*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2010. Том 51, № 4*

*УДК 517.51*

# О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

**В. М. Миклюков**

**Аннотация.** Приводятся признаки существования почти всюду в области полного дифференциала функций весовых классов $\mathrm{ACL}^p_\sigma$. Доказательства опираются на технику весового модуля семейства дуг.

**Ключевые слова:** полный дифференциал, весовые классы Соболева, модуль семейства кривых.

Ниже приводятся признаки существования почти всюду в области полного дифференциала функций весовых классов $\mathrm{ACL}^p_\sigma$.

**1.** Пусть $D$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m, \quad m \geq 1,$$

— отображение. Предположим, что в точке $a \in D$ существуют частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, m)$. Положим $f'(a) = \big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\big)$ и

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a)\,dx_i = \left(\sum_{i=1}^{n} f'_{1x_i}(a)\,dx_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} f'_{mx_i}(a)\,dx_i\right).$$

Если

$$f(x) - f(a) = df(a) + o(|x-a|) \quad (x \to a),$$

то величина $df(a)$ называется *полным дифференциалом* отображения $f$ в точке $a \in D$.

**2.** Хорошо известен следующий признак Радемахера [1] существования полного дифференциала функции.

**Теорема A.** *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — область. Если отображение $f : D \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию Липшица локально в $D$, то $f$ имеет полный дифференциал почти всюду в $D$.*

Более общий результат доставляет теорема В. В. Степанова [2] (см. также [3, теорема 3.1.9] или [4, теорема 2.3.1]).

**Теорема B.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Лебегу множество, и пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Для того чтобы почти всюду на $E$ функция $f$ имела полный дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы для почти всех $a \in E$ было выполнено*

$$\limsup_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x-a|} < \infty. \tag{1}$$

Следующее утверждение о дифференцируемости функций класса $\mathrm{ACL}^p$ принадлежит В. А. Жукову (см. [5] или [6, гл. 2, теорема 5.4; 4, теорема 3.2.3]).

**Теорема C.** *Пусть $D$ — область в $\mathbb{R}^n$ и $f : D \to \mathbb{R}^m$ — функция класса $\mathrm{ACL}^p_{\mathrm{loc}}(D)$ с $p > n - 1$ при $n \geq 3$ и $p = 1$ при $n = 2$. Если $f$ монотонна в смысле Лебега, то $f$ имеет полный дифференциал почти всюду в $D$.*

Целью настоящей работы является распространение теоремы C на случай слабо монотонных в области $D$ функций класса $\mathrm{ACL}^p_\sigma(D)$, где $\sigma(x) \geq 0$ — весовая функция.

**3.** Обозначим через $B^n(a,r)$ открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $a$, через $S^{n-1}(a,r)$ — ограничивающую его сферу.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Следуя Лебегу, говорим, что функция $f : D \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, *монотонна*, если для всякой подобласти $U \subset D$ выполнено

$$\mathrm{osc}(f, U) \leq \mathrm{osc}(f, \partial U).$$

Здесь и ниже символом

$$\mathrm{osc}(\phi, E) = \sup_{x,y \in E} |\phi(x) - \phi(y)|$$

обозначается колебание функции $\phi$ на множестве $E$.

Пусть $h(t) : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — полунепрерывная сверху функция. Будем говорить, что функция $f : D \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, является *$h$-монотонной*, если для всякой подобласти $U \subset D$ выполнено

$$h(\mathrm{osc}(f, U)) \leq \mathrm{osc}(f, \partial U),$$

и *$\alpha$-монотонной*, $0 < \alpha \equiv \mathrm{const} < \infty$, если $f$ является $h$-монотонной с $h(t) = t^\alpha$.

Будем говорить, что функция $f : D \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, является *слабо $h$-монотонной вблизи точки $a \in D$*, если

$$\varlimsup_{r \to 0} \frac{h(\mathrm{osc}(f, B^n(a,r)))}{\mathrm{osc}(f, S^{n-1}(a,r))} < \infty, \tag{2}$$

и *слабо $\alpha$-монотонной вблизи точки $a \in D$*, если $f$ слабо $h$-монотонна вблизи $a \in D$ при $h(t) = t^\alpha$.

Ясно, что всякая монотонная в смысле Лебега функция слабо $\alpha$-монотонна, $\alpha = 1$, вблизи каждой точки области.

