Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 510.5

НЕКОТОРЫЕ КОНСТРУКЦИИ НА КЛАССЕ ГРУПП ВЫЧИСЛИМЫХ АВТОМОРФИЗМОВ

П. А. Куликов

Аннотация. Показано, что вычислимый обратный предел вычислимого семейства вычислимых групп, вычислимое сплетение группы вычислимых автоморфизмов и вычислимой группы, а также коммутант и центр всякой вычислимой группы реализуются как группы вычислимых автоморфизмов подходящих вычислимых моделей.

Ключевые слова: группа вычислимых автоморфизмов вычислимой модели, вычислимая группа.

Введение

Основные определения и результаты по теории вычислимости и группам вычислимых автоморфизмов представлены в [1–3].

Напомним, что модель $\mathfrak{M} = \left\langle M, f_0^{n_0}, \dots; P_0^{m_0}, \dots; c_0, \dots \right\rangle$ называется *вычислимой*, если M — вычислимое подмножество множества натуральных чисел ω, отображения $i \mapsto n_i$ (арность f_i), $i \mapsto m_i$ (арность P_i), $i \mapsto c_i$ (значения констант) вычислимы, семейства функций $\{f_i\}$ и предикатов $\{P_i\}$ являются вычислимыми (т. е. существуют вычислимые функции Φ и Ψ такие, что $\Phi(i)$ — номер (клиниевский) функции f_i, а $\Psi(i)$ — номер характеристической функции предиката P_i). Все *вычислимые автоморфизмы* модели $\mathfrak{M}$ (автоморфизмы модели $\mathfrak{M}$, являющиеся вычислимыми функциями) образуют группу, которую будем обозначать через $\mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{M}$.

При изучении класса групп вычислимых автоморфизмов естественной является задача описания данного класса, которая оказывается довольно сложной. Так, класс групп вычислимых автоморфизмов не может быть описан как класс всех групп, вычислимых относительно некоторого оракула [4]. Элементарная теория класса таких групп оказывается вычислимо изоморфной арифметике [5], не удается разумно описать даже конечно порожденные подгруппы таких групп [6]. Одним из важных результатов в данном направлении является определение нетривиальной иерархии внутри изучаемого класса [7].

Другим не менее интересным вопросом, изучение которого может помочь более подробно описать данный класс, является вопрос о замкнутости класса групп вычислимых автоморфизмов относительно различных теоретико-групповых операций.

Мы рассматриваем группу как алгебраическую систему сигнатуры, содержащей один символ двуместной операции. Выражение $\langle x, y\rangle$ означает вычислимое взаимно однозначное отображение из ω^2 на ω, при этом зафиксируем

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–335.2008.1).

такие вычислимые функции $(\cdot)_1$ и $(\cdot)_2$, что $\langle (z)_1, (z)_2 \rangle = z$ и $(\langle z_1, z_2 \rangle)_1 = z_1$, $(\langle z_1, z_2 \rangle)_2 = z_2$.

Семейство вычислимых групп $\{G_i\}_{i\in\omega}$ называется *вычислимым*, если существует вычислимая функция Φ такая, что $\Phi(i) = \langle \alpha_i, \beta_i \rangle$ для любого натурального i, где α_i — номер характеристической функции носителя группы G_i, β_i — номер функции умножения в группе G_i.

Хорошо известно следующее утверждение, доказываемое на основе метода из [8].

Утверждение 1. *Для любой вычислимой группы G существует вычислимая модель $\mathfrak{M}$ такая, что $G \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{M}$.*

Искомой моделью $\mathfrak{M}$ для доказательства является модель сигнатуры $\langle l_g^1 \mid g \in G \rangle$, состоящей из одноместных функциональных символов и интерпретируемой на носителе модели, которым является носитель группы G, следующим образом:

$$l_g(x) = g \cdot x \quad \text{для всякого } g \in G.$$

Таким образом, всякая вычислимая группа реализуется как группа вычислимых автоморфизмов некоторой вычислимой модели. Далее мы приведем несколько результатов о замкнутости класса групп вычислимых автоморфизмов относительно некоторых теоретико-групповых конструкций.

Так, прямое произведение вычислимого семейства вычислимых групп является вычислимой группой, а значит, реализуется как группа вычислимых автоморфизмов некоторой вычислимой модели. С помощью утверждения 1 можно показать, что вычислимое декартово произведение семейства групп $\{G_i\}_{i\in\omega}$ таких, что $G_i \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{M}_i$ и $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in\omega}$ — вычислимое семейство вычислимых моделей, реализуется как группа вычислимых автоморфизмов некоторой вычислимой модели. В данном случае вычислимое декартово произведение семейства групп $\{G_i\}_{i\in\omega}$ — это множество $\{f : \omega \to \bigcup\limits_{i\in\omega} G_i \mid f$ — вычислимая нумерация и $f(i) \in G_i$ для всякого $i \in \omega\}$ с естественным образом заданной операцией умножения.

