечетное простое число.

§ 1. Предварительные результаты

Пусть G — конечная группа. Множество $\omega(G)$ частично упорядочено относительно делимости. Обозначим через $\mu(G)$ множество элементов из $\omega(G)$, максимальных относительно этого отношения. Пусть $\pi(n)$ — множество простых делителей натурального числа n. Обозначим $\pi(|G|)$ через $\pi(G)$. На множестве $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: вершины r и s в $\pi(G)$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля или графом простых чисел группы* G и обозначается через $GK(G)$. Обозначим множество связных компонент графа $GK(G)$ через $\{\pi_i \mid i = 1, \dots, s(G)\}$, где $s(G)$ — количество связных компонент в графе $GK(G)$; если порядок G четен, считаем $2 \in \pi_1$. Также положим $\mu_i(G) = \{a \in \mu(G) \mid \pi(a) \subseteq \pi_i(G)\}$. В [7, 8] описаны связные компоненты всех конечных простых групп. В [9, лемма 4] доказано, что $\mu_i(G)$ — одноэлементное множество для каждой простой неабелевой группы G и $i \geq 2$. Обозначим через $n_i = n_i(G)$ единственный элемент из $\mu_i(G)$ при $i \geq 2$. В [10] получен арифметический критерий смежности двух вершин в графе простых чисел для каждой конечной простой неабелевой группы.

Мы используем терминологию из [10]. Множество вершин графа называется *независимым*, если его вершины попарно не смежны. Пусть $t(G)$ — наибольшее число вершин в независимых подмножествах графа $GK(G)$. Через $t(q, G)$ обозначается наибольшее число вершин в независимых множествах $GK(G)$, содержащих простое число q.

Для удобства доказательства теоремы разобьем класс конечных простых групп лиева типа характеристики r с несвязным графом Грюнберга — Кегеля на два подкласса N_1 и N_2.

Используя результаты работ [7, 8, 10] и атлас конечных групп [11], составим табл. 1 и 2, описывающие параметры $t(r, S)$, $t(S)$ и n_i при $i \geq 2$ для групп S из подклассов N_1 и N_2 соответственно. В табл. 3 укажем множество $\pi_1(S)$ и числа n_i при $i \geq 2$ для спорадических и знакопеременных групп S с несвязным графом простых чисел.

Таблица 1. Параметры групп S из N_1

S	условия на S	$t(r,S)$	$t(S)$	$n_i(S) = n_i\ (i \geq 2)$
$A_2(r^f)$	$(r^f-1)_3 \neq 3, r^f+1 = 2^k$	2	2	$(r^{3f}-1)/(r^f-1)(3,r^f-1)$
${}^2A_2(r^f)$	$(r^f+1)_3 \neq 3, r^f-1 = 2^k$	2	2	$(r^{3f}+1)/(r^f+1)(3,r^f+1)$
${}^2A_3(2)$		2	2	5
$C_2(r^f)$	$r^f > 2$	2	2	$(r^{2f}+1)/(2,r^f-1)$
$C_3(2)$		2	2	7
$D_4(2)$		2	2	7
${}^3D_4(2)$		2	2	13
$A_5(2)$		2	3	31
$A_6(2)$		2	3	127
$C_4(2)$		2	3	17
${}^3D_4(r^f)$	$r^f > 2$	2	3	$r^{4f}-r^{2f}+1$
${}^2F_4(2)'$		2	3	13
$A_1(r^f)$	$3 < r^f \equiv \epsilon \pmod 4, \epsilon = \pm 1$	3	3	$r, (r^f+\epsilon)/2$
$A_1(2^f)$	$f \geq 2$	3	3	$2^f \pm 1$
$A_2(2)$		3	3	$3, 7$
$A_2(r^f)$	$r^f \neq 2, (r^f-1)_3 \neq 3,$ $r^f+1 \neq 2^k$	3	3	$(r^{3f}-1)/(r^f-1)(3,r^f-1)$
$A_2(r^f)$	$(r^f-1)_3 = 3, r^f+1 = 2^k$	3	3	$(r^{3f}-1)/(r^f-1)(3,r^f-1)$
$A_3(r)$	$r = 2,3,5$	3	3	$7, 13, 31$
$A_4(2)$		3	3	31
$A_7(2)$		3	3	127
${}^2A_2(r^f)$	$(r^f+1)_3 \neq 3, r^f-1 \neq 2^k$	3	3	$(r^{3f}+1)/(r^f+1)(3,r^f+1)$
${}^2A_2(r^f)$	$(r^f+1)_3 = 3, r^f-1 = 2^k$	3	3	$(r^{3f}+1)/(r^f+1)(3,r^f+1)$
${}^2A_4(2)$		3	3	11
${}^2A_5(2)$		3	3	$7, 11$
${}^2D_4(2)$		3	3	17
${}^2D_5(2)$		3	3	17
$G_2(r^f)$	$2 < r^f \equiv \epsilon \pmod 3, \epsilon = \pm 1$	3	3	$r^{2f}-\epsilon r^f+1$
$G_2(3^f)$		3	3	$3^{2f} \pm 3^f + 1$
$C_5(2)$		3	4	31
$D_5(2)$		3	4	31
$D_6(2)$		3	4	31
$F_4(2)$		3	4	$13, 17$
$A_{10}(2)$		3	5	2047
$F_4(r^f)$	r нечетно	3	5	$r^{4f}-r^{2f}+1$
$F_4(2^f)$	$f \geq 2$	3	5	$2^{4f}+1, 2^{4f}-2^{2f}+1$
$A_2(4)$		4	4	$3, 5, 7$
$A_2(r^f)$	$r^f \neq 4, (r^f-1)_3 = 3,$ $r^f+1 \neq 2^k$	4	4	$(r^{3f}-1)/(r^f-1)(3,r^f-1)$
${}^2A_2(r^f)$	$r^f \neq 2, (r^f+1)_3 = 3,$ $r^f-1 \neq 2^k$	4	4	$(r^{3f}+1)/(r^f+1)(3,r^f+1)$
${}^2B_2(2^{2f+1})$		4	4	$2^{2f+1}-1, 2^{2f+1} \pm 2^{f+1}+1$
${}^2E_6(r^f)$	$r^f > 2$	4	5	$(r^{6f}-r^{3f}+1)/(3,r^f+1)$
$E_6(r^f)$		4	5	$(r^{6f}+r^{3f}+1)/(3,r^f-1)$
${}^2E_6(2)$		4	5	$13, 17, 19$
${}^2G_2(3^{2f+1})$		5	5	$3^{2f+1} \pm 3^{f+1}+1$
$E_7(2)$		5	8	$73, 127$
$E_7(3)$		5	8	$757, 1093$
${}^2F_4(8)$		4	4	$37, 109$
${}^2F_4(2^{2f+1})$	$f > 1$	4	5	$2^{4f+2} \pm 2^{3f+2} + 2^{2f+1} \pm 2^{f+1} + 1$

