Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 517.5

О ВЛОЖЕНИИ КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО В ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА

Б. В. Симонов

Аннотация. Рассмотрены вложения классов Никольского из пространств Лоренца в пространства Лоренца. Получены необходимые и достаточные условия для таких вложений при некоторых ограничениях на фундаментальные функции пространств Лоренца.

Ключевые слова: вложение функциональных классов, класс Никольского, пространство Лоренца, модуль непрерывности, периодическая функция.

1. Введение. Пусть даны положительное число q и неотрицательная измеримая на $[0,1]$ функция $\psi(t)$. *Пространством Лоренца* $\Lambda_{\psi,q}$ называется множество периодических с периодом 1 измеримых функций $f(x)$, для каждой из которых конечен функционал

$$\|f\|_{\psi,q} = \left(\int_0^1 (\psi(t) f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

где $f^*(t)$ — невозрастающая на $(0,1]$ перестановка $|f(x)|$ (определение $f^*(t)$ см., например, в [1, с. 83]).

При соответствующем выборе q и ψ пространства Лоренца $\Lambda_{\psi,q}$ сводятся к некоторым известным пространствам функций. Так, если $\psi(t) = t^{1/q}$, то $\Lambda_{\psi,q}$ — пространство Лебега L_q; если $\psi(t) = t^{1/\mu}$ $(\mu > 0)$, то $\Lambda_{\psi,q}$ — пространство Лоренца $L_{\mu,q}$ [2] (подробнее обсуждение пространства $L_{\mu,q}$ приведено в [3, с. 212–220]). Пусть $\psi(t) = t^{\frac{1}{\mu}} \varphi^{\frac{1}{q}}(t)$, где неотрицательная на [0,1] функция $\varphi(t)$ такова, что для каждого числа $\delta > 0$ справедливы условия $\varphi(t)\chi^{\delta}(t) \downarrow 0$ и $\varphi(t)\chi^{-\delta}(t) \uparrow \infty$ при $t \downarrow 0$, где $\chi(t) = t$ или $\chi(t) = \left(\log_2 \frac{1}{t}\right)^{-1}$. Тогда $\Lambda_{\psi,q}$ — пространство $L_{\mu,q,\varphi}$ [4].

Функция $\varphi(t)$ называется *почти возрастающей* (соответственно *почти убывающей*) [5] на $[a,b]$, если существует такая положительная постоянная c, что $\varphi(t_1) \le c\varphi(t_2)$ для $a \le t_1 \le t_2 \le b$ в случае почти возрастания и соответственно $\varphi(t_1) \ge c\varphi(t_2)$ для $a \le t_1 \le t_2 \le b$ в случае почти убывания.

Через $c, c_1, \dots$ обозначим произвольные положительные постоянные; через $c(\nu,\mu,\dots), c_1(\nu,\mu,\dots),\dots$ — положительные постоянные, зависящие лишь от фиксированных $\nu,\mu,\dots$ и, вообще говоря, разные в разных формулах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00175) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–3252.2010.1),

Пусть $\omega(\delta)$ — неубывающая непрерывная на $[0,1]$ функция, которая удовлетворяет условиям: $\omega(0)=0, \omega(\delta+\eta)\le\omega(\delta)+\omega(\eta)$ при $0\le\delta\le\eta\le\delta+\eta\le 1$. Такие функции называются *модулями непрерывности* [6].

Если $f(x)\in\Lambda_{\psi,q}$, то $\omega_{\psi,q}(f,\delta)=\sup\limits_{|h|\le\delta}\|f(x+h)-f(x)\|_{\psi,q}$ называется *модулем непрерывности функции* $f(x)$ в $\Lambda_{\psi,q}$.

Если $\omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности, то *классом Никольского* $H^{\omega}_{\psi,q}$ называется множество функций $f(x)\in\Lambda_{\psi,q}$, для которых $\omega_{\psi,q}(f,\delta)=O(\omega(\delta))$ $(\delta\to+0)$.

Заметим, что если $\psi(t)=t^{1/q}$ $(q\ge 1)$, то $H_{\omega,q}\equiv H^{\omega}_{q}$; если $\psi(t)=t^{1/q}$ $(q\ge 1)$, $\omega(\delta)=\delta^{\alpha}$ $(\alpha>0)$, то $H^{\omega}_{\psi,q}\equiv \mathrm{Lip}(\alpha,q)$ — класс Липшица.