Пример 1. Функция

$$y = \begin{cases} 2|x|^\beta + |x|^\beta \sin \frac{1}{x} : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1 & \text{при } x \neq 0,\ \beta > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

является слабо $\alpha$-монотонной, $\alpha = 1$, вблизи точки $x = 0$ при $\beta \geq 1$ и слабо $1/\beta$-монотонной при $0 < \beta < 1$. □

Пример 2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — область и $f : D \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса $C^1(D)$, удовлетворяющее условию

$$\left[ \sum_{i,j=1}^{n} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}} \leq Q\, |J(x,f)|, \quad Q \equiv \mathrm{const}, \tag{3}$$

где $J(x,f) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ — якобиан отображения $f$ в точке $x \in D$. Положим $D_0 = \{x \in D : J(x,f) = 0\}$.

Множество $D_0$ замкнуто. В каждой компоненте связности множества $D\setminus D_0$ отображение $f$ не меняет знака якобиана и сохраняет ориентацию. Здесь условие (3) есть стандартное условие квазиконформности $f$ и тем самым $f$ монотонно (см. [6, гл. 5, разд. 3]).

На каждой из компонент связности множества $\operatorname{int} D_0$ условие (3) влечет равенство $f$ тождественно постоянному отображению и, следовательно, его монотонность.

Таким образом, если $n$-мерная мера Лебега множества $D_0 \setminus \operatorname{int} D_0$ равна нулю, то отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ является $\alpha$-монотонным, $\alpha = 1$, вблизи почти всех точек множества $D$.

Вблизи точек множества $D_0\setminus\operatorname{int} D_0$ отображение может менять ориентацию и быть устроенным весьма сложно. $\square$

**4.** Напомним определение класса $\mathrm{ACL}^p_\sigma$. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Зафиксируем $i$, $1 \le i \le n$, и обозначим через $D_i^*$ ортогональную проекцию $D$ на гиперплоскость $x_i = 0$. Для произвольной суммируемой локально в $D$ функции $f$ полагаем

$$f_i^*(x_i', t, x_i'') \equiv f(x_1, \dots , x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots , x_n),$$
$$x_i' = (x_1, \dots , x_{i-1}), \quad x_i'' = (x_{i+1}, \dots , x_n).$$

Далее, пусть

$$D_i(x_i', x_i'') \equiv \{(x_i', t, x_i'') \in \mathbb{R}^n : (x_i', 0, x_i'') \in D_i^*\}.$$

Непрерывная функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной на линиях* (или, кратко, $f$ принадлежит ACL), если для любого $i = 1, \dots , n$ сужения $f_i^*(x_i', t, x_i'')$ суть абсолютно непрерывны (по переменной $t$) внутри совокупности линейных интервалов $D \cap D_i(x_i', x_i'')$ для $\mathscr{H}^{n-1}$-почти всех точек $(x_i', 0, x_i'') \in D_i^*$. (Здесь и ниже символ $d\mathscr{H}^p$ означает элемент $p$-мерной меры Хаусдорфа.)

Всякая ACL-функция $f : D \to \mathbb{R}$ имеет производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ $(i = 1, \dots , n)$ почти всюду в $D$.

Уточним обозначения. Мы пишем $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots , n)$ и определяем формальный градиент $\nabla f \equiv \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots , \frac{\partial f}{\partial x_n}\big)$ в точках, где существуют производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots , \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Пусть $\sigma : D \to \mathbb{R}^1$ — определенная почти всюду в $D$ измеримая в смысле Лебега неотрицательная функция, и пусть $p \ge 1$ — постоянная. Функциональный класс $\mathrm{ACL}^p_\sigma(D)$ определяется как множество функций класса ACL в $D$, для которых

$$\int\limits_D |\nabla f(x)|^p \sigma(x)\, d\mathscr{H}^n < \infty.$$

В случае, когда $\sigma \equiv 1$, имеем функциональный класс $\mathrm{ACL}^p(D)$, совпадающий с множеством всевозможных непрерывных функций соболевского класса $W^{1,p}(D)$ (см., например, [6, теорема 5.6] или [7, теорема 2.1.4]).

Вектор-функция $f = (f_1, \dots , f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ принадлежит $\mathrm{ACL}^p_\sigma(D)$, если $f_i \in \mathrm{ACL}^p_\sigma(D)$ для любого $i = 1, \dots , m$.