1. Вычислимый обратный предел

Пусть $\{G_i\}_{i\in\omega}$ — вычислимое семейство вычислимых групп, а $\{\theta_i\}_{i\in\omega}$ — вычислимое семейство вычислимых гомоморфизмов такие, что

$$\cdots \to G_2 \xrightarrow{\theta_1} G_1 \xrightarrow{\theta_0} G_0.$$

Последовательность $(\ldots g_2, g_1, g_0)$ называется *нитью*, если $g_i \in G_i$ и $\theta_i(g_{i+1}) = g_i$ для всякого натурального i. На множестве всех нитей определяется операция умножения, задаваемая покомпонентным умножением. Нить является *вычислимой*, если найдется вычислимая функция f такая, что $f(i) = g_i$. Множество вычислимых нитей с определенной операцией умножения образует группу $\varprojlim_{\mathrm{rec}} G_i$, называемую *обратным вычислимым пределом* семейства групп $\{G_i\}_{i\in\omega}$.

Теорема 1. *Для всякого вычислимого семейства вычислимых групп $\{G_i\}_{i\in\omega}$ и вычислимого семейства вычислимых гомоморфизмов $\{\theta_i\}_{i\in\omega}$ таких, что*

$$\cdots \to G_2 \xrightarrow{\theta_1} G_1 \xrightarrow{\theta_0} G_0,$$

существует вычислимая модель $\mathfrak{G}$ *такая, что* $\varprojlim_{\mathrm{rec}} G_i \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{G}$.

Доказательство. Если носителем группы G_i является множество $\{g_0^i, g_1^i, g_2^i, \dots\}$, то без ограничения общности можно рассматривать в качестве ее носителя множество $\{\langle i, g_0^i\rangle, \langle i, g_1^i\rangle, \langle i, g_2^i\rangle, \dots\}$, тем самым имея $G_i \cap G_j = \varnothing$ для $i \neq j$.

Пусть $G \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i\in\omega} G_i$; для построения необходимой модели $\mathfrak{G}$ рассмотрим сигнатуру $\langle L_g^1, P_i^1, R_i^2\rangle_{g\in G, i\in\omega}$ и интерпретируем ее на носителе G (если $g \in G$, то через i_g обозначается номер группы, в которой лежит g, т. е. $g \in G_{i_g}$):

$$L_g(x) = \begin{cases} gx, & \text{если } x \in G_{i_g}, \\ x, & \text{если } x \in G \setminus G_{i_g}, \end{cases} \quad \text{для всякого } g \in G,$$

$$P_i(x) \Leftrightarrow x \in G_i, \quad i \in \omega, \tag{1}$$

$$R_i(x, y) \Leftrightarrow y = \theta_i(x), \quad i \in \omega. \tag{2}$$

Лемма 1. *Определенная выше модель* $\mathfrak{G}$ *вычислима.*

Доказательство. В силу равномерной вычислимости групп существует вычислимая функция Φ такая, что $\Phi(i) = \langle \alpha_i, \beta_i\rangle$ для любого натурального i, где α_i — номер характеристической функции носителя группы G_i, β_i — номер функции умножения в группе G_i.

Вычислимость множества G вытекает из вычислимости его характеристической функции:

$$\chi_G(x) = \chi_{G_{(x)_1}}(x) = \{(\Phi((x)_1))_1\}(x).$$

Вычислимость семейств предикатов и функций следует из рекурсивности следующих функций, вычислимых в силу вычислимости семейств групп $\{G_i\}_{i\in\omega}$ и гомоморфизмов $\{\theta_i\}_{i\in\omega}$, и s-m-n-теоремы:

$$L(g, x) = \begin{cases} (\Phi((g)_1))_2(g, x), & \text{если } ((g)_1 = (x)_1) \wedge (\chi_G(g)\chi_G(x) = 1), \\ x, & \text{если } ((g)_1 \neq (x)_1) \wedge (\chi_G(g)\chi_G(x) = 1); \end{cases}$$

$$P(i, x) = \overline{\mathbf{sg}}(|(x)_1 - i|)\chi_G(x);$$

$$R(i, x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\theta_i(x) = y) \wedge ((x)_1 = i + 1) \wedge ((y)_1 = i) \wedge (\chi_G(x)\chi_G(y) = 1), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лемма доказана.

Для произвольного $h = (\dots h_2, h_1, h_0) \in \varprojlim_{\mathrm{rec}} G_i$ определим отображение φ^h следующим образом: если $g \in G_i$, то $\varphi^h(g) = gh_i$, или $\varphi^h(g) = gh_{i_g}$ для всякого $g \in G$.

Лемма 2. *Определенное выше отображение* φ^h *является вычислимым автоморфизмом модели* $\mathfrak{G}$.

Доказательство. Инъективность и сюръективность отображения φ^h непосредственно следуют из его определения.