В данной работе изучается задача о нахождении необходимых и достаточных условий для вложений
$$H^{\omega}_{\psi_1,q_1}\subset\Lambda_{\psi_2,q_2}. \tag{1}$$

Первоначальная постановка этой задачи принадлежит П. Л. Ульянову [7], получившему целый ряд точных теорем вложения. Впоследствии эта тематика развивалась в ряде работ различных авторов (см., например, [4; 8–17]). Наиболее полные результаты для вложения (1) получены Ю. В. Нетрусовым [13, 14]. Им доказана следующая

Теорема A. *Пусть* $1\le q_1,q_2<+\infty$; $\psi_1(t),\psi_2(t)$ *— положительные неубывающие на* $(0,1]$ *функции такие, что* $\alpha_{\psi_i}=\varliminf\limits_{t\to 0}\frac{\psi_i(2t)}{\psi_i(t)}>1, \beta_{\psi_i}=\varlimsup\limits_{t\to 0}\frac{\psi_i(2t)}{\psi_i(t)}<2$ $(i=1,2)$; $\omega(\delta)$ *— модуль непрерывности и* $\omega(\delta)/\delta$ *убывает на* $(0,1]$. *Тогда*

(I) *при* $1\le q_2<q_1<\infty$ *условие*
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}\left(\omega(2^{-n})\psi_2(2^{-n})/\psi_1(2^{-n})\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\right\}^{\frac{q_1-q_2}{q_1q_2}}<\infty, \tag{2}$$

(II) *при* $1\le q_1\le q_2<\infty$ *условие*
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{n_k\le n<n_{k+1}}\{\omega(2^{-n})\psi_2(2^{-n})/\psi_1(2^{-n})\}^{q_2}<\infty \tag{3}$$

необходимо и достаточно для вложения (1).

Здесь $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, построенная по заданному модулю непрерывности $\omega(\delta)$ следующим образом:
$$n_1=1,\quad n_{k+1}=\min\left\{n\ge n_k:\max\left(\frac{\omega(2^{-n})}{\omega(2^{-n_k})},\frac{2^{n_k}\omega(2^{-n_k})}{2^{n}\omega(2^{-n})}\right)\le\frac{1}{2}\right\}.$$

Необходимые и достаточные условия для вложения пространств Никольского — Бесова [15] и пространств Орлича — Лоренца [16] даны в аналогичной форме.

Отметим, что последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, присутствующая в формулировке теоремы A, строится по заданному модулю непрерывности $\omega(\delta)$. Одной из первых работ, в которых используются последовательности такого типа, является работа П. Л. Ульянова [7].

В отличие от этого в настоящей работе для формулировки необходимых и достаточных условий для вложения (1) применяется последовательность $\{x_n\}$, которая строится по заданным функциям $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$. Это позволяет несколько упростить проверку условий для вложения (1).

Через $\{x_n\} = \{x_n(\psi_1, \psi_2, q_1 > q_2)\}_{n\in A}$ будем обозначать последовательность, которая строится следующим образом: $x_n = \min\{x : x \in A_n\}$ для $n \in A$, где $A = \{m : m \in N \cup \{0\},\ A_m \neq \varnothing\}$,

$$A_m = \left\{ x \geq 0 : \int\limits_{2^{-x}}^{1} \left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1 - q_2}} \frac{dt}{t} \Big/ \int\limits_{2^{-1}}^{1} \left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1 - q_2}} \frac{dt}{t} = 2^m \right\} \ (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Через $\{x_n\} = \{x_n(\psi_1, \psi_2, q_1 \leq q_2)\}_{n\in A}$ будем обозначать последовательность, которая строится следующим образом: $x_n = \min\{x : x \in A_n\}$ для $n \in A$, где $A = \{m : m \in N \cup \{0\},\ A_m \neq \varnothing\}$,

$$A_m = \left\{ x \geq 0 : 2^x \int\limits_{0}^{2^{-x}} \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\, dt \Big/ \int\limits_{0}^{1} \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\, dt = 2^m \right\} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Теорема 1. *Пусть $0 < q_1, q_2 < +\infty$; $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности; $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — положительные неубывающие на $(0, 1]$ функции такие, что при $\delta \to +0$*

$$\int\limits_0^\delta \psi_i(t) \frac{dt}{t} = O(\psi_i(\delta))\ (i = 1, 2), \quad \int\limits_\delta^1 \frac{\psi_1(t)}{t} \frac{dt}{t} = O\left(\frac{\psi_1(\delta)}{\delta}\right), \quad \psi_2(\delta) = O(\psi_2(\delta/2)).$$

Тогда

(I) *если $0 < q_2 < q_1 < +\infty$, $\{x_n\} = \{x_n(\psi_1, \psi_2, q_1 > q_2)\}_{n\in A}$, то условие*

$$\sum_{n\in A} \left(\int\limits_{2^{-x_n}}^{1} \left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1 - q_2}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{q_1 - q_2}{q_1}} \omega^{q_2}(2^{-x_n}) < +\infty, \tag{4}$$

(II) *если $0 < q_1 \leq q_2 < +\infty$, $\{x_n\} = \{x_n(\psi_1, \psi_2, q_1 \leq q_2)\}_{n\in A}$, то условие*

$$\sum_{n\in A} \left(\frac{\psi_2(2^{-x_n})}{\psi_1(2^{-x_n})} \omega(2^{-x_n}) \right)^{q_2} < +\infty \tag{5}$$

необходимо и достаточно для вложения (1).