Таблица 2. Параметры групп S из N_2

S	условия на S	$t(r,S)$	$t(S)$	$n_i(S)=n_i\ (i\geq 2)$
$B_n(r^f)$	$n=2^m\geq 4,\ r$ нечетно	2	$[\frac{3n+5}{4}]$	$(r^{nf}+1)/2$
$C_n(r^f)$	$n=2^m\geq 4,\ (n,r^f)\neq(4,2)$	2	$[\frac{3n+5}{4}]$	$(r^{nf}+1)/(2,r^f-1)$
$A_{p'-1}(r^f)$	$(p',r^f)\neq(5,2),$ $(7,2),(11,2),\ p'\geq 5$	3	$\frac{p'+1}{2}$	$(r^{p'f}-1)/((r^f-1)(p',r^f-1))$
$A_{p'}(r^f)$	$(r^f-1)\mid(p'+1), p'\geq 5,$ $(p',r^f)\neq(5,2),(7,2)$	3	$\frac{p'+1}{2}$	$(r^{p'f}-1)/(r^f-1)$
${}^2A_{p'-1}(r^f)$	$(p',r^f)\neq(5,2),\ p'\geq 5,$	3	$\frac{p'+1}{2}$	$(r^{p'f}+1)/((r^f+1)(p',r^f+1))$
${}^2A_{p'}(r^f)$	$(r^f+1)\mid(p'+1), p'\geq 5,$ $(p',r^f)\neq(5,2)$	3	$\frac{p'+1}{2}$	$(r^{p'f}+1)/(r^f+1)$
$B_{p'}(3)$		3	$[\frac{3p'+5}{4}]$	$(3^{p'}-1)/2$
$C_{p'}(r)$	$r=2,3,\ (p',r)\neq(3,2),(5,2)$	3	$[\frac{3p'+5}{4}]$	$(r^{p'}-1)/(2,r-1)$
$D_{p'}(r)$	$p'\geq 5,\ r=2,3,5,$			
	$(p',r)\neq(5,2), p'\equiv 1 \pmod 4$	3	$\frac{3p'+1}{4}$	$(r^{p'}-1)/(r-1)$
	$p'\geq 5,\ r=2,3,5, p'\equiv 3 \pmod 4$	3	$\frac{3p'+3}{4}$	$(r^{p'}-1)/(r-1)$
$D_{p'+1}(r)$	$r=2,3,\ (p',r)\neq(3,2),(5,2)$	3	$[\frac{3p'+4}{4}]$	$(r^{p'}-1)/(2,r-1)$
${}^2D_n(2)$	$n=2^m+1,\ m\geq 3$	3	$[\frac{3n+4}{4}]$	$2^{n-1}+1$
${}^2D_{p'}(3)$	$5\leq p'\neq 2^m+1$	3	$[\frac{3p'+4}{4}]$	$(3^{p'}+1)/4$
${}^2D_n(3)$	$9\leq n=2^m+1\neq p'$	3	$[\frac{3n+4}{4}]$	$(3^{n-1}+1)/2$
${}^2D_{p'}(3)$	$p'=2^m+1,\ m\geq 2$	3	$[\frac{3p'+4}{4}]$	$(3^{p'-1}+1)/2, (3^{p'}+1)/4$
${}^2D_n(r^f)$	$n=2^m\geq 4,\ (n,r^f)\neq(4,2)$	4	$[\frac{3n+4}{4}]$	$(r^{nf}+1)/(2,r^f+1)$
$E_8(r^f)$	$r^f\equiv 2,3 \pmod 5$	5	12	$(r^{10f}-r^{5f}1)/(r^{2f}-r^f+1),$ $(r^{10f}+r^{5f}+1)/(r^{2f}+r^f+1),$ $r^{8f}-r^{4f}+1$
$E_8(r^f)$	$r^f\equiv 0,1,4 \pmod 5$	5	12	$(r^{10f}-r^{5f}+1)/(r^{2f}-r^f+1),$ $(r^{10f}+r^{5f}+1)/(r^{2f}+r^f+1),$ $(r^{10f}+1)/(r^{2f}+1),$ $r^{8f}-r^{4f}+1$

В табл. 1–3 p' — нечетное простое число и f — натуральное число.

Общая структура конечной группы с несвязным графом простых чисел описывается следующей теоремой Грюнберга — Кегеля.

Теорема 1 [7, теорема A]. *Если конечная группа G имеет несвязный граф простых чисел, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(a) *$s(G)=2$ и G — группа Фробениуса или двойная группа Фробениуса;*

(б) *существует неабелева простая группа S такая, что $S\leq\overline{G}=G/F(G)\leq \mathrm{Aut}(S)$, где $F(G)$ — максимальная нормальная нильпотентная подгруппа группы G; более того, $F(G)$ и $\overline{G}/S$ являются $\pi_1(G)$-подгруппами, $s(S)\geq s(G)$, и для каждого i с условием $2\leq i\leq s(G)$ существует j с условием $2\leq j\leq s(S)$ такое, что $\mu_i(G)=\mu_j(S)$.*

В [4] А. В. Васильев обобщил теорему Грюнберга — Кегеля на большую часть конечных простых групп.