**5.** Нам потребуется понятие весового модуля семейства кривых на поверхности, обобщающее хорошо известное понятие модуля семейства кривых в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [8]).

Пусть $D$ — область в $\mathbb{R}^n$ и $h : D \to \mathbb{R}$ — липшицева функция. Обозначим через $\Sigma_h(t)$ множество уровня функции $h$: $\Sigma_h(t) = \{x \in D : h(x) = t\}$.

По теореме 3.2.15 из [3] (см. также теорему 1.6.1 в [4]) для почти всех $t \in \mathbb{R}$ множества уровня $\Sigma_h(t)$ счетно $(\mathscr{H}^{n-1}, n-1)$-спрямляемы.

Зафиксируем $p \geq 1$, счетно $(\mathscr{H}^{n-1}, n-1)$-спрямляемое множество $U \subset D$ и неотрицательную измеримую функцию $\sigma$ в $U$. Пусть $\widehat{U}$ — компонента связности $U$. Для произвольной пары точек $a_1, a_2 \in \widehat{U}$ пусть $\Gamma = \Gamma(a_1, a_2)$ означает семейство всевозможных локально спрямляемых дуг $\gamma \subset \widehat{U}$, соединяющих точки $a_1$ и $a_2$. Определим весовой модуль

$$\operatorname{mod}(p, \sigma, \Gamma) = \inf_{\rho} \frac{\int_{\widehat{U}} \rho^p \sigma \, d\mathscr{H}^{n-1}}{\left(\inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} \rho \, d\mathscr{H}^1\right)^p}, \tag{4}$$

где точная нижняя грань берется по всем неотрицательным, измеримым по Борелю функциям $\rho$ в $\widehat{U}$. Если $\Gamma(a_1, a_2) = \varnothing$, то мы полагаем $\operatorname{mod}(p, \sigma, \Gamma) = \infty$.

Далее, пусть

$$\kappa_p(\sigma, U) = \inf_{\widehat{U} \in \{\widehat{U}\}} \inf_{a_1, a_2 \in \widehat{U}} \operatorname{mod}(p, \sigma, \Gamma), \tag{5}$$

где первая из точных нижних граней берется по множеству $\{\widehat{U}\}$ всевозможных компонент связности $\widehat{U}$ множества $U$.

Пример 3. В одномерном случае величина $\operatorname{mod}(p, \sigma, \Gamma)$ легко вычисляема. Пусть $\gamma$ — спрямляемая дуга в $\mathbb{R}^n$, множество $\Gamma = \{\gamma\}$ состоит из единственной дуги, и пусть $\sigma$ — неотрицательная измеримая функция, заданная вдоль $\gamma$.

На основании неравенства Гёльдера имеем

$$\int_{\gamma} \rho \, d\mathscr{H}^1 = \int_{\gamma} \rho \sigma^{1/p} \frac{d\mathscr{H}^1}{\sigma^{1/p}} \leq \left( \int_{\gamma} \sigma \rho^p d\mathscr{H}^1 \right)^{1/p} \left( \int_{\gamma} d\mathscr{H}^1 / \sigma^{p-1} \right)^{(p-1)/p}$$

и

$$\left( \int_{\gamma} \frac{d\mathscr{H}^1}{\sigma^{p-1}} \right)^{1-p} \leq \frac{\int_{\gamma} \sigma \rho^p \, d\mathscr{H}^1}{\left( \int_{\gamma} \rho \, d\mathscr{H}^1 \right)^p}. \tag{6}$$

Поскольку плотность $\rho \geq 0$ произвольна, отсюда приходим к следующему утверждению.

*Если $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ — спрямляемая дуга, $\Gamma = \{\gamma\}$ и $\sigma$ — неотрицательная измеримая функция, заданная вдоль $\gamma$, то*

$$\left( \int_{\gamma} \frac{d\mathscr{H}^1}{\sigma^{p-1}} \right)^{1-p} \leq \operatorname{mod}(p, \sigma, \Gamma). \tag{7}$$

При $p = 2$ и $\rho = 1/\sigma$ неравенство (6) точное. Тем самым соотношение (7) при $p = 2$ обращается в равенство.

Мы дадим другие оценки $\operatorname{mod}(p, \sigma, \Gamma)$ несколько позже.

