Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 517.518.34+517.537.3

О НАХОЖДЕНИИ ГРАНИЦ РИССА СПЛАЙН–БАЗИСА С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Е. В. Мищенко

Аннотация. При нахождении верхней и нижней границ Рисса для B-сплайна произвольного порядка m мы приходим к необходимости анализа функциональных рядов вида $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$. Показано, что сумма указанного ряда представляет собой отношение тригонометрических полиномов определенного вида. Доказаны свойства полиномов, с помощью которых устанавливаются границы Рисса. Одним из приложений полученных результатов являются формулы для нахождения сумм некоторых степенных рядов.

Ключевые слова: B-сплайн, базис Рисса, верхняя и нижняя границы Рисса, тригонометрический полином, степенной ряд.

1. Введение

Одним из важных вопросов, в частности, в теории вейвлетов, при рассмотрении семейства, порожденного некоторой функцией $\phi(x)$:

$$\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}, \tag{1}$$

является вопрос о том, образует ли указанное семейство безусловный базис (или базис Рисса) в некотором гильбертовом пространстве H. Согласно определению базиса Рисса [1], отвечая на этот вопрос, необходимо установить два свойства рассматриваемого семейства (1):

1) является ли линейная оболочка $\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ плотной в H;

2) существуют ли две константы $0 < A, B < \infty$, называемые соответственно *нижней и верхней границами Рисса*, такие, что для любой последовательности $\{c_k\} \in l_2$

$$A \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(\cdot - k) \right\|_H^2 \le B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Второе свойство также называют *условием Рисса*.

Известна теорема [2], устанавливающая для пространства $H = L^2(\mathbb{R})$ эквивалентность между условием Рисса и свойствами преобразования Фурье функции ϕ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию и Министерства образования и науки РФ (регистрационный номер проекта 2.1.1/4591) и междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2009–2011 (номер проекта 91).

Теорема. *Для любой функции* $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ *и констант* $0 < A \leq B < \infty$ *следующие два утверждения эквивалентны:*

(i) *множество* $\{\phi(.-k),\, k \in \mathbb{Z}\}$ *удовлетворяет условию Рисса с константами* $2\pi A$, $2\pi B$,

(ii) *преобразование Фурье*

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \phi(x)\, dx$$

удовлетворяет неравенству

$$A \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi k)|^2 \leq B \tag{2}$$

почти всюду. □

В настоящей работе мы установим свойство (ii) для семейства вида (1), в котором в качестве функции ϕ выступает B-сплайн порядка m. Как будет показано в п. 3, для преобразования Фурье $\widehat{B}_m$ сплайна порядка m верна следующая формула:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{B}_m(\xi + 2\pi k)|^2 = \frac{\sin^{2(m+1)}(\xi/2 + \pi k)}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi/2 + \pi k)^{2(m+1)}}.$$

Таким образом, вопрос о нахождении верхней и нижней границ Рисса сплайн-базиса можно свести к нахождению равномерных оценок сверху и снизу на интервале сходимости для ряда вида $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$, $m = 1, 2, \ldots$.

Исследуя свойства сплайн-базиса, К. Чуи [2] приводит формулу

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x + \pi k)^{2m}} = -\frac{1}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} \operatorname{ctg} x.$$

Отмечая, что полученная формула явная и служит инструментом для нахождения границ Рисса, он считает тем не менее ее слишком сложной в применении для больших значений m [2, с. 150].

Между тем в [3] замечено, что из известной формулы

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} \tag{3}$$

можно вывести более общие выражения

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}} = \frac{1}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

используя проверяемое непосредственной выкладкой утверждение, что для любой дважды дифференцируемой функции $f(x)$ верно

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \pi^2 \left(\frac{d^2}{dv^2} - \left(v \frac{d}{dv} \right)^2 \right) f, \tag{4}$$

где $v = \sin \pi x$. Применяя это замечание и формулу (3), в следующем пункте покажем, что для произвольного положительного целого m ряд $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$ представляет собой отношение тригонометрических полиномов специального вида.