Так как

$$P_i(x) \Leftrightarrow x \in G_i \Leftrightarrow xh_i \in G_i \Leftrightarrow P_i(\varphi^h(x)), \tag{3}$$

то

$$L_g(\varphi^h(x)) = g\varphi^h(x) = gxh_{i_g} = L_g(x)h_{i_g} = \varphi^h(L_g(x)), \quad x \in G_{i_g}, \tag{4}$$

$$L_g(\varphi^h(x)) = \varphi^h(x) = xh_j = L_g(x)h_j = \varphi^h(L_g(x)), \quad x \in G_j,\ i_g \neq j. \tag{5}$$

Так как $\theta_i(x)h_i = \theta_i(x)\theta_i(h_{i+1}) = \theta_i(xh_{i+1})$ при $x \in G_{i+1}$, то

$$R_i(x,y) \Leftrightarrow y = \theta_i(x) \Leftrightarrow yh_i = \theta_i(xh_{i+1}) \Leftrightarrow \varphi^h(y) = \theta_i(\varphi^h(x)) \Leftrightarrow R_i(\varphi^h(x), \varphi^h(y)). \tag{6}$$

Из (3)–(6) следует, что φ^h — автоморфизм модели $\mathfrak{G}$. Наконец, если $g \in G$, то $\varphi^h(g) = gf((g)_1)$, где f — вычислимая функция такая, что $f(i) = h_i$, что влечет вычислимость φ^h.

Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет определить отображение $\Psi : h \mapsto \varphi^h$.

Лемма 3. *Отображение Ψ является изоморфизмом групп $\varprojlim_{\mathrm{rec}} G_i$ и $\mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Инъективность отображения Ψ непосредственно следует из его определения.

Покажем сюръективность данного отображения. Пусть φ — вычислимый автоморфизм модели $\mathfrak{G}$. В силу (1) $\varphi(G_i) = G_i$, поэтому φ можно представить в виде последовательности отображений $(\ldots \varphi_2, \varphi_1, \varphi_0)$, где φ_i — сужение φ на G_i. Тогда для любых $g, x \in G_i$

$$\varphi_i(gx) = \varphi_i(L_g(x)) = L_g(\varphi_i(x)) = g\varphi_i(x).$$

Если вместо x взять e_i, единицу группы G_i, получим

$$\varphi_i(g) = g\varphi_i(e_i) \tag{7}$$

для любого $g \in G_i$ и каждому φ_i поставим в соответствие элемент

$$h_i \rightleftharpoons \varphi_i(e_i) = \varphi(e_i). \tag{8}$$

По определению (8) $h_i \in G_i$. В силу (2), (7), (8) выполняется

$$R_i(x,y) \Leftrightarrow R_i(\varphi(x), \varphi(y)) \Leftrightarrow \varphi(y) = \theta_i(\varphi(x))$$
$$\Leftrightarrow yh_i = \theta_i(xh_{i+1}) \Leftrightarrow yh_i = \theta_i(x)\theta_i(h_{i+1}). \tag{9}$$

Так как $y = \theta_i(x)$, умножив последнее равенство в (9) на элемент, обратный y в G_i, получаем, что

$$h_i = \theta_i(h_{i+1}). \tag{10}$$

Поскольку семейство $\{G_i\}_{i\in\omega}$ вычислимо, существует вычислимая функция f такая, что $f(i) = e_i$, что вместе с (8) влечет $h_i = \varphi(f(i))$. Из последнего утверждения и (10) следует, что $h \rightleftharpoons (\ldots h_2, h_1, h_0) \in \varprojlim_{\mathrm{rec}} G_i$. Кроме того, из (7) и (8) вытекает, что если $g \in G_i$, то $\varphi(g) = gh_i = \varphi^h(g)$, а значит, $\Psi(h) = \varphi$.

Пусть $h, r \in \varprojlim_{\mathrm{rec}} G_i$, тогда при $x \in G$

$$\Psi(hr)(x) = xh_{i_x}r_{i_x} = (xh_{i_x})r_{i_x} = \Psi(r)(xh_{i_x}) = \Psi(r)(\Psi(h)(x)) = [\Psi(h)\Psi(r)](x).$$

Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

2. Вычислимое сплетение

Напомним определение сплетения групп G и H [9]. Пусть G^H — множество всех функций из носителя группы H в носитель группы G. Тогда множество $H \times G^H$ с определенной следующим образом операцией умножения $*$:

$$(h_1, f_1) * (h_2, f_2) = \big(h_1h_2, f_1^{h_2}f_2\big),$$

где $f^h(x) = f(hx)$, образуют группу, которая называется *сплетением групп* G и H.

Если B — вычислимая группа, а A — группа вычислимых перестановок множества ω, то *вычислимым сплетением* $A \diamond B$ групп A и B называется множество $B \times \mathrm{Rec}(A^B)$ с определенной выше операцией $*$, где $\mathrm{Rec}(A^B)$ — множество всех вычислимых нумераций $\mu : B \to A$.

Теорема 2. *Если группа B вычислима, а группа A является группой вычислимых автоморфизмов некоторой вычислимой модели $\mathfrak{H}$, то существует вычислимая модель $\mathfrak{T}$ такая, что $A \diamond B \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{T}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{H}$ модель сигнатуры $\langle F, P, C\rangle$, где $F = \left\{f_1^{n_1}, \dots\right\}$ — множество функциональных символов, $P = \left\{P_1^{m_1}, \dots\right\}$ — множество предикатных символов, а $C = \{c_1, \dots\}$ — множество константных символов; носитель модели обозначим через H.