**6.** Зафиксируем произвольно локально липшицеву функцию $h : D \to \mathbb{R}$, для которой

$$0 < \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \Delta} |\nabla h(x)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Delta} |\nabla h(x)| < \infty \tag{8}$$

на всяком подмножестве $\Delta \Subset D$.

Положим
$$\kappa_p(t) = \kappa_p(\sigma^*, \Sigma_h(t)), \quad \sigma^* = \sigma/|\nabla h|,$$
где $\sigma$ — некоторая наперед заданная неотрицательная измеримая в $D$ функция.

Докажем следующую многомерную версию известного принципа «длины и площади» (см., например, [9]).

**Лемма 1.** *Пусть $D$ — область в $\mathbb{R}^n$ и $f : D \to \mathbb{R}^m$ — вектор-функция класса $\mathrm{ACL}^p_\sigma(D)$. Тогда при любых $t', t'' \in h(D)$, $t' < t''$, выполнено*
$$\int\limits_{t'}^{t''} \Omega^p(f, \Sigma_h(t))\kappa_p(t)\,dt \le \int\limits_{D(t',t'')} \Lambda^p(x, f)\sigma(x)\,d\mathscr{H}^n(x). \tag{9}$$
*Здесь $\Lambda(x, f) = \left(\sum\limits_{i=1}^m |\nabla f_i(x)|^2\right)^{1/2}$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $D(t', t'') = \{x \in D : t' < h(x) < t''\}$, $\Omega(f, \Sigma_h(t)) = \sup\limits_{\Sigma} \operatorname{osc}(f, \Sigma)$ и точная верхняя грань берется по всем компонентам связности $\Sigma$ множества $\Sigma_h(t)$.*

Доказательство. Выберем последовательность вектор-функций $\{f_k = (f_{1k}, \dots, f_{mk})\}_{k=1}^\infty$, обладающую свойствами: $f_k \in \mathrm{ACL}^p_\sigma(D) \cap C^\infty(D)$ и
$$\begin{gathered}\lim_{k\to\infty} \int\limits_{D(t',t'')} |\nabla f_{ik} - \nabla f|^p\,d\mathscr{H}^n_\sigma = 0 \quad (i = 1, \dots, m),\\ \lim_{k\to\infty} \int\limits_{D(t',t'')} |f_k - f|^p\,d\mathscr{H}^n_\sigma = 0,\end{gathered} \tag{10}$$
где $d\mathscr{H}^n_\sigma = \sigma\,d\mathscr{H}^n$. Существование такой аппроксимирующей последовательности доказывается стандартными методами с использованием процедуры усреднения (см., например, [6, гл. 2, разд. 4.5] или [10, разд. 4.2]).

Предположим сначала, что
$$0 < \operatorname*{ess\,inf}_{x\in D} |\nabla h(x)| \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} |\nabla h(x)| < \infty. \tag{11}$$
Пользуясь формулой Кронрода — Федерера для коплощади (см., например, [3, разд. 3.2] или [4, теорема 2.5.1]) и условием (11), при любом $k = 1, 2, \dots$ имеем
$$\begin{aligned}\int\limits_{D(t',t'')} \Lambda^p(x, f_k)\,d\mathscr{H}^n_\sigma(x) &= \int\limits_{D(t',t'')} \Lambda^p(x, f_k)|\nabla h|\sigma^*(x)\,d\mathscr{H}^n(x)\\ &= \int\limits_{t'}^{t''} dt \int\limits_{\Sigma_h(t)} \Lambda^p(x, f_k)\sigma^*(x)\,d\mathscr{H}^{n-1}(x).\end{aligned} \tag{12}$$

Зафиксируем $t \in (t', t'')$ так, что $\Sigma_h(t)$ счетно $(\mathscr{H}^{n-1}, n-1)$-спрямляемо. Пусть $\Sigma$ — компонента связности $\Sigma_h(t)$. Пусть $a_1, a_2 \in \Sigma$ — произвольная пара точек, и пусть $\Gamma$ — семейство спрямляемых дуг $\gamma \subset \Sigma$, соединяющих $a_1$ и $a_2$. Выбирая в (4) функцию $\rho(x) = \Lambda(x, f_k)$, получаем
$$\operatorname{mod}(p, \sigma^*, \Gamma) \le \frac{\int_\Sigma \Lambda^p(x, f_k)\sigma^*(x)\,d\mathscr{H}^{n-1}(x)}{\left(\inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \int_\gamma \Lambda(x, f_k)\,d\mathscr{H}^1(x)\right)^p}.$$