2. Получение представлений для ряда $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$

Теорема 1. *Для рядов вида* $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$, $m = 1, 2, \dots$, *справедливы следующие представления:*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2(m+1)}} = \frac{\pi^{2(m+1)}}{(2m+1)!} \frac{S_m(\sin^2 \pi x)}{\sin^{2m+2} \pi x}, \tag{5}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2(m+1)}} = \frac{\pi^{2(m+1)}}{(2m+1)!} \frac{C_m(\cos^2 \pi x)}{(1-\cos^2 \pi x)^{m+1}}, \tag{6}$$

в которых функции S_m *и* C_m *являются полиномами степени* m, *т. е.*

$$S_m(x) = \sum_{k=0}^{m} s_k^m x^k \tag{7}$$

и

$$C_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k^m x^k, \tag{8}$$

а коэффициенты s_k^m *и* c_k^m *в формулах* (7), (8) *находятся из рекуррентных соотношений, причем все* c_k^m *в формуле* (8) *положительны. Формулы для нахождения коэффициентов* s_k^m *имеют вид*

$$\begin{gathered} s_0^0 = 1, \quad s_0^{m+1} = s_0^m(2m+3)(2m+2) = (2m+3)!, \quad s_{m+1}^{m+1} = -4s_m^m = (-4)^{m+1}, \\ s_k^{m+1} = (2m+3-2k)(2m+2-2k)s_k^m - 4(m+2-k)^2 s_{k-1}^m, \end{gathered} \tag{9}$$

если $0 < k < m+1$, $m = 0, 1, 2, \dots$; *коэффициенты* c_k^m, $0 < k < m+1$, $m = 0, 1, 2, \dots$, *находятся из следующих соотношений:*

$$\begin{aligned} c_0^0 = 1, \quad c_0^{m+1} &= 2c_1^m + 2(m+1)c_0^m, \quad c_{m+1}^{m+1} = 4c_m^m = 4^{m+1}, \\ c_k^{m+1} &= (2k+2)(2k+1)c_{k+1}^m + (8k(m+1-k) \\ &\quad + 2(m+1+k))c_k^m + 4(m+2-k)^2 c_{k-1}^m, \end{aligned} \tag{10}$$

в которых $c_k^m = 0$, *если* $m < k$ *или* $0 > k$.

Доказательство. Обозначим $\xi = \pi x$, $v = \sin \xi$, $w = \cos \xi$. По аналогии с (4) получаем, что для любой дважды дифференцируемой функции $f(x)$ верно

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \pi^2 \left((1-v^2) \frac{d^2 f}{dv^2} - v \frac{df}{dv} \right) \tag{11$'$}$$

и

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \pi^2 \left((1-w^2) \frac{d^2 f}{dw^2} - w \frac{df}{dw} \right). \tag{11$''$}$$

Из формулы (2), очевидно, следует справедливость (9) и (10) для $m = 0$:

$$S_0(v^2) = C_0(w^2) \equiv 1, \quad \text{т. е. } s_0^0 = c_0^0 = 1.$$

Получим формулы (5), (7), (9). Пусть для некоторого m известно, что

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \pi^{2m} \frac{S_m(v^2)}{v^{2m+2}},$$

и функция S_m имеет вид (7)

Используя (11′), получаем, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2(m+2)}} = \frac{1}{(2(m+2)-1)!} \frac{d^{2(m+1)}}{dx^{2(m+1)}} \left(\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} \right)$$

$$= \frac{1}{(2(m+2)-1)!} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} \right) = \frac{\pi^{2m}}{(2(m+2)-1)!} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{m} s_k^m v^{2k}}{v^{2(m+1)}} \right)$$

$$= \frac{\pi^{2(m+1)}}{(2(m+2)-1)!} \left((1-v^2) \frac{d^2}{dv^2} - v \frac{d}{dv} \right) \left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{m} s_k^m v^{2k}}{v^{2(m+1)}} \right) = \frac{\pi^{2(m+1)}}{(2(m+2)-1)! v^{2(m+2)}}$$

$$\times \Bigg((2m+2)(2m+3) s_0^m + \sum_{k=1}^{m} s_k^m v^{2k} (2m+3-2k)(2m+2-2k)$$

$$- \sum_{k=0}^{m} s_k^m v^{2k+2} (2m+2-2k)^2 \Bigg) = \frac{\pi^{2(m+1)}}{(2(m+2)-1)!} \frac{\sum\limits_{k=0}^{m+1} s_k^{m+1} v^{2k}}{v^{2(m+2)}},$$

причем $s_0^{m+1} = s_0^m (2m+3)(2m+2)$, $s_k^{m+1} = s_k^m (2m+3-2k)(2m+2-2k) - s_{k-1}^m 4(m+2-k)^2$, $s_{m+1}^{m+1} = -4 s_m^m$. Формулы (5), (7), (9) доказаны.