Без ограничения общности можно считать, что носителем группы B является множество $\{\langle 0, b_1\rangle, \langle 0, b_2\rangle \dots\}$, причем никакой b_i не равен 0. Для каждого $b \in B$ определим множество $H_b = \{\langle b, h\rangle \mid h \in H\}$. Легко видеть, что множества B, $\{H_b\}_{b\in B}$ попарно не пересекаются.

Наряду с операцией умножения, определенной в группе B, рассмотрим еще одну операцию умножения $\circ$, которая также определяет группу на носителе B: $b_1 \circ b_2 \rightleftharpoons b_2 \cdot_B b_1 = b_2 b_1$. Из вычислимости группы B следует вычислимость группы $\langle B, \circ\rangle$.

Носителем искомой модели $\mathfrak{T}$ будет являться множество $T = B \cup \bigcup\limits_{b\in B} H_b$, сигнатурой модели — множество $\left\langle P_B^1, R^2\right\rangle \cup \left\langle L_b^1\right\rangle_{b\in B} \cup \left\langle P_f^{n_f+1}\right\rangle_{f\in F} \cup P \cup \left\langle P_c^1\right\rangle_{c\in C}$ (n_f — местность f). Предикаты и функции определяются следующим образом:

$$P_B(x) \Leftrightarrow x \in B; \quad R(x, y) \Leftrightarrow x \in B \wedge y \in H_x;$$

$$L_b(x) = \begin{cases} b \circ x, & \text{если } x \in B, \\ x, & \text{если } x \in \bigcup\limits_{b\in B} H_b, \end{cases} \quad \text{для всякого } b \in B.$$

Для всякого $f \in F$

$$\begin{aligned} P_f(y_1, \dots, y_{n_f}, y) \Leftrightarrow {}& [f^{\mathfrak{H}}((y_1)_2, \dots, (y_{n_f})_2) = (y)_2] \\ & \wedge [(y_1)_1 = \dots = (y_{n_f})_1 = (y)_1 = b \text{ для некоторого } b \in B]. \end{aligned}$$

Для всякого P_i из P

$$\begin{aligned} P_i(y_1, \dots, y_{m_i}) \Leftrightarrow {}& P_i^{\mathfrak{H}}((y_1)_2, \dots, (y_{m_i})_2) \\ & \wedge [(y_1)_1 = \dots = (y_{m_i})_1 = b \text{ для некоторого } b \in B]. \end{aligned}$$

Для всякого $c \in C$

$$P_c(y) \Leftrightarrow (y)_2 = c^{\mathfrak{H}} \wedge y \in T \setminus B.$$

Лемма 4. *Определенная таким образом модель $\mathfrak{T}$ вычислима.*

Доказательство. Вычислимость носителя модели следует из

$$x \in B \cup \bigcup_{b\in B} H_b \Leftrightarrow (x \in B) \vee ([(x)_1 \in B] \wedge [(x)_2 \in H]).$$

Вычислимость предикатов P_B и R вытекает непосредственно из их определения.

Вычислимость семейства функций $\{L_b\}_{b\in B}$ следует из s-m-n-теоремы и вычислимости функции:

$$L(b, x) = \begin{cases} b \circ x, & \text{если } x \in B, \\ x, & \text{если } x \in \bigcup\limits_{b\in B} H_b. \end{cases}$$

Вычислимость семейств предикатов $\{P_f\}_{f\in F}$, P, $\{P_c\}_{c\in C}$ получается из их определения и вычислимости модели $\mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Определим на множестве $B \times \mathrm{Rec}(A^B)$ операцию умножения $*_R$:

$$\langle b_1, f_1(x)\rangle *_R \langle b_2, f_2(x)\rangle = \langle b_1 \circ b_2, f_1(x) f_2(x \circ b_1)\rangle,$$

относительно которой данное множество образует группу, которую обозначим через R.

Лемма 5. $R \cong \mathrm{Aut_{rec}}\,\mathfrak{T}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut_{rec}}\,\mathfrak{T}$. Тогда

$$x \in B \Leftrightarrow P_B(x) \Leftrightarrow P_B(\varphi(x)) \Leftrightarrow \varphi(x) \in B.$$

Если $x \in B$, то $L_b(\varphi(x)) = b \circ \varphi(x)$ и $\varphi(L_b(x)) = \varphi(b \circ x)$ для всякого $b \in B$ и, следовательно, для любых $x, b \in B$ верно равенство $\varphi(b \circ x) = b \circ \varphi(x)$. Подставляя вместо x единицу e_B группы $\langle B, \circ\rangle$, получаем, что для всякого $b \in B$

$$\varphi(b) = b \circ \varphi(e_B). \tag{11}$$

Так как

$$y \in H_b \Leftrightarrow R(b, y) \Leftrightarrow R(\varphi(b), \varphi(y)) \Leftrightarrow \varphi(y) \in H_{\varphi(b)},$$

автоморфизм φ осуществляет взаимно однозначное соответствие множеств H_b и $H_{\varphi(b)}$, поэтому для каждого $b \in B$ можно определить функцию $f_b^\varphi : H \to H$ такую, что

$$\varphi(\langle b, h\rangle) = \big\langle \varphi(b), f_b^\varphi(h)\big\rangle. \tag{12}$$