Так как $f_k \in C^1$ и дуга $\gamma$ спрямляема, можем написать

$$\operatorname{osc}(f_k,\gamma) \le \int\limits_\gamma \Lambda(x,f_k)\,d\mathscr{H}^1(x).$$

Таким образом,

$$\operatorname{osc}^p(f_k,\Sigma)\inf_{a_1,a_2\in\Sigma}\operatorname{mod}(p,\sigma^*,\Gamma) \le \int\limits_\Sigma \Lambda^p(x,f_k)\sigma^*(x)\,d\mathscr{H}^{n-1}(x)$$
$$\le \int\limits_{\Sigma_h(t)} \Lambda^p(x,f_k)\sigma^*(x)\,d\mathscr{H}^{n-1}(x).$$

Поскольку компонента связности $\Sigma$ произвольна, получаем

$$\Omega^p(f_k,\Sigma_h(t))\kappa_p(\sigma^*,\Sigma_h(t)) \le \int\limits_{\Sigma_h(t)} \Lambda^p(x,f_k)\sigma^*\,d\mathscr{H}^{n-1}(x).$$

Подставляя данное неравенство в (12), приходим к соотношению

$$\int\limits_{t'}^{t''}\Omega^p(f_k,\Sigma_h(t))\kappa_p(t)\,dt \le \int\limits_{D(t',t'')} \Lambda^p(x,f_k)\sigma(x)\,d\mathscr{H}^n(x). \tag{13}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Первое из равенств (10) показывает, что для достаточно больших $k$ выполнено

$$\int\limits_{D(t',t'')} \Lambda^p(x,f_k)\sigma(x)\,d\mathscr{H}^n(x) \le \varepsilon + \int\limits_{D(t',t'')} \Lambda^p(x,f)\sigma(x)\,d\mathscr{H}^n(x).$$

Обозначая через $q(\varepsilon)$ правую часть данного соотношения, далее имеем

$$\int\limits_{t'}^{t''}\Omega^p(f_k,\Sigma_h(t))\kappa_p(t)\,dt \le q(\varepsilon).$$

Применяя формулу Кронрода — Федерера ко второму из соотношений (10), находим

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{t'}^{t''}dt\int\limits_{\Sigma_h(t)}|f_k-f|^p\sigma^*(x)\,d\mathscr{H}^{n-1}(x) = 0.$$

Отсюда вытекает, что для некоторой подпоследовательности $\{f_{k_l}\}$, $l\to\infty$, и почти всех $t\in(t',t'')$ выполнено

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_{\Sigma_h(t)}|f_{k_l}-f|^p\sigma\frac{d\mathscr{H}^{n-1}}{|\nabla h|} = 0.$$

Всякая последовательность непрерывных функций $\{\phi_l\}$, сходящаяся в среднем на измеримом множестве $E$ к некоторой непрерывной функции $\phi$, содержит подпоследовательность, сходящуюся к $\phi$ почти везде на $E$, и поэтому

$$\operatorname{osc}(\phi,E) \le \liminf_{l\to\infty}\operatorname{osc}(\phi_l,E). \tag{14}$$

Соотношение (14) влечет, что почти всюду на $(t',t'')$ выполнено

$$\Omega(f,\Sigma_h(t)) \le \liminf_{l\to\infty}\Omega(f_l,\Sigma_h(t)).$$

Однако в соответствии с леммой Фату если $\phi_l(t)$ измеримы на $(t', t'')$, то

$$\int_{t'}^{t''} \liminf_{l\to\infty} \phi_l(t)\,dt \le \liminf_{l\to\infty} \int_{t'}^{t''} \phi_l(t)\,dt. \tag{15}$$

Пользуясь (15), имеем

$$\int_{t'}^{t''} \Omega^p(f, \Sigma_h(t))\kappa_p(t)\,dt \le \liminf_{l\to\infty} \int_{t'}^{t''} \Omega^p(f_l, \Sigma_h(t))\kappa_p(t)\,dt$$

и, таким образом, на основании (13) получаем

$$\int_{t'}^{t''} \Omega^p(f, \Sigma_h(t))\kappa_p(t)\,dt \le q(\varepsilon).$$

Полагая $\varepsilon \to 0$, приходим к (9).