Теорема 2 [4]. *Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая двум условиям: $t(G)\geq 3$ и $t(2,G)\geq 2$. Тогда существует конечная простая неабелева группа S такая, что $S\leq\overline{G}=G/N\leq\mathrm{Aut}(S)$, где N — максимальная разрешимая нормальная подгруппа группы G; более того, $t(S)\geq t(G)-1$, и выполняется одно из следующих утверждений:*

Таблица 3. Параметры спорадических и знакопеременных групп с несвязным графом простых чисел

S	$\pi_1(S)$	$n_i(S) = n_i$ $(i \geq 2)$
A_n	$6 < n = p', p'+1, p'+2$; одно из чисел $n, n-2$ не простое	p'
A_n	$n > 6, n = p', p'-2$ — простые числа	$p', p'-2$
M_{11}	$\{2,3\}$	$5, 11$
M_{12}	$\{2,3,5\}$	11
M_{22}	$\{2,3\}$	$5, 7, 11$
M_{23}	$\{2,3,5,7\}$	$11, 23$
M_{24}	$\{2,3,5,7\}$	$11, 23$
J_1	$\{2,3,5\}$	$7, 11, 19$
J_2	$\{2,3,5\}$	7
J_3	$\{2,3,5\}$	$17, 19$
J_4	$\{2,3,5,7,11\}$	$23, 29, 31, 37, 43$
Ru	$\{2,3,5,7,13\}$	29
He	$\{2,3,5,7\}$	17
McL	$\{2,3,5,7\}$	11
HN	$\{2,3,5,7,11\}$	19
HiS	$\{2,3,5\}$	$7, 11$
Suz	$\{2,3,5,7\}$	$11, 13$
Co_1	$\{2,3,5,7,11,13\}$	23
Co_2	$\{2,3,5,7\}$	$11, 23$
Co_3	$\{2,3,5,7,11\}$	23
Fi_{22}	$\{2,3,5,7,11\}$	13
Fi_{23}	$\{2,3,5,7,11,13\}$	$17, 23$
Fi'_{24}	$\{2,3,5,7,11,13\}$	$17, 23, 29$
$O'N$	$\{2,3,5,7\}$	$11, 19, 31$
LyS	$\{2,3,5,7,11\}$	$31, 37, 67$
F_1	$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,47\}$	$41, 59, 71$
F_2	$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$	$31, 47$
F_3	$\{2,3,5,7,13\}$	$19, 31$

(1) *$S \cong A_7$ или $L_2(q)$ для некоторого нечетного q и $t(S) = t(2,S) = 3$;*

(2) *для каждого простого числа $p \in \pi(G)$, не смежного с 2 в $GK(G)$, силовская p-подгруппа группы G изоморфна силовской p-подгруппе группы S, в частности, $t(2,S) \geq t(2,G)$.*

Теорема 2 является важным инструментом в доказательстве распознаваемости неабелевых простых групп.

Следуя [10], введем обозначение: если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(r,q) = 1$, то через $e(r,q)$ обозначим минимальное натуральное число n с условием $q^n \equiv 1 \pmod r$. Если $r = 2$, то пусть $e(2,q) = 1$ при $q \equiv 1 \pmod 4$ и $e(2,q) = 2$ при $q \equiv 3 \pmod 4$.

Говорят, что простое число r с условием $e(r,q) = n$ является *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$.

Обозначим через $r_i(3)$ примитивный простой делитель числа $3^i - 1$, т. е. $r_i(3)$ делит $3^i - 1$ и не делит $3^j - 1$ для каждого $j < i$. По теореме Жигмонди [12] в случае $i \neq 2$ число $r_i(3)$ всегда существует. Нам понадобится несколько предварительных лемм.

Лемма 1. *Если $\omega(G) = \omega(B_p(3))$, то существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/F(G) \leq \mathrm{Aut}(S)$ и $\pi(F(G)) \bigcup \pi(\overline{G}/S) \subseteq$*

$\pi_1(G)$, причем S удовлетворяет системе

$$\frac{3^p-1}{2}\in\{n_i(S)\mid i\geq 2\},\quad t(S)\geq\left[\frac{3p+5}{4}\right]-1,\tag{1}$$

где $t(S)$, $n_i(S)$ $(i\geq 2)$ взяты из табл. 1–3.

Доказательство. Так как $t(G)=t(B_p(3))=[(3p+5)/4]\geq 3$ и $t(2,B_p(3))=2$ (см. табл. 2), то лемма 1 верна ввиду теорем 1 и 2. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром Фробениуса F и циклическим дополнением C. Если $(|F|,|N|)=1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s\cdot|C|\in\omega(G)$ для некоторого $s\in\pi(N)$.*

Доказательство. См. [13, лемма 1].

Лемма 3 [14]. *Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a-q^b=1$ для некоторых натуральных чисел a, b. Тогда пара (p^a,q^b) равна $(3^2,2^3)$, $(p,2^b)$ или $(2^a,q)$.*

Лемма 4. *Для любого простого числа $r\geq 2$ и натурального числа f выполняются неравенства*

$$\frac{r^{10f}-r^{5f}+1}{r^{2f}-r^f+1}>r^{8f}-r^{4f}+1>\frac{r^{10f}+1}{r^{2f}+1}>\frac{r^{10f}+r^{5f}+1}{r^{2f}+r^f+1},$$

причем

$$\frac{r^{10f}+r^{5f}+1}{r^{2f}+r^f+1}=r^{8f}-r^{7f}+r^{5f}-r^{4f}+r^{3f}-r^f+1.$$

Доказательство. Проверяется непосредственно.

Лемма 5. *Все решения системы* (1) *в табл.* 2 *таковы:* $B_p(3)$, $C_p(3)$, $D_p(3)$, $D_{p+1}(3)$.

Доказательство. 1. Пусть $S\cong A_{p'-1}(r^f),A_{p'}(r^f),{}^2A_{p'-1}(r^f),\ {}^2A_{p'}(r^f)$ (p' — нечетное простое число). Тогда из табл. 2 видно, что $p'\geq 5$, $t(S)=(p'+1)/2$ и система (1) принимает вид

$$\frac{r^{p'f}\pm 1}{(r^f\pm 1)(p',r^f\pm 1)}=\frac{3^p-1}{2},\quad \frac{p'+1}{2}\geq\left[\frac{3p+5}{4}\right]-1.\tag{1.1}$$

Неравенство из (1.1) влечет $p\leq 2p'/3+1$. Так как $p'\geq 5$, отсюда $p\neq p'$.

Предположим сначала, что $f=1$. Пусть $r=2$. Тогда уравнение из (1.1) имеет вид

$$(2^{p'}\pm 1)/(2\pm 1)=(3^p-1)/2.$$

Если $(2^{p'}+1)/3=(3^p-1)/2$, то $2^{p'+1}=3^{p+1}-5=9^{\frac{p+1}{2}}-5\equiv 1-5\equiv 4\ (\mathrm{mod}\,8)$; противоречие с неравенством $p'\geq 5$. Если $2^{p'}-1=(3^p-1)/2$, то $2^{p'+1}-3^p=1$ и, следовательно, по лемме 3 $p=p'=1$; противоречие.