Аналогично, применяя (11″), получаем формулы (6), (8), (10). Положительность коэффициентов c_k^m в формуле (8) непосредственно следует из вида (10). $\square$

Функции C_m и S_m обладают рядом свойств, которые сформулируем в следующем утверждении.

Утверждение 1. *Функции $C_m(\cos^2 \xi)$ и $S_m(\sin^2 \xi)$ как функции от ξ обладают свойствами:*

1) *C_m и S_m определены на всей оси $\mathbb{R}$ и принимают только положительные значения;*

2) *C_m и S_m — π-периодические функции, симметричные относительно $\xi = 0$;*

3) *экстремумы C_m и S_m расположены в точках $\xi = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; максимумы расположены в точках $\xi = k\pi$, минимумы — в точках $\xi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;*

4) *$\frac{C_m(\cos^2 k\pi)}{(2m+1)!} = \frac{S_m(\sin^2 k\pi)}{(2m+1)!} = 1$, а значения $\frac{C_m(\cos^2 \frac{\pi}{2})}{(2m+1)!} = \frac{S_m(\sin^2 \frac{\pi}{2})}{(2m+1)!}$ стремятся к нулю при $m \to \infty$.*

Доказательство. Из теоремы 1 получаем, что $C_m(\cos^2 \xi) = S_m(\sin^2 \xi)$.

Положительность функций $C_m(\cos^2 \xi)$ и $S_m(\sin^2 \xi)$ следует из вида функции $C_m(\cos^2 \xi)$ и замечания, что для любых m и k таких, что $m = 1, 2, \dots$ и $0 \le k \le m$, коэффициенты c_k^m положительные.

Свойство 2 очевидным образом вытекает из свойств sin и cos:

$$C_m(\cos^2(\xi+\pi)) = C_m(\cos^2 \xi) = C_m(\cos^2(-\xi)),$$

$$S_m(\sin^2(\xi+\pi)) = S_m(\sin^2 \xi) = S_m(\sin^2(-\xi)).$$

Экстремумы функции находим, анализируя значения их первых производных по ξ, при этом, учитывая свойство периодичности 2, достаточно рассмотреть отрезок $[0,\pi]$:

$$\frac{d}{d\xi}C_m(\cos^2\xi) = -\left[\sum_{k=0}^{m-1} 2(k+1)\ c_{k+1}^m \cos^{2k}\xi\right]\cos\xi\sin\xi = 0.$$

В силу положительности коэффициентов c_{k+1}^m

$$\sum_{k=0}^{m-1} 2(k+1)\ c_{k+1}^m \cos^{2k}\xi > 0$$

для любого $\xi\in[0,\pi]$. Следовательно, первые производные исследуемых функций обращаются в нуль в тех точках, где $\cos\xi = 0$ либо $\sin\xi = 0$. При этом $\frac{d}{d\xi}C_m(\cos^2\xi){<}0$, если $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, и $\frac{d}{d\xi}C_m(\cos^2\xi){>}0$, если $\xi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Свойство 3 доказано.

Для доказательства свойства 4 заметим, что в точках максимумов

$$C_m(\cos^2 k\pi) = S_m(\sin^2 k\pi) = s_0^m = (2m+1)!$$

Найдем значения в точках минимумов. Рассмотрим $\xi = \frac{\pi}{2}$. В силу (5)

$$\frac{S_m(\sin^2\frac{\pi}{2})}{(2m+1)!} = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2(m+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2k)^{2(m+1)}}.$$

Из того, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2k)^{2(m+1)}} < \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2k)^{2m}}$ для любого целого $m\geq 1$, а последовательность $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m}$ стремится к нулю при $m\to\infty$, следует, что $\frac{S_m(\sin^2\frac{\pi}{2})}{(2m+1)!} > \frac{S_{m+1}(\sin^2\frac{\pi}{2})}{(2m+3)!}$ и числовая последовательность $\frac{S_m(\sin^2\frac{\pi}{2})}{(2m+1)!}$ стремится к нулю при $m\to\infty$. Все свойства доказаны. □

Имея рекуррентные формулы (9), (10), мы можем находить полиномы S_m и C_m любого порядка. Для примера в табл. 1 и 2 помещены значения коэффициентов c_k^m, s_k^m для значений $m = 0,1,2,3,4,5$.