Отметим, что из последнего равенства следует

$$f_b^\varphi(h) = (\varphi(\langle b, h\rangle))_2. \tag{13}$$

Лемма 6. *Для любых* $\varphi \in \mathrm{Aut_{rec}}\,\mathfrak{T}$ *и* $b \in B$ *справедливо* $f_b^\varphi \in \mathrm{Aut_{rec}}\,\mathfrak{H}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольно $b \in B$ и $\varphi \in \mathrm{Aut_{rec}}\,\mathfrak{T}$. Биективность отображения f_b^φ следует из (12) и (13). Для всякого $f \in F$

$$\begin{aligned} &f^{\mathfrak{H}}(h_1, \dots, h_{n_f}) = h \Leftrightarrow P_f(\langle b, h_1\rangle, \dots, \langle b, h_{n_f}\rangle, \langle b, h\rangle) \\ &\Leftrightarrow P_f(\varphi(\langle b, h_1\rangle), \dots, \varphi(\langle b, h_{n_f}\rangle), \varphi(\langle b, h\rangle)) \Leftrightarrow f^{\mathfrak{H}}\big(f_b^\varphi(h_1), \dots, f_b^\varphi(h_{n_f})\big) = f_b^\varphi(h). \end{aligned}$$

Для всякого предикатного символа P_i из P

$$\begin{aligned} &P_i^{\mathfrak{H}}(h_1, \dots, h_{m_i}) \Leftrightarrow P_i(\langle b, h_1\rangle, \dots, \langle b, h_{m_i}\rangle) \\ &\qquad \Leftrightarrow P_i(\varphi(\langle b, h_1\rangle), \dots, \varphi(\langle b, h_{m_i}\rangle)) \Leftrightarrow P_i^{\mathfrak{H}}\big(f_b^\varphi(h_1), \dots, f_b^\varphi(h_{m_i})\big). \end{aligned}$$

Для всякого $c \in C$ рассмотрим элемент $y = \langle b, c^{\mathfrak{H}}\rangle \notin B$, тогда $P_c(y)$, а значит, и $P_c(\varphi(y))$, откуда следует, что $f_b^\varphi(c^{\mathfrak{H}}) = c^{\mathfrak{H}}$.

Вычислимость f_b^φ получаем из (13). Лемма 6 доказана.

Кроме того, при фиксированном автоморфизме φ из (13) по s-m-n-теореме вытекает существование вычислимой функции s, которая по элементу $b \in B$ выдает номер автоморфизма f_b^φ, что позволяет определить следующую вычислимую нумерацию:

$$g_\varphi[b](x) \rightleftharpoons \{s(b)\}(x).$$

Определим отображение $W : \mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{T} \to R$, которое автоморфизму $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{T}$ ставит в соответствие элемент $(\varphi(e_B), g_\varphi) \in R$. Докажем, что так определенная функция W — изоморфизм групп $\mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{T}$ и R.

Инъективность W. Пусть $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Существует $z \in T$ такой, что $\varphi_1(z) \neq \varphi_2(z)$. Если $z \in B$, то по (11) $z \circ \varphi_1(e_B) \neq z \circ \varphi_2(e_B)$ и $\varphi_1(e_B) \neq \varphi_2(e_B)$.

Если $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ для любого $x \in B$, то $z = \langle b, h\rangle \in H_b$ для некоторых $b \in B$ и $h \in H$. Тогда по (12) $\left\langle \varphi_1(b), f_b^{\varphi_1}(h)\right\rangle \neq \left\langle \varphi_2(b), f_b^{\varphi_2}(h)\right\rangle$, откуда $f_b^{\varphi_1}(h) \neq f_b^{\varphi_2}(h)$, а значит, $g_{\varphi_1}(b) \neq g_{\varphi_2}(b)$.

Сюръективность W. Пусть $(b, g) \in R$. Определим отображение $\eta : T \to T$ следующим образом: если $x \in B$, то $\eta(x) = x \circ b$; если $x = \langle b_x, h_x\rangle \in H_{b_x}$, то $\eta(x) = \langle b_x \circ b, g[b_x](h_x)\rangle$. Покажем, что построенное отображение η является вычислимым автоморфизмом модели $\mathfrak{T}$.

Биективность, а также вычислимость отображения η непосредственно следуют из его определения.

Кроме того,

$$P_B(x) \Leftrightarrow x \in B \Leftrightarrow x \circ b \in B \Leftrightarrow \eta(x) \in B \Leftrightarrow P_B(\eta(x)).$$

Предикат $R(x, y)$ истинен тогда и только тогда, когда $y = \langle x, h\rangle$ для некоторых $h \in H$ и $x \in B$. Так как $x \in B \Leftrightarrow \eta(x) \in B$ и $\eta(y) = \langle x \circ b, g[x](h)\rangle$, то $y \in H_x \Leftrightarrow \eta(y) \in H_{\eta(x)}$ и $R(x, y) \Leftrightarrow R(\eta(x), \eta(y))$.

Наконец, для всякого $b' \in B$ верно

$$L_{b'}(\eta(x)) = b' \circ \eta(x) = b' \circ x \circ b = L_{b'}(x) \circ b = \eta(L_{b'}(x)), \quad x \in B,$$

$$L_{b'}(\eta(x)) = \eta(x) = \eta(L_{b'}(x)), \quad x \in T \setminus B.$$

Далее, если $y \in T \setminus B$, то $y = \langle b_y, h_y\rangle$.