Пусть $r=3$. Тогда уравнение из (1.1) имеет вид

$$(3^{p'}\pm 1)/(3\pm 1)=(3^p-1)/2.$$

Если $(3^{p'}+1)/4=(3^p-1)/2$, то $3^{p'-1}+1=2\cdot 3^{p-1}$. Отсюда $3^{p'-1}+1=2\cdot 3^{p-1}\leq 2\cdot 3^{\frac{2}{3}p'}$; противоречие. Если $(3^{p'}-1)/2=(3^p-1)/2$, то $p'=p$; противоречие.

Пусть $r \geq 5$. Тогда

$$\frac{2(r^{p'} \pm 1)}{(r \pm 1)(3^p - 1)} \geq \frac{2(r^{p'} + 1)}{(r + 1)(3^p - 1)} \geq \frac{5^{p'} + 1}{3(3^{\frac{2p'}{3}+1} - 1)}.$$

Заметим, что $5^{p'} + 1 > 3^{p'+2}$, так как ввиду $p' \geq 5$ имеем $(5/3)^{p'} \geq (5/3)^5 > 9$ и $3^{p'}(9 - (5/3)^{p'}) < 1$. Значит,

$$\frac{5^{p'} + 1}{3(3^{\frac{2p'}{3}+1} - 1)} > \frac{3^{p'+2}}{3(3^{\frac{2p'}{3}+1} - 1)} > \frac{3^{p'+1}}{3^{\frac{2p'}{3}+1} - 1} > 3^{p'/3} > p' \geq (p', r \pm 1);$$

противоречие.

Таким образом, $f \geq 2$. Если $p' = 5$, то $p = 3$. Но

$$(r^{5f} \pm 1)/(r^f \pm 1) \geq (r^{5f} + 1)/(r^f + 1) \geq (2^{10} + 1)/(2^2 + 1) = 205 > 13 \cdot (5, r^f \pm 1);$$

противоречие. Поэтому $p' \geq 7$ и, следовательно,

$$\frac{2(r^{p'f} \pm 1)}{(r^f \pm 1)(3^p - 1)} \geq \frac{2(r^{p'f} + 1)}{(r^f + 1)(3^p - 1)} \geq \frac{2(4^{p'} + 1)}{(4 + 1)(3^p - 1)} \geq \frac{2(4^{p'} + 1)}{5(3^{\frac{2p'}{3}+1} - 1)}.$$

Заметим, что $8(4^{p'}+1)/5 > 3^{p'+2}$, так как ввиду $p' \geq 7$ имеем $(4/3)^{p'} \geq (4/3)^7 > 7$ и $3^{p'}(45 - 8(4/3)^{p'}) < 8$. Значит,

$$\frac{2(4^{p'} + 1)}{5(3^{\frac{2p'}{3}+1} - 1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{8}{5}(4^{p'} + 1)}{3^{\frac{2p'}{3}+1} - 1} > \frac{3^{p'+2}}{4(3^{\frac{2p'}{3}+1} - 1)} > \frac{3^{\frac{1}{3}p'+1}}{4} > p' \geq (p', r^f \pm 1);$$

противоречие.

2. Пусть $S \cong B_{p'}(3)$, $C_{p'}(r)$ $(r \in \{2, 3\})$, где p' — нечетное простое число. Тогда из табл. 2 видно, что $t(S) = [(3p' + 5)/4]$, поэтому система (1) принимает вид

$$\frac{r^{p'} - 1}{(2, r - 1)} = \frac{3^p - 1}{2}, \quad \frac{3p' + 5}{4} \geq \left[\frac{3p + 5}{4}\right] - 1. \tag{1.2}$$

Неравенство из (1.2) влечет $p \leq p' + 2$. Пусть уравнение из (1.2) имеет вид $(3^{p'} - 1)/2 = (3^p - 1)/2$. Отсюда $p' = p$, что не противоречит лемме. Если уравнение из (1.2) имеет вид $2^{p'} - 1 = (3^p - 1)/2$, т. е. $2^{p'+1} - 3^p = 1$, то по лемме 3 $p' = p = 1$; противоречие.

3. Пусть $S \cong B_n(r^f)$, $C_n(r^f)$, где $n = 2^m \geq 4$. Тогда из табл. 2 видно, что $t(S) = [(3n + 5)/4]$, поэтому система (1) принимает вид

$$\frac{r^{nf} + 1}{(2, r - 1)} = \frac{3^p - 1}{2}, \quad \frac{3n + 5}{4} \geq \left[\frac{3p + 5}{4}\right] - 1. \tag{1.3}$$

Неравенство из (1.3) влечет $p \leq n + 2$. Но p нечетно, поэтому $p \leq n + 1$.

Пусть $r > 2$. Тогда уравнение из (1.3) имеет вид $(r^{nf} + 1)/2 = (3^p - 1)/2$, откуда $r^{nf} = 3^p - 2$. Предположим сначала, что $f = 1$. Если $r = 3$, то $3^n = 3^p - 2$; противоречие. Пусть $r \geq 5$. Тогда $5^n \leq r^n = 3^p - 2 \leq 3^{n+1} - 2$. Так как $n \geq 4$, то $2 \leq 3^{n+1} - 5^n = 3^n(3 - (5/3)^n) < 0$; противоречие. Таким образом, $f \geq 2$. Имеем $3^{2n} \leq r^{2n} \leq r^{nf} = 3^p - 2 \leq 3^{n+1} - 2$, т. е. $3^{2n} \leq 3^{n+1} - 2$; противоречие.

Если $r = 2$, то $2^{nf} + 1 = (3^p - 1)/2$, т. е. $2^{nf} = (3^p - 3)/2 = 3(3^{p-1} - 1)/2$; противоречие.

4. Пусть $S \cong D_{p'}(r)$ ($p' \geq 5$, $r \in \{2,3,5\}$), $D_{p'+1}(r)$ ($r \in \{2,3\}$), ${}^2D_n(2)$ ($n = 2^m+1 \geq 9$), ${}^2D_{p'}(3)$ ($5 \leq p' \neq 2^m+1$), ${}^2D_n(3)$ ($9 \leq n = 2^m+1 \neq p'$), ${}^2D_{p'}(3)$ ($p' = 2^m+1 \geq 5$), ${}^2D_n(r^f)$ ($n = 2^m \geq 4$), где p' — нечетное простое число. Тогда система (1) имеет точно два решения $D_p(3)$ и $D_{p+1}(3)$. Это может быть доказано теми же методами, как в пп. 1, 2.