Лемма доказана в предположении (11). Это означает, что неравенство (9) имеет место для всякой подобласти $\Delta \Subset D$. Аппроксимируя область $D$ посредством последовательности

$$\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \Delta_k \Subset \Delta_{k+1}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k = D,$$

для всякого $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$\int_{t'}^{t''} \Omega^p(f|_{\Delta_k}, \Sigma_h(t))\kappa_p(t)\,dt \le \int\limits_{D(t',t'')\cap\Delta_k} \Lambda^p(x, f)\sigma(x)\,d\mathscr{H}^n(x)$$
$$\le \int\limits_{D(t',t'')} \Lambda^p(x, f)\sigma(x)\,d\mathscr{H}^n(x).$$

Как и выше, пользуясь леммой Фату, приходим к (9) для $D$. $\square$

**7.** Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $\sigma : D \to \mathbb{R}^1$ — неотрицательная измеримая по Лебегу функция. Функция $\sigma$ *удовлетворяет* $(p, \lambda)$*-условию в точке* $a \in D$, если существует постоянная $\lambda = \lambda(a) > 1$ такая, что

$$\liminf_{r\to 0} r^{p-n} \int_r^{\lambda r} \kappa_p(t) \frac{dt}{t^{n-p+1}} > 0. \tag{16}$$

**Лемма 2.** *Пусть $p > n-1$ при $n \ge 3$ или $p = 1$ при $n = 2$. Если существует функция $\theta$ такая, что $\sigma(x) \ge \theta(|x-a|)$ почти всюду в $D$ и*

$$\liminf_{r\to 0} r^{p-n} \int_r^{\lambda r} \theta(t) \frac{dt}{t^{n-p+1}} > 0 \tag{17}$$

*для некоторой постоянной $\lambda > 1$, то $\sigma$ удовлетворяет $(p, \lambda)$-условию в точке $a \in D$.*

Доказательство. Фиксируем точку $a \in D$, в которой имеет место соотношение (17). Выберем

$$h(x) = \begin{cases} \log|x-a| & \text{при } p = n, \\ |p-n|^{-1}|x-a|^{n-p} & \text{при } p \ne n. \end{cases}$$

Тогда $|\nabla h(x)| = |x-a|^{n-p-1}$ и $\Sigma_h(t) = S^{n-1}(a,r) \cap D$ при

$$r = \begin{cases} e^t & \text{при } p = n, \\ (|p-n|t)^{1/(n-p)} & \text{при } p \neq n. \end{cases}$$

Предположим дополнительно, что

$$r < \operatorname{dist}(a, \partial D).$$

Тогда $\Sigma_h(t) = S^{n-1}(a,r)$. Оценим $\kappa_p(t)$. Не умаляя общности, можем считать, что $a = 0$.

Зафиксируем точки $a_1, a_2 \in S^{n-1}(0,r)$ и обозначим через $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \in S^{n-1}(0,1)$ их образы при отображении $y = x/r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Пусть $\Gamma$ — множество дуг $\gamma \subset S^{n-1}(0,r)$, соединяющих $a_1$ и $a_2$. Пусть $\tilde{\gamma}$ и $\widetilde{\Gamma}$ — образы дуг $\gamma \subset S^{n-1}(0,r)$ и семейства $\Gamma = \{\gamma\}$ соответственно. Имеем

$$\operatorname{mod}(p, \sigma^*, \Gamma) = \inf_\rho \frac{\int\limits_{S^{n-1}(0,r)} \rho^p \sigma^* \, d\mathscr{H}^{n-1}}{\Big(\inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \int\limits_\gamma \rho \, d\mathscr{H}^1\Big)^p} \geq \inf_\rho \frac{\int\limits_{S^{n-1}(0,r)} \frac{\rho^p \theta \, d\mathscr{H}^{n-1}}{r^{n-p-1}}}{\Big(\inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \int\limits_\gamma \rho \, d\mathscr{H}^1\Big)^p}$$

$$= \frac{\theta(r)}{r^{n-p-1}} \inf_\rho \frac{\int\limits_{S^{n-1}(0,r)} \rho^p \, d\mathscr{H}^{n-1}}{\Big(\inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \int\limits_\gamma \rho \, d\mathscr{H}^1\Big)^p} = \theta(r) \inf_{\tilde{\rho}} \frac{\int\limits_{S^{n-1}(0,1)} \tilde{\rho}^p \, d\mathscr{H}^{n-1}}{\Big(\inf\limits_{\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}} \int\limits_{\tilde{\gamma}} \tilde{\rho} \, d\mathscr{H}^1\Big)^p},$$