Для всякого $f \in F$

$$\begin{aligned}
&P_f(y_1, \ldots, y_{n_f}, y)\\
&\Leftrightarrow [f^{\mathfrak{H}}(h_{y_1}, \ldots, h_{y_{n_f}}) = h_y] \wedge [b_{y_1} = \cdots = b_{y_{n_f}} = b_y = b' \text{ для некоторого } b' \in B]\\
&\Leftrightarrow [f^{\mathfrak{H}}(g[b'](h_{y_1}), \ldots, g[b'](h_{y_{n_f}})) = g[b'](h_y)] \wedge [b_{y_1} \circ b = \cdots = b_{y_{n_f}} \circ b = b_y \circ b = b' \circ b]\\
&\qquad\Leftrightarrow P_f(\eta(y_1), \ldots, \eta(y_{n_f}), \eta(y)).
\end{aligned}$$

Для всякого P_i из P

$$\begin{aligned}
P_i(y_1, \ldots, y_{m_i}) &\Leftrightarrow P_i^{\mathfrak{H}}(h_{y_1}, \ldots, h_{y_{m_i}}) \wedge [b_{y_1} = \cdots = b_{y_{m_i}} = b' \text{ для некоторого } b' \in B]\\
&\Leftrightarrow P_i^{\mathfrak{H}}(g[b'](h_{y_1}), \ldots, g[b'](h_{y_{m_i}})) \wedge [b_{y_1} \circ b = \cdots = b_{y_{m_i}} \circ b = b' \circ b]\\
&\qquad\Leftrightarrow P_i(\eta(y_1), \ldots, \eta(y_{m_i})).
\end{aligned}$$

Для всякого $c \in C$ так как $y \notin B \Leftrightarrow \eta(y) \notin B$, то

$$P_c(y) \Leftrightarrow h_y = c^{\mathfrak{H}} \Leftrightarrow g[b_y](h_y) = c^{\mathfrak{H}} \Leftrightarrow P_c(\eta(y)).$$

Значит, η — вычислимый автоморфизм модели $\mathfrak{T}$.

Поскольку

$$\eta(e_B) = e_B \circ b = b, \quad f_{b'}^{\eta}(h') = (\eta(\langle b', h'\rangle))_2 = (\langle b' \circ b, g[b'](h')\rangle)_2 = g[b'](h'),$$

то $W(\eta) = (b, g)$.

Отображение W «сохраняет» операцию умножения. Необходимо показать, что

$$W(\varphi_1) *_R W(\varphi_2) = W(\varphi_1\varphi_2),$$

где $\varphi_1\varphi_2(x) \rightleftharpoons \varphi_2(\varphi_1(x))$. Пусть $W(\varphi_1) = (b_1, g_{\varphi_1})$ и $W(\varphi_2) = (b_2, g_{\varphi_2})$. Тогда

$$W(\varphi_1) *_R W(\varphi_2) = (b_1 \circ b_2, g_{\varphi_1}(x)g_{\varphi_2}(x \circ b_1)).$$

С другой стороны,

$$\varphi_1\varphi_2(e_B) = \varphi_2(\varphi_1(e_B)) = \varphi_2(e_B \circ b_1) = e_B \circ b_1 \circ b_2 = b_1 \circ b_2,$$

$$f_x^{\varphi_1\varphi_2}(h) = (\varphi_1\varphi_2(\langle x, h\rangle))_2 = \big(\varphi_2\big(\big\langle x\circ b_1, f_x^{\varphi_1}(h)\big\rangle\big)\big)_2 = \big(\big\langle x\circ b_1\circ b_2, f_{x\circ b_1}^{\varphi_2}\big(f_x^{\varphi_1}(h)\big)\big\rangle\big)_2$$
$$= f_{x\circ b_1}^{\varphi_2}\big(f_x^{\varphi_1}(h)\big) = \big(f_x^{\varphi_1} f_{x\circ b_1}^{\varphi_2}\big)(h),$$

а значит, $W(\varphi_1\varphi_2) = (b_1 \circ b_2, g_{\varphi_1\varphi_2})$, где $g_{\varphi_1\varphi_2}(x) = f_x^{\varphi_1} f_{x\circ b_1}^{\varphi_2} = g_{\varphi_1}(x)g_{\varphi_2}(x \circ b_1)$. Следовательно, $W(\varphi_1) *_R W(\varphi_2) = W(\varphi_1\varphi_2)$ и $R \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{T}$.

Лемма 5 доказана.

Лемма 7. $R \cong A \diamond B$.