5. Пусть $S \cong E_8(r^f)$. Тогда $t(S) = 12$, поэтому ввиду леммы 1

$$\frac{3^p-1}{2} \in \left\{\frac{r^{10f}+r^{5f}+1}{r^{2f}+r^f+1}, \frac{r^{10f}-r^{5f}+1}{r^{2f}-r^f+1}, \frac{r^{10f}+1}{r^{2f}+1}, r^{8f}-r^{4f}+1\right\}$$

и неравенство из (1) имеет вид $[(3p+5)/4]-1 \leq 12$, т. е. $3 \leq p \leq 13$.

Пусть $r \leq 5$. Проверим, что (1) не имеет решения. Пусть

$$(r^{10f}+r^{5f}+1)/(r^{2f}+r^f+1) = (3^p-1)/2.$$

Тогда

$$\frac{r^{10f}+r^{5f}-r^{2f}-r^f}{r^{2f}+r^f+1} = \frac{3(3^{p-1}-1)}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &r^f \cdot \frac{(r^{4f}-1)(r^{5f}+r^f+1)}{r^{2f}+r^f+1} \\ &= \frac{3(3^{p-1}-1)}{2} \in \{3\cdot 4, 3\cdot 8\cdot 5,\ 3\cdot 4\cdot 7\cdot 13,\ 3\cdot 4\cdot 121\cdot 61,\ 3\cdot 8\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 73\}. \end{aligned}$$

Так как $(r^f, (r^{4f}-1)(r^{5f}+r^f+1)/(r^{2f}+r^f+1)) = 1$ и $r \leq 5$, то $r^f \in \{3,4,5,8\}$. Теперь утверждение $(r^{10f}+r^{5f}+1)/(r^{2f}+r^f+1) \neq (3^p-1)/2$ при $3 \leq p \leq 13$ проверяется непосредственно.

Случай $(r^{10f}-r^{5f}+1)/(r^{2f}-r^f+1) = (3^p-1)/2$ проверяется аналогично рассмотренному.

Пусть $(r^{10f}+1)/(r^{2f}+1) = (3^p-1)/2$. Тогда

$$\begin{aligned} &r^{2f}(r^{2f}-1)(r^{4f}+1) \\ &= 3(3^{p-1}-1)/2 \in \{3\cdot 4,\ 3\cdot 8\cdot 5,\ 3\cdot 4\cdot 7\cdot 13,\ 3\cdot 4\cdot 121\cdot 61,\ 3\cdot 8\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 73\}. \end{aligned}$$

Так как $(r^{2f}, (r^{2f}-1)(r^{4f}+1)) = 1$, то $r^{2f} = 4$ и, следовательно, $3^p = 411$; противоречие.

Пусть $r^{8f}-r^{4f}+1 = (3^p-1)/2$. Тогда

$$r^{4f}(r^{4f}-1) = 3(3^{p-1}-1)/2 \in \{3\cdot 4,\ 3\cdot 8\cdot 5,\ 3\cdot 4\cdot 7\cdot 13,\ 3\cdot 4\cdot 11^2\cdot 61,\ 3\cdot 8\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 73\};$$

противоречие.

Таким образом, $r \geq 7$. По лемме 4 выполняются неравенства $n_i \geq r^{8f} - r^{7f} + r^{5f} - r^{4f} + r^{3f} - r^f + 1 \geq 7^8 - 7^7 + 7^5 - 7^4 + 7^3 - 7 + 1 > (3^{13}-1)/2$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6. *Предположим, что* (1) *— это система из леммы* 1, S *— конечная простая неабелева группа лиева типа. Тогда*

(а) *если* $r > 5$, *то* (1) *имеет единственное решение:* $S \cong A_1(13)$ *при* $p = 3$;

(б) *если* $r = 5$, *то* (1) *имеет точно два решения:* $S \cong A_1(25)$ *и* $S \cong C_2(5)$ *при* $p = 3$;

(в) *если* $r = 2$, *то* (1) *имеет в точности следующие решения:* $S \cong {}^2A_2(4)$, ${}^2B_2(2^3)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^2E_6(2)$, $F_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, $G_2(4)$ *при* $p = 3$;

(г) *если* $r = 3$, *то* (1) *имеет в точности следующие решения:* $S \cong B_p(3)$, $C_p(3)$, $D_{p+1}(3)$, $D_p(3)$ *для любого* p; $A_1(3^3)$, $A_2(3)$, $G_2(3)$, $A_3(3)$ *при* $p = 3$; $E_7(3)$ *при* $p = 7$.

Доказательство. (а) Пусть $r > 5$. Предположим, что S из табл. 1. Тогда $t(S) \leq 8$. Так как из (1) имеем $[(3p+5)/4] - 1 \leq t(S) \leq 8$, то $p \leq 11$.

Пусть $p = 11$. Тогда уравнение из (1) имеет вид $n_i = 88573$. Поэтому из неравенства в системе (1) имеем $t(S) \geq [(3p+5)/4] - 1 = 8$. Отсюда уравнение из (1) не имеет решений в табл. 1; противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда уравнение из (1) имеет вид $n_i = 1093$. Поэтому из неравенства в системе (1) $t(S) \geq [(3p+5)/4] - 1 = 5$. Значит, $5 \leq t(S) \leq 8$. Отсюда ввиду табл. 1 группа S изоморфна одной из следующих групп: $F_4(r^f)$, ${}^2E_6(r^f)$, $E_6(r^f)$. Если $S \cong F_4(r^f)$, то $r^{4f} - r^{2f} + 1 = 1093$ и r^{2f} — нецелое число; противоречие. Если $S \cong {}^2E_6(r^f)$, то $r^{6f} - r^{3f} + 1 \geq r^6 - r^3 + 1 \geq 7^6 - 7^3 + 1 > 1093(3, r^f + 1)$; противоречие. В случае $S \cong E_6(r^f)$ аналогично приходим к противоречию.

Пусть $p = 5$. Тогда уравнение из (1) имеет вид $n_i = 121$. Поэтому из неравенства в системе (1) $t(S) \geq [(3p+5)/4] - 1 = 4$. Значит, $4 \leq t(S) \leq 8$. Отсюда ввиду табл. 1 группа S изоморфна одной из следующих групп: $F_4(r^f)$, $A_2(r^f)$, ${}^2A_2(r^f)$, ${}^2E_6(r^f)$, $E_6(r^f)$.

Пусть $S \cong A_2(r^f)$. Тогда $(r^{3f} - 1)/(r^f - 1)(3, r^f - 1) = 121$. Если $f \geq 2$, то $(r^{3f} - 1)/(r^f - 1) \geq (7^6 - 1)/(7^2 - 1) = 2451 > 121\,(3, r^f - 1)$, откуда система (1) не имеет решения. Значит, $f = 1$, и легко проверить, что система (1) не имеет решения. Если $S \cong {}^2A_2(r^f)$, $E_6(r^f)$, ${}^2E_6(r^f)$, то проверятся, что уравнение из (1) не имеет решения, тем же способом. Если $S \cong F_4(r^f)$, то $r^{4f} - r^{2f} + 1 = 121$ и r^{2f} — нецелое число; противоречие.