где $\tilde{\rho} = \rho(ry)$, $y \in S^{n-1}(0,1)$. Таким образом,

$$\operatorname{mod}(p, \sigma^*, \Gamma) \geq \theta(r) \inf_{\tilde{\rho}} \frac{\int\limits_{S^{n-1}(0,1)} \tilde{\rho}^p \, d\mathscr{H}^{n-1}}{\Big(\inf\limits_{\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}} \int\limits_{\tilde{\gamma}} \tilde{\rho} \, d\mathscr{H}^1\Big)^p} = \theta(r) \operatorname{mod}(p, 1, \widetilde{\Gamma}).$$

Тем самым на основании (5) получаем

$$\kappa_p(\sigma^*, \Sigma_h(t)) \geq \kappa_p \theta(t), \quad \kappa_p = \kappa_p(1, S^{n-1}(0,1)).$$

Для выполнения условия (17) теперь достаточно, чтобы было выполнено

$$\kappa_p \liminf_{r \to 0} r^{p-n} \int\limits_r^{\lambda r} \theta(r) \frac{dr}{r^{n-p+1}} > 0.$$

Постоянная $\kappa_p$ положительна, если $p > n-1$ при $p \geq 3$ или $p = 1$ при $n = 2$ (см. лемму 3.2.2 в [4]). Тем самым выполнение (17) влечет выполнение (16). $\square$

**8.** Следующее утверждение является центральным в работе.

**Теорема 1.** *Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — функция класса $\mathrm{ACL}^p_\sigma(D)$, являющаяся слабо $\alpha$-монотонной вблизи почти всех точек $x \in D$. Если $\sigma$ удовлетворяет $(p', \lambda)$-условию с $p' = p\alpha$ почти всюду в $D$, то $f$ имеет полный дифференциал почти всюду в $D$.*

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in D$, в которой $f$ обладает свойством (2). По лемме 1 для произвольного $r > 0$ такого, что $r \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial D))$, выполнено

$$\int\limits_r^{\lambda r} \operatorname{osc}^p(f, S^{n-1}(x_0, \tau)) \kappa_p(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{n-p+1}} \leq c(p,n) \int\limits_{B(x_0, \lambda r)} \Lambda^p(x, f) \sigma(x) \, d\mathscr{H}^n(x).$$

Тем самым

$$\inf_{\tau\in(r,\lambda r)} \operatorname{osc}^p(f, S^{n-1}(x_0,\tau)) \int\limits_r^{\lambda r} \kappa_p(\tau)\frac{d\tau}{\tau^{n-p+1}} \le c(p,n) \int\limits_{B(x_0,\lambda r)} \Lambda^p(x,f)\sigma(x)\,d\mathscr{H}^n(x),$$

следовательно,

$$\inf_{\tau\in(r,\lambda r)} \operatorname{osc}^p(f, S^{n-1}(x_0,\tau)) \le c_1(p,n)\left(\int\limits_r^{\lambda r} \kappa_p(\tau)\frac{d\tau}{\tau^{n-p+1}}\right)^{-1} \int\limits_{B(x_0,\lambda r)} \Lambda^p(x,f)\sigma(x)\,d\mathscr{H}^n(x),$$

где

$$c_1(p,n) = \begin{cases} c(p,n)/\log\lambda & \text{при } p=n, \\ c(p,n)|p-n|/|\lambda^{n-p}-1| & \text{при } p\ne n. \end{cases}$$

Воспользуемся слабой $\alpha$-монотонностью $f$ в точке $x_0$. Имеем

$$\inf_{\tau\in(r,\lambda r)} \operatorname{osc}^{p\alpha}(f, B^n(x_0,\tau)) \le C \int\limits_{B(x_0,\lambda r)} \Lambda^p(x,f)\sigma(x)\,d\mathscr{H}^n(x),$$

где $C = C(x_0,\lambda)$ — некоторая постоянная.