Доказательство. Напомним, что группа $A \diamond B$ — это множество $B \times \mathrm{Rec}(A^B)$ с операцией умножения, определенной следующим образом:

$$(b_1, f_1(x)) * (b_2, f_2(x)) = (b_1b_2, f_1(b_2x)f_2(x)),$$

а группа R — множество $B \times \mathrm{Rec}(A^B)$ с операцией умножения, определенной таким образом:

$$(b_1, f_1(x)) *_R (b_2, f_2(x)) = (b_1 \circ b_2, f_1(x)f_2(x \circ b_1)) = (b_2b_1, f_1(x)f_2(b_1x)).$$

Покажем, что отображение $\mu : A \diamond B \to R$, действующее по правилу

$$(b, f(x)) \mapsto (b^{-1}, f(b^{-1}x)),$$

является изоморфизмом этих групп. Инъективность отображения μ следует из определения, сюръективность — из того, что $(b^{-1}, f(b^{-1}x))\mu = (b, f(x))$. Кроме того,

$$(b_1, f_1(x))\mu *_R (b_2, f_2(x))\mu = \big(b_1^{-1}, f_1\big(b_1^{-1}x\big)\big) *_R \big(b_2^{-1}, f_2\big(b_2^{-1}x\big)\big)$$
$$= \big(b_2^{-1}b_1^{-1}, f_1\big(b_1^{-1}x\big) f_2\big(b_2^{-1}b_1^{-1}x\big)\big),$$

$$((b_1, f_1(x)) * (b_2, f_2(x)))\mu = (b_1b_2, f_1(b_2x)f_2(x))\mu$$
$$= \big(b_2^{-1}b_1^{-1}, f_1\big(b_2b_2^{-1}b_1^{-1}x\big) f_2\big(b_2^{-1}b_1^{-1}x\big)\big) = \big(b_2^{-1}b_1^{-1}, f_1\big(b_1^{-1}x\big) f_2\big(b_2^{-1}b_1^{-1}x\big)\big),$$

а значит, $(b_1, f_1(x))\mu *_R (b_2, f_2(x))\mu = ((b_1, f_1(x)) * (b_2, f_2(x)))\mu$, следовательно, μ — изоморфизм групп $A \diamond B$ и R. Лемма доказана.

Из лемм 5 и 7 вытекает, что $A \diamond B \cong R \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{T}$. Теорема доказана.

3. Некоторые подгруппы вычислимых групп

Так как любая перечислимая подгруппа вычислимой группы изоморфна некоторой вычислимой группе, всякая такая подгруппа реализуется как группа вычислимых автоморфизмов некоторой вычислимой модели. Значит, верно

Утверждение 2. *Пусть S — перечислимое множество групповых слов от $x_0, x_1, \ldots$ и G — вычислимая группа. Рассмотрим группу G_S, порожденную множеством $\{t(\bar g) \mid t(\bar x) \in S, \bar g \in G\}$. Тогда существует вычислимая модель $\mathfrak{S}$ такая, что $G_S \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{S}$.*

В частности, верно

Следствие 1. *Если K — коммутант вычислимой группы G, то существует вычислимая модель $\mathfrak{K}$ такая, что $K \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{K}$.*

Теорема 3. *Если H — коперечислимая подгруппа вычислимой группы G (т. е. множество $G \setminus H$ вычислимо перечислимо), то существует вычислимая модель $\mathfrak{M}$ такая, что $H \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Построим модель $\mathfrak{T}$ сигнатуры $\langle R^1\rangle \cup \langle l_g^1\rangle_{g\in G}$, состоящей из одного предикатного символа и набора одноместных функциональных символов и интерпретируемой на носителе модели, которым является носитель группы G, следующим образом:

$$R(x) \Leftrightarrow x \in G \setminus H, \quad l_g(x) = g \cdot x \text{ для всякого } g \in G.$$

Заметим, что построенная модель может не быть вычислимой.

Если φ — некоторый вычислимый автоморфизм модели $\mathfrak{T}$, то поскольку $l_g(\varphi(x)) = g \cdot \varphi(x)$ и $\varphi(l_g(x)) = \varphi(g \cdot x)$, равенство $g \cdot \varphi(x) = \varphi(g \cdot x)$ выполняется для всяких g и x из G. Взяв в качестве x единицу группы G, получим

$$\varphi(g) = g \cdot \varphi(e).$$

Кроме того, если $g \in H$, то и $g \cdot \varphi(e) \in H$, откуда следует, что $\varphi(e) \in H$.

Таким образом, автоморфизму φ ставится в соответствие элемент $\varphi(e) \in H$. Вместе с тем всякий элемент $h \in H$ определяет отображение $y \mapsto y \cdot h$, которое является вычислимым автоморфизмом модели $\mathfrak{T}$. (В самом деле, если $y \in H$, то и $y \cdot h \in H$, так как $h \in H$; верно и обратное.)

Наконец, в силу того, что $\varphi_1\varphi_2(g) \rightleftharpoons \varphi_2(\varphi_1(g)) = \varphi_2(g \cdot \varphi_1(e)) = g \cdot \varphi_1(e) \cdot \varphi_2(e)$, группы H и $\mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{T}$ изоморфны.