Если $p = 3$, то $n_i = 13$ и легко проверить, что единственным решением в табл. 1 является $S \cong A_1(13)$.

Применяя лемму 5, получим (а).

(б) Пусть $r = 5$. Тогда по лемме 5 система (1) не имеет решения в табл. 2. Пусть S из табл. 1. Тогда $t(S) \leq 8$, откуда $p \leq 11$, поэтому $n_i \in \{13,\ 121,\ 1093,\ 88573\}$.

Пусть $p = 11$. Тогда уравнение из (1) имеет вид $n_i = 88573$. Поэтому из неравенства в системе (1) имеем $t(S) \geq [(3p+5)/4] - 1 = 8$. Отсюда уравнение из (1) не имеет решений в табл. 1; противоречие.

Предположим, что $p \leq 7$. Тогда $n_i \in \{13,\ 121,\ 1093\}$. Если $S \ncong A_1(5^f)$ или $f \geq 3$, то S не является решением системы (1), так как $n_i > 1093$. Значит, $f \leq 2$, и нетрудно проверить, что $S \cong C_2(5)$. Пусть $S \cong A_1(5^f)$. Если $f \geq 5$, то $n_i \geq (5^5 - 1)/2 > 1093$ и система (1) не имеет решения. Если $f \leq 4$, то легко проверяется, что $S \cong A_1(25)$ — единственное решение.

(в) Пусть $r = 2$. Тогда по лемме 5 система (1) не имеет решения в табл. 2. Пусть S из табл. 1. Тогда $t(S) \leq 8$, откуда $p \leq 11$.

Пусть $p = 11$. Тогда уравнение из (1) имеет вид $n_i = 88573$. Поэтому из неравенства в системе (1) имеем $t(S) \geq [(3p+5)/4] - 1 = 8$. Отсюда ввиду табл. 1 $S \cong E_7(2)$. Если $S \cong E_7(2)$, то $n_i \in \{73, 127\}$; противоречие.

Предположим, что $p \leq 7$. Тогда $n_i \in \{13,\ 121,\ 1093\}$. Если $S \ncong A_1(2^f)$ или $f \geq 6$, то $n_i > 1093$ и система (1) не имеет решения. Значит, $f \leq 5$. Нетрудно проверить, что решениями являются в точности группы ${}^2A_2(4)$, ${}^2B_2(2^3)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^2E_6(2)$, $F_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, $G_2(4)$. Пусть $S \cong A_1(2^f)$. Если $f \geq 11$, то $n_i > 1093$ и система (1) не имеет решения. Если $f \leq 10$, то легко проверяется, что (1) не имеет решения.

(г) Пусть $r = 3$. Тогда по лемме 5 достаточно рассмотреть группы из табл. 1, т. е. $p \leq 11$.

Пусть $p = 11$. Тогда уравнение из (1) имеет вид $n_i = 88573$. Поэтому из неравенства в системе (1) имеем $t(S) \geq [(3p+5)/4]-1 = 8$. Отсюда ввиду табл. 1 $S \cong E_7(3)$. Если $S \cong E_7(3)$, то $n_i \in \{757, 1093\}$; противоречие.

Предположим, что $p \leq 7$. Тогда $n_i \in \{13,\ 121,\ 1093\}$. Если $S \ncong A_1(3^f)$ или $f \geq 4$, то $n_i > 1093$; противоречие. Если $f \leq 3$, то легко проверяется, что решениями являются в точности группы $S \cong A_2(3)$, $A_3(3)$, $E_7(3)$, $G_2(3)$. Пусть $S \cong A_1(3^f)$. Если $f \geq 8$, то $n_i > 1093$, поэтому система (1) не имеет решения. Если $f \leq 7$, то решениями уравнения из системы (1) являются группы $S \cong A_1(3^3)$, $A_1(3^5)$, $A_1(3^7)$. Если $S \cong A_1(3^5)$, то $p = 5$, $[(3p+5)/4]-1 = 4$, но $t(S) = 3$; противоречие со вторым равенством системы (1). Если $S \cong A_1(3^7)$, то $p = 7$, $[(3p+5)/4]-1 = 4$, но $t(S) = 3$; противоречие со вторым равенством системы (1). Лемма доказана.

Лемма 7. *Группы $B_p(3)$ и $D_p(3)$ содержат подгруппу, изоморфную группе Фробениуса $U : Z_{(3^p-1)/2}$, где U — нетривиальная 3-группа.*

Доказательство. Пусть G — группа, изоморфная $B_p(3)$ или $D_p(3)$. По [15, 4.1.20] группа G содержит подгруппу, изоморфную $U : SL_p(3)$, где U — нетривиальная 3-группа. В $SL_p(3)$ возьмем циклическую подгруппу Z порядка $(3^p-1)/2$. Ввиду табл. 2 $U : Z$ — искомая группа Фробениуса. Лемма доказана.

Определяем, как в [10], функцию $\eta(x)$ на множестве натуральных чисел: $\eta(x) = x$ при нечетном x и $\eta(x) = x/2$ при четном x.

Лемма 8. *Пусть $r, s \in \pi(B_p(3)) \setminus \{2, 3\}$, $k = e(r, 3)$, $l = e(s, 3)$ и $1 \leq \eta(k) \leq \eta(l)$. Тогда r, s не смежны в $GK(B_p(3))$ тогда и только тогда, когда $\eta(k)+\eta(l) > p$ и $\eta(k)$, $\eta(l)$ удовлетворяют условию: $(-1)^{l+k}\frac{\eta(l)}{\eta(k)}$ не является нечетным положительным целым числом. В частности, множество $\{r_3(3), r_{2p}(3), r_{2(p-1)}(3)\}$ является независимым в $GK(B_p(3))$.*

Доказательство. См. доказательство предложения 2.3 в [10].

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть G — конечная группа с условием $\omega(G) = \omega(B_p(3))$. Тогда по лемме 1 существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/F(G) \leq \mathrm{Aut}(S)$, $\pi(F(G)) \bigcup \pi(\overline{G}/S) \subseteq \pi_1(G)$ и $s(S) \geq 2$. Мы используем классификацию конечных простых групп. Далее рассмотрим все возможности для S из табл. 1–3.