Таблица 1. Значения c_k^m

$m \diagdown k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	2	4				
2	16	88	16			
3	272	2880	1824	64		
4	7936	137216	185856	31616	256	
5	353792	9061376	21253376	8728576	518656	1024

Таблица 2. Значения s_k^m

$m \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	6	-4				
2	120	-120	16			
3	5040	-6720	2016	-64		
4	362880	-604800	282240	-32640	256	
5	39916800	-79833600	50561280	-10813440	523776	-1024

3. Определение верхней и нижней границ Рисса для сплайн-базиса

Напомним определение B-сплайна. Функция B_m, B-сплайн порядка m, определяется рекуррентно:

$$B_0(x) = \chi_{[0,1)}, \quad \chi_{[0,1)} \text{ — характеристическая функция отрезка } [0,1),$$

$$B_m(x) = B_{m-1}(x) * B_0(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} B_{m-1}(x-y)B_0(y)\,dy = \int\limits_0^1 B_{m-1}(x-y)\,dy.$$

Так как $\widehat{B}_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi/2} \frac{\sin\xi/2}{\xi/2}$, из свойств свертки следует, что

$$\widehat{B}_m(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-i\xi/2} \frac{\sin\xi/2}{\xi/2} \right)^{m+1}.$$

Введем обозначение: $V_m^0 = \operatorname{span}\{B_m(x-k),\ k \in \mathbb{Z}\}$, $m = 1, 2, \dots$. Замыкание V_m^0 в норме $\|\ \|_{L^2(\mathbb{R})}$ является подпространством $L^2(\mathbb{R})$. В определенном таким образом пространстве семейство $\{B_m(x-k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ образует базис Рисса. Свойство 1 из определения базиса Рисса, очевидно, выполнено. Установим существование констант $0 < \mathbf{A}_m \le \mathbf{B}_m < \infty$ из свойства 2, обеспечивающих выполнение почти всюду неравенств (свойство (ii))

$$2\pi\mathbf{A}_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k B_m(\cdot - k) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le 2\pi\mathbf{B}_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

для всех $\{c_k\} \in l_2$.

Используя формулы (5), (6), получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{B}_m(\xi + 2\pi k)\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{2(m+1)}(\xi/2 + \pi k)}{(\xi/2 + \pi k)^{2(m+1)}} = \frac{1}{2\pi} \sin^{2(m+1)}(\xi/2)$$
$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi/2 + \pi k)^{2(m+1)}} = \frac{1}{2\pi} \frac{C_m(\cos^2(\xi/2))}{(2m+1)!} = \frac{1}{2\pi} \frac{S_m(\sin^2(\xi/2))}{(2m+1)!}.$$

Согласно свойствам 3 и 4 из утверждения 1 следующие величины являются верхними и нижними границами Рисса для B-сплайнов произвольного порядка m:

$$\mathbf{A}_m = \frac{1}{2\pi}\frac{C_m(\cos^2(\xi/2))}{(2m+1)!}\Big|_{\xi=\pi} = \frac{2^{2m+2}}{\pi^{2m+3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2k)^{2(m+1)}},$$

$$\mathbf{B}_m = \frac{1}{2\pi}\frac{C_m(\cos^2(\xi/2)}{(2m+1)!}\Big|_{\xi=0} = \frac{1}{2\pi}.$$

Отсюда следует, что значение верхней границы не зависит от m, а значения нижней границы стремятся к нулю при $m\to\infty$.

4. О нахождении сумм некоторых рядов

Результаты, полученные во втором пункте имеют приложение в теории степенных рядов. С их помощью можно находить точные значения для рядов вида

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}}, \tag{12}$$

где m — произвольное положительное целое число.