Лемма 8. *Существует вычислимая модель $\mathfrak{M}$ такая, что*

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{M} \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{T}.$$

Доказательство. Так как множество $G \setminus H$ вычислимо перечислимо, существует инъективная всюду определенная вычислимая функция f, множество значений которой есть множество $G \setminus H$. Без ограничения общности можно считать, что носитель группы G является подмножеством четных натуральных чисел, а инъективная функция f, перечисляющая множество $G \setminus H$, определена только на нечетных натуральных числах. Пусть $M = \{2k+1 \mid k \in \omega\}$. Рассмотрим сигнатуру $\langle f, P_1^1, P_2^1, R^2\rangle \cup \langle l_g^1\rangle_{g\in G}$ и определим на основном множестве $G \cup M$ модель $\mathfrak{M}$ следующим образом:

$$P_1(x) \Leftrightarrow x \in G, \quad P_2(x) \Leftrightarrow x \in M,$$

$$R(x, y) \Leftrightarrow x \in G \wedge y \in M \wedge f(y) = x,$$

$$l_g(x) = \begin{cases} g \cdot x, & \text{если } x \in G, \\ x & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{для всякого } g \in G.$$

Построенная модель $\mathfrak{M}$ является вычислимой.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{M}$. Тогда $x \in G \Leftrightarrow \varphi(x) \in G$. Покажем, что функция $\varphi|_G$ является вычислимым автоморфизмом модели $\mathfrak{T}$. Инъективность, сюръективность и вычислимость данной функции непосредственно следуют из определения. Кроме того, для всяких $g, x \in G$

$$l_g^{\mathfrak{T}}(\varphi|_G(x)) = g \cdot \varphi|_G(x),$$

$$\varphi|_G\big(l_g^{\mathfrak{T}}(x)\big) = \varphi|_G(g\cdot x) = \varphi|_G\big(l_g^{\mathfrak{M}}(x)\big) = l_g^{\mathfrak{M}}(\varphi|_G(x)) = g\cdot\varphi|_G(x).$$

Наконец,

$$\begin{aligned} a\in G\setminus H \Leftrightarrow \exists n(f(n)=a) \Leftrightarrow R(a,n) \\ \Leftrightarrow R(\varphi(a),\varphi(n)) \Leftrightarrow \exists m(f(m)=\varphi(a)) \Leftrightarrow \varphi|_G(a)\in G\setminus H, \end{aligned}$$

а значит, $\varphi|_G \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{T}$.

Покажем, что отображение $\varphi\mapsto\varphi|_G$ является изоморфизмом групп, для этого достаточно показать его биективность.

Сюръективность. Пусть $\psi\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{T}$, определим $\psi'\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{M}$ следующим образом. Если $x\in G$, то $\psi'(x)=\psi(x)$. Если $x\in M$, то рассмотрим элемент $f(x)\in G$. Тогда так как $f(x)\in G\setminus H$, то и $\psi(f(x))\in G\setminus H$, а значит, существует некоторый элемент $y\in M$ такой, что $f(y)=\psi(f(x))$ (в силу инъективности функции f он будет единственным). Положим тогда $\psi'(x)=y$. Из инъективности f и биективности ψ непосредственно следует биективность ψ'. Вычислимость ψ' выводится из определения:

$$\psi'(x)=\begin{cases}\psi(x), & \text{если } x\in G,\\ \mu y[y\in M\wedge f(y)=\psi(f(x))], & \text{если } x\in M.\end{cases}$$

Кроме того, из определения непосредственно вытекает, что ψ' является изоморфизмом модели $\mathfrak{M}$.

Инъективность. Пусть φ_1 и φ_2 — два автоморфизма модели $\mathfrak{M}$, совпадающие на множестве G, и существует элемент $n\in M$ такой, что $\varphi_1(n)\neq\varphi_2(n)$. Тогда истинен $R(f(n),n)$, а значит, $R(\varphi_1(f(n)),\varphi_1(n))$ и $R(\varphi_2(f(n)),\varphi_2(n))$, откуда следует, что $f(\varphi_1(n))=\varphi_1(f(n))=\varphi_2(f(n))=f(\varphi_2(n))$, а это противоречит инъективности функции f.

Лемма 8 и теорема 3 доказаны.

Следствие 2. *Если Z — центр вычислимой группы G, то существует вычислимая модель $\mathfrak{Z}$ такая, что $Z\cong\mathrm{Aut}_{\mathrm{rec}}\,\mathfrak{Z}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.
2. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
3. *Morozov A. S.* Groups of computable automorphisms // Handbook of recursive mathematics. Studies in logic and foundations of mathematics. Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo: Elsevier, 1998. V. 1. P. 311–345.
4. *Морозов А. С.* О степенях групп рекурсивных автоморфизмов // Алгебра, логика и приложения: Сб. науч. тр., посвященных памяти А. И. Кокорина. Иркутск: Иркутский гос. ун-т, 1994. С. 79–84.
5. *Морозов А. С.* О теориях классов групп рекурсивных перестановок // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1989. Т. 12. С. 91–104.
6. *Морозов А. С.* Еще раз о вопросе Хигмана // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 2. С. 134–144.
7. *Морозов А. С., Бузыкаева А. Н.* Об одной иерархии групп вычислимых автоморфизмов // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 1. С. 155–160.
8. *Birkhoff G.* Sobre los grupos de automorfismos // Rev. Unión Mat. Argent. 1945–1946. V. 11, N 4. P. 155–157.
9. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

Статья поступила 21 февраля 2009 г.

Куликов Пётр Андреевич
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
petr.kulikov@gmail.com