Лемма 9. *S не изоморфна спорадической группе.*

Доказательство. Пусть S изоморфна спорадической группе. Так как $p \geq 3$, то $(3^p-1)/2 \geq 13$. По лемме 1 и табл. 3 имеем $(3^p-1)/2 \in \{13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 59,\ 67,\ 71\}$. Легко видеть, что $p = 3$. Следовательно, $S \cong Suz$ или Fi_{22}. Но тогда $\pi(S)$ не лежит в $\pi(B_3(3))$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 10. *S не изоморфна A_n при $n \geq 5$.*

Доказательство. Предположим, что S изоморфна A_n. Если $n = 5, 6$, то по лемме 1 $(3^p-1)/2$ равно 3 или 5; противоречие. Поэтому $n \geq 7$. Рассмотрим табл. 3. Если $s(A_n) = 2$, то $n \in \{p',\ p'+1,\ p'+2\}$, одно из чисел n и $n-2$ не простое и $(3^p-1)/2=p'$. Если $s(A_n)=3$, то $n\in\{p',p'-2\}$, p' и $p'-2$ — простые числа и $(3^p-1)/2\in\{p',p'-2\}$.

Пусть $r_{2p}(3)\in\pi(G/F(G))$. Тогда по табл. 4 из [10] числа 3 и $r_{2p}(3)$ не смежны в $G/F(G)$, так как 3 и $r_{2p}(3)$ не смежны в $B_p(3)$. Однако $3+r_{2p}(3)\le n$. Действительно, поскольку $r_{2p}(3)$ нечетно и делит $(3^p+1)/4$, то $r_{2p}(3)\le(3^p+1)/4$, т. е. $3+r_{2p}(3)\le 3+(3^p+1)/4\le(3^p-1)/2-2$. С другой стороны, $(3^p-1)/2=p'$ или $p'-2$. Таким образом, $3+r_{2p}(3)\le p'-2\le n$, поэтому 3 и $r_{2p}(3)$ смежны в $G/F(G)$; противоречие.

Значит, $r_{2p}(3)\notin\pi(G/F(G))$. Если $p=3$, то $r_6(3)=7\in\pi(A_n)\subseteq\pi(G/F(G))$; противоречие. Поэтому $p\ge5$. По лемме 8 числа $r_3(3),r_{2p}(3),r_{2(p-1)}(3)$ попарно не смежны. Заметим, что $r_3(3)=13$. Так как $r_{2p}(3)\notin\pi(G/F(G))$, то $|F(G)|$ делится на $r_{2p}(3)$. Поскольку подгруппа $F(G)$ нильпотентна, то $13,r_{2(p-1)}(3)\in\pi(S)$. Тогда

$$13+r_{2(p-1)}(3)\le 13+\frac{3^{p-1}+1}{2}=\frac{3^{p-1}+27}{2}\le\frac{3^p-1}{2}-2\le p'-2\le n.$$

Следовательно, число 13 смежно с $r_{2(p-1)}(3)$ в $GK(S)$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 11. *Если S — простая группа лиева типа характеристики r, то $S\cong B_p(3)$ для $p>3$ и $S\cong B_3(3)$, $D_4(3)$ для $p=3$.*

Доказательство. Случай 1. Пусть $r>5$. По лемме 6(а) $p=3$ и $S\cong A_1(13)$. Тогда $\overline{G}\cong L_2(13)$, $PGL_2(13)$. Ввиду [11] $\mu(PGL_2(13))=\{14,13,12\}$ и $\mu(B_3(3))=\{13,7\cdot2,5\cdot3,5\cdot4,9\cdot2,3\cdot4,8\}$, поэтому $|F(G)|$ делится на 2, 3 и 5. Так как группа $F(G)$ нильпотентна, то $2\cdot3\cdot5=30\in\omega(F(G))$; противоречие.

Случай 2. Пусть $r=5$. По лемме 6(б) $p=3$ и $S\cong C_2(5)$, $A_1(25)$. Если $S\cong C_2(5)$, то $30\in\omega(B_3(3))$, так как $30\in\omega(S)$; противоречие. Пусть $S\cong A_1(25)$. Тогда $|F(G)|$ делится на 3 и 7. Так как группа $F(G)$ нильпотентна, то $3\cdot7=21\in\omega(F(G))$; противоречие.

Случай 3. Пусть $r=2$. По лемме 6(в) $p=3$ и $S\cong {}^2A_2(4)$, ${}^2B_2(2^3)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, $F_4(2)$, $G_2(4)$, ${}^2E_6(2)$. Пусть $S\cong {}^2A_2(4)$. Тогда $|F(G)|$ делится на 3, 7. Так как группа $F(G)$ нильпотентна, то $3\cdot7=21\in\omega(F(G))$; противоречие. Если $S\cong {}^3D_4(2)$, $F_4(2)$, то $28\in\omega(G)$, так как $28\in\omega(S)$; противоречие.

Если $S\cong {}^2F_4(2)'$, то $16\in\omega(G)$, так как $16\in\omega(S)$; противоречие. Если $S\cong G_2(4)$, то $21\in\omega(S)$; противоречие с тем, что в $B_3(3)$ нет элемента порядка 21. Если $S\cong {}^2E_6(2)$, то $19\in\pi({}^2E_6(2))\setminus\pi(B_3(3))$; противоречие.

Предположим, что $S\cong {}^2B_2(8)$. Пусть $\overline{G}\cong {}^2B_2(8)$. Тогда $\overline{G}$ является 3-группой и, следовательно, $O_3(F(G))\ne1$. В $\overline{G}$ содержится подгруппа, изоморфная группе Фробениуса $Z_2^3:Z_7$. Рассмотрим полный прообраз K этой подгруппы в G. По лемме 2 $3\cdot7=21\in\omega(G)$; противоречие.

Пусть $\overline{G}\cong \mathrm{Aut}({}^2B_2(2^3))$. Тогда $14\notin\omega(\mathrm{Aut}({}^2B_2(2^3)))$, однако $14\in\omega(B_3(3))$. Таким образом, $O_2(F(G))\ne1$ или $O_7(F(G))\ne1$. Кроме того, существует подгруппа Фробениуса $Z_{13}:Z_{12}$ в $\mathrm{Aut}({}^2B_2(2^3))$, поэтому по лемме 2 множество $\omega(B_3(3))$ содержит 24 или 84; противоречие.