Вводя обозначения $a_j = \frac{1}{2j-1}$, $b_j = (-1)^{j+1}a_j^{2m+1}$, замечаем, что $a_j = -a_{-j+1}$, $b_j = b_{-j+1}$. Поэтому

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}} = 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}} = 2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2j)^{2m}}, \tag{13}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}} = 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}} = 2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}}{(1+2j)^{2m+1}}. \tag{14}$$

Согласно теореме 1

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}} = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac12 - j\right)^{2m}}$$
$$= \frac{1}{2^{2m}}\frac{\pi^{2m}}{(2m-1)!}\frac{C_{m-1}\left(\cos^2\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2^{2m}}\frac{\pi^{2m}}{(2m-1)!}c_0^m.$$

С учетом (13) имеем формулу для нахождения точной суммы

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}} = \frac{1}{2^{2m+1}}\frac{\pi^{2m}}{(2m-1)!}c_0^{m-1}. \tag{15}$$

Подставляя значения c_0^m из табл. 1, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \quad \text{и т. д.}$$

Теперь исследуем выражение (14). Дифференцируя выражение (5) с учетом представления (7), нетрудно установить, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-j)^{2m+1}} = \frac{\pi^{2m+1}}{(2m)!}\frac{2\sum\limits_{k=0}^{m-1}(m-k)s_k^{m-1}\ \sin^{2k}\pi x}{\sin^{2m+1}\pi x}\cos\pi x. \tag{16}$$

Справедливо представление

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(x-j)^{2m+1}} = \frac{1}{2^{2m+1}} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{2}-j\right)^{2m+1}} - \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}-j\right)^{2m+1}} \right). \qquad (17)$$

Вынося множитель за знак суммирования и используя (17), перепишем левую часть выражения (14):

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}} = \frac{1}{(-1)^{2m+2}2^{2m+1}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(x-j)^{2m+1}}\bigg|_{x=\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2^{4m+2}} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{2}-j\right)^{2m+1}} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}-j\right)^{2m+1}} \right)\bigg|_{x=\frac{1}{2}}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m+1}}$ является нечетной функцией аргумента x, окончательно получаем

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}} = \frac{1}{2^{4m+1}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{4}-j\right)^{2m+1}}.$$

Таким образом, с учетом (16) окончательная формула для нахождения суммы ряда (14) выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}} = \frac{\pi^{2m+1}}{2^{4m+1}(2m)!} \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) s_k^{m-1} 2^{m-k}. \qquad (18).$$

Используя приведенные в табл. 2 значения s_k^m, находим, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^7} = \frac{61\pi^7}{184320} \quad \text{и т. д.}$$

Для частных случаев $m = 1, 2$ эти значения были найдены Эйлером [4]. В известном справочнике [5] приведены формулы, полученные Жолли [6], согласно которым

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^{2m}} = \frac{(2^{2m}-1)\pi^{2m}}{2(2m)!} |B_{2m}|,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{(2j-1)^{2m+1}} = \frac{\pi^{2m+1}}{2^{2m+2}(2m)!} |E_{2m}|,$$

где B_{2m} и E_{2m} обозначают числа Бернулли и Эйлера соответственно. Отсюда и из формул (15) и (18) получаем формулы для определения B_{2m} и E_{2m}:

$$B_{2m} = (-1)^{m+1} \frac{c_0^{m-1}}{2m 2^{2m}(2^{2m}-1)}, \quad E_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) s_k^{m-1} 2^{m-k}.$$

Эти формулы дают способ определения чисел Бернулли и Эйлера, отличающийся от изложенного в классических учебниках [7–9].

5. Заключение

Мы доказали, что сумма функционального ряда $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$ представляет собой отношение тригонометрических полиномов. Доказанные нами свойства этих полиномов позволяют утверждать, что в пространстве кусочно-полиномиальных (порядок полинома не превосходит m) функций с разрывами в целочисленных точках семейство целочисленных сдвигов B-сплайна порядка m образует базис Рисса. Найденные границы Рисса неулучшаемы. Приложением полученных результатов являются формулы для нахождения сумм степенных рядов, которые для двух частных случаев были рассмотрены Эйлером. Мы также получили связь коэффициентов найденных полиномов с числами Бернулли и Эйлера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Функциональный анализ* / под ред. С. Г. Крейна М.: Наука, 1964.
2. *Чуи К.* Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001.
3. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
4. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных. М.: Физматгиз, 1961.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
6. *Jolley L.* Summation of series. London: Chapman and Hall LTD, 1925.
7. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.; Л.: ОНТИ, 1936. Ч. 1.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 2.
9. *Чезаро Э.* Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно бесконечно малых. М.; Л.: ОНТИ, 1936. Ч. 1.

Статья поступила 21 января 2009 г.

Мищенко Евгения Васильевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
eugenia-m@academ.org