В силу (16) при достаточно малых $r > 0$ почти всюду в $D$ получаем

$$\inf_{\tau\in(r,\lambda r)} \left(\frac{\operatorname{osc}(f, B^n(x_0,\tau))}{\tau}\right)^{p\alpha} \le C\frac{1}{r^n} \int\limits_{B(x_0,\lambda r)} \Lambda^p(x,f)\sigma(x)\,d\mathscr{H}^n(x). \tag{18}$$

В частности,

$$\limsup_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|^{p\alpha}}{|x-x_0|^{p\alpha}} \le C\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n} \int\limits_{B(x_0,\lambda r)} \Lambda^p(x,f)\sigma(x)\,d\mathscr{H}^n(x).$$

По теореме Лебега для $\mathscr{H}^n$-почти всех точек в $\Delta$ имеем

$$\limsup_{r\to 0}\frac{1}{r^n} \int\limits_{B(x_0,r)} \Lambda^p(x,f)\sigma(x)\,d\mathscr{H}^n(x) < \infty$$

и тем самым почти всюду в $D$ выполнено (1).

По теореме Степанова почти всюду в $D$ функция $f$ имеет полный дифференциал. $\square$

**9.** Укажем еще один, более удобный для применений, признак существования почти всюду в области полного дифференциала, непосредственно вытекающий из теоремы 1 и леммы 2.

**Теорема 2.** *Пусть $f : D\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — функция класса $\mathrm{ACL}^p_\sigma(D)$, являющаяся слабо $\alpha$-монотонной вблизи почти всех $x\in D$. Предположим, что весовая функция $\sigma$ удовлетворяет $(p',\lambda)$-условию с $p' = p\alpha$ почти всюду в области $D$.*

*Если $p' > n-1$ при $n \ge 3$ (или $p' = 1$ при $n = 2$) и существует функция $\theta(a,t) \ge 0$ со свойствами:*

(i) *$\sigma(x) \ge \theta(a, |x-a|)$ для почти всех $x\in D$ при почти всех $a\in D$;*

(ii) *функция $\theta$ удовлетворяет условию*

$$\liminf_{r\to 0} r^{p'-n} \int\limits_r^{\lambda r} \theta(t)\frac{dt}{t^{n-p'+1}} > 0$$

*при почти всех $a \in D$,*

*то $f$ имеет полный дифференциал почти всюду в области $D$.*

Полагая здесь $\theta \equiv 1$ и $\alpha = 1$, получаем теорему C в качестве следствия.

Замечания. При $p > n$ и $\sigma \equiv 1$ предположение о слабой $\alpha$-монотонности $f$ излишне. Необходимая для доказательства оценка (18) следует из теоремы В. И. Кондрашова [11, с. 91] о вложении класса $W^{1,p}$ в пространство $C$. Другие доказательства существования почти всюду полного дифференциала при $p > n$ имеются в [12; 6, гл. 2, теорема 5.2].

При $p \leq n$ условие слабой монотонности $f$ существенно. Существуют примеры функций класса $\mathrm{ACL}^p$, $p \leq n$, неограниченных вблизи каждой точки области и тем самым не имеющих полного дифференциала ни в одной ее точке [13, гл. 5, § 6.3].

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Rademacher H.* Über partielle und totale Differenzierbarkeit. I // Math. Ann. 1919. Bd 79. S. 340–359.
2. *Степанов В. В.* Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale // Мат. сб. 1925. Т. 32. С. 511–527.
3. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
4. *Миклюков В. М.* Введение в негладкий анализ. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2008.
5. *Жуков В. А.* Об одном доказательстве теоремы о существовании полного дифференциала функций класса $W^1_p$ // Тр. Томск. ун-та. Сер. механика, математика. 1966. Т. 189. С. 13–17.
6. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
7. *Ziemer W. P.* Weakly differentiable functions. New York; Berlin; Heidelberg; London; Paris; Tokyo; Hong Kong: Springer-Verl., 1989.
8. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
9. *Суворов Г. Д.* Обобщенный «принцип длины и площади» в теории отображений. Киев: Наук. думка, 1985.
10. *Эванс Л. К., Гариепи Р. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научная книга, 2002.
11. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.
12. *Stein E. M.* Editor's note: The differentiability of functions in $\mathbb{R}^n$ // Ann. Math. 1981. V. 113, N 2. P. 383–385.
13. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.


*Статья поступила 17 декабря 2008 г.*

Миклюков Владимир Михайлович
Волгоградский гос. университет, лаборатория сверхмедленных процессов,
Университетский пр., 100, Волгоград 400062
miklyuk@mail.ru