Случай 4. Пусть $r=3$. По лемме 6(г) группа S изоморфна одной из следующих групп: $A_1(3^3)$, $A_2(3)$, $A_3(3)$, $B_p(3)$, $C_p(3)$, $D_{p+1}(3)$, $D_p(3)$, $E_7(3)$, $G_2(3)$. Если S изоморфна одной из групп $A_1(3^3)$, $A_2(3)$, $A_3(3)$, $G_2(3)$, то $t(S)\le3$ по табл. 1, поэтому $p=3$.

Пусть $S\cong A_1(3^3)$. Тогда $|F(G)|$ делится на 2, 3, 5. Так как группа $F(G)$ нильпотентна, то $2\cdot3\cdot5=30\in\omega(F(G))$; противоречие. Пусть $S\cong A_2(3)$. Тогда

$|F(G)|$ делится на 5, 7. Поскольку $F(G)$ нильпотентна, то $35 \in \omega(G)$; противоречие. Пусть $S \cong A_3(3)$. Тогда $O_7(F(G)) \neq 1$. Так как существует подгруппа Фробениуса $(Z_3 \times Z_3 \times Z_3) : Z_{13}$ в $A_3(3)$, то $91 \in \omega(B_3(3))$; противоречие.

Пусть $S \cong G_2(3)$. Тогда $O_5(F(G)) \neq 1$. Поскольку существует подгруппа Фробениуса $Z_{13} : Z_6$ в $G_2(3)$, то $30 \in \omega(B_3(3))$; противоречие. Пусть $S \cong E_7(3)$. Тогда $p = 7$. Так как $r_{18}(3) = 19 \in \pi(E_7(3))$ и $r_{18}(3)$ не делит $|B_p(3)|$ при $p = 7$, получаем противоречие.

Предположим, что $S \cong D_p(3)$. Поскольку $r_{2p}(3) \notin \pi(D_p(3))$, получаем $O_{r_{2p}(3)}(F(G)) \neq 1$. С другой стороны, по лемме 7 существует подгруппа Фробениуса $U : Z_m$, где U — нетривиальная 3-группа и $m = (3^p - 1)/2$. Таким образом, $r_{2p}(3) \cdot (3^p - 1)/2 \in \omega(B_p(3))$; противоречие.

Пусть $S \cong D_{p+1}(3)$. Пусть $p \neq 3$. Тогда по [16, теорема 1.1] граф $GK(B_p(3))$ не изоморфен графу $GK(D_{p+1}(3))$, поэтому $\omega(B_p(3)) \neq \omega(D_{p+1}(3))$. Но по [15] $B_p(3) < D_{p+1}(3)$, следовательно, $\omega(B_p(3)) \subset \omega(D_{p+1}(3)) \subseteq \omega(B_p(3))$; противоречие.

Предположим, что $S \cong C_p(3)$. По [17] $3(3^{p-1} + 1) \in \omega(C_p(3)) \setminus \omega(B_p(3))$; противоречие. Следовательно, $S \cong B_p(3)$ для $p > 3$; $S \cong B_3(3)$, $D_4(3)$ для $p = 3$. Лемма доказана.

Из лемм 9–11 следует, что $S \cong B_p(3)$ для $p > 3$ и $S \cong B_3(3)$ или $D_4(3)$ для $p = 3$.

Лемма 12. *$G/F(G) \cong B_p(3)$ для $p > 3$, и $G/F(G) \cong B_3(3)$, $D_4(3)$ для $p = 3$.*

Доказательство. Если $G/F(G) \neq S$, то по [18] граф простых чисел группы $G/F(G)$ связен. Поэтому $G/F(G) \cong S$. Лемма доказана.

Лемма 13. *$F(G) = 1$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $F(G) \neq 1$, то $\omega(G) \neq \omega(B_p(3))$. Можно предполагать, что $F(G)$ — нетривиальная элементарная абелева q-группа и $B_p(3)$ действует на $F(G)$ точно и неприводимо. Если $q = 3$, то ввиду [19, теорема 1.3] любой элемент из $B_p(3)$ централизует нетривиальный элемент из $F(G)$, поэтому 3 и $r_p(3)$ смежны, т. е. $\omega(G) \neq \omega(B_p(3))$. Пусть $q \neq 3$. По лемме 7 существует подгруппа Фробениуса $U : Z_m$ группы $B_p(3)$, где U — нетривиальная 3-группа и $m = (3^p - 1)/2$. Поэтому $q \cdot r_p(3) \in \omega(G)$ по лемме 2 и, следовательно, $\omega(G) \neq \omega(B_p(3))$. Аналогично доказывается, что $\omega(G) \neq \omega(D_4(3))$. Лемма доказана.

Теперь теорема следует из лемм 12 и 13.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазуров В. Д.* Группы с заданным спектром // Изв. Уральск. гос. ун-та. Математика и механика. 2005. № 7. С. 119–138.
2. *Алексеева О. А., Кондратьев А. С.* О распознаваемости группы $E_8(q)$ по множеству порядков элементов // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 998–1003.
3. *Нерешенные вопросы теории групп.* Коуровская тетрадь. 16-е изд. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2006.
4. *Васильев А. В.* О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 315–324.
5. *Shi W., Tang C. Y.* A characterization of some finite orthogonal simple groups // Progr. Natur. Sci. 1997. V. 7, N 2. P. 155–162.
6. *Lipschutz S., Shi W.* Finite groups whose element orders do not exceed twenty // Progr. Natur. Sci. 2000. V. 10, N 1. P. 11–21.

7. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
8. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
9. *Кондратьев А. С., Мазуров В. Д.* Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.
10. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
11. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
12. *Zsigmondy K.* Zür Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.
13. *Мазуров В. Д.* Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
14. *Gerono G. C.* Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1970. V. 9. P. 469–471.
15. *Kleidman P., Liebeck M.* The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
16. *Kantor W. M., Seress A.* Prime power graphs for groups of Lie type // J. Algebra. 2002. V. 247, N 2. P. 370–434.
17. *Shi W.* Pure quantitative characterization of finite simple groups // Front. Math. China. 2007. V. 2, N 1. P. 123–125.
18. *Lucido M. S.* Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. V. 102. P. 1–22.
19. *Guralnick R. M., Tiep P. H.* Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. V. 6, N 3. P. 271–310.

Статья поступила 25 января 2008 г., окончательный вариант — 19 ноября 2009 г.

Зиновьева Марианна Рифхатовна
Уральский гос. технический университет,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Шен Рулин (Rulin Shen), Ши Вуджи (Wujie Shi)
Department of mathematics,
Suzhou University, China, 215006
wjshi@suda.edu.cn