Теорема 2. *Пусть $0 < q_1, q_2 < +\infty$; $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности; $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — положительные неубывающие на $(0, 1]$ функции такие, что при $\delta \to +0$*

$$\int\limits_0^\delta \psi_i(t) \frac{dt}{t} = O(\psi_i(\delta))\ (i = 1, 2), \quad \int\limits_\delta^1 \frac{\psi_1(t)}{t} \frac{dt}{t} = O\left(\frac{\psi_1(\delta)}{\delta}\right), \quad \psi_2(\delta) = O(\psi_2(\delta/2)).$$

Тогда

(I) *при $0 < q_2 < q_1 < +\infty$ условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_{2^{-n}}^{1} \left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1 - q_2}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{q_1 - q_2}{q_1}} (\omega^{q_2}(2^{-n}) - \omega^{q_2}(2^{-(n+1)})) < +\infty \tag{6}$$

необходимо и достаточно для вложения (1),

(II) *при* $0 < q_1 \le q_2 < +\infty$ *условие*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\right)^{q_2}(\omega^{q_2}(2^{-n})-\omega^{q_2}(2^{-(n+1)})) < +\infty \tag{7}$$

необходимо, а если дополнительно функция $\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}$ *ограничена или почти убывает на* $(0,1]$ *или*

$$\int_{\delta}^{1}\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\frac{dt}{t} = O\left(\frac{\psi_2(\delta)}{\psi_1(\delta)}\right) \quad (\delta \to +0),$$

то и достаточно для вложения (1).

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 [18, с. 43]. *Пусть* $a_n \ge 0$ $(n = 1, 2, \dots)$, $0 < \alpha \le \beta < +\infty$. *Тогда*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\beta}\right)^{1/\beta} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}\right)^{1/\alpha}, \quad c_1(\alpha)\big(a_1^{\alpha}+a_2^{\alpha}\big) \le (a_1+a_2)^{\alpha} \le c_2(\alpha)\big(a_1^{\alpha}+a_2^{\alpha}\big),$$

где $c_1(\alpha), c_2(\alpha)$ — *положительные постоянные, зависящие лишь от* α.

Лемма 2. *Пусть* $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$ $(n = 1, 2, \dots)$, $0 < p < +\infty$, $\alpha = \max(p, 1)$. *Тогда*

(a) *если* $\sum\limits_{m=n}^{\infty} a_m = a_n\beta_n$ $(n = 1, 2, \dots)$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\sum_{m=1}^{n} b_m\right)^{p} \le \alpha^p \sum_{m=1}^{\infty} a_m\beta_m^{\alpha} b_m^{p},$$

(b) *если* $\sum\limits_{m=1}^{n} a_m = a_n\beta_n$ $(n = 1, 2, \dots)$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\sum_{m=n}^{\infty} b_m\right)^{p} \le \alpha^p \sum_{m=1}^{\infty} a_m\beta_m^{\alpha} b_m^{p}.$$

Для $p \in [1, +\infty)$ лемма 2 доказана в [19], а при $0 < p < 1$ она следует из леммы 1.

Лемма 3. *Пусть* $0 < \mu < +\infty$; $p = \min(\mu, 1)$; $\psi(t)$ — *неотрицательная неубывающая на* $(0,1]$ *функция такая, что*

$$\int_{\delta}^{1}\frac{\psi^p(t)}{t}\frac{dt}{t} = O\left(\frac{\psi^p(\delta)}{\delta}\right) \quad (\delta \to +0).$$

Тогда для любой функции $f \in \Lambda_{\psi,\mu}$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{n=m}^{\infty}\psi^{\mu}(2^{-n})(f^*(2^{-n})-f^*(2^{-(m-1)}))^{\mu} \le c(\psi,\mu)\omega_{\psi,\mu}^{\mu}(f, 2^{-m}) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

При $\beta_{\psi^p} < 2$ лемма 3 доказана в [16]. Доказательство, проведенное в [16], будет верным и для случая, когда

$$\int_{\delta}^{1}\frac{\psi^p(t)}{t}\frac{dt}{t} = O\left(\frac{\psi^p(\delta)}{\delta}\right) \quad (\delta \to +0).$$

Лемма 4 [5]. *Пусть $\psi(t)$ — неотрицательная неубывающая на $[0,1]$ функция такая, что $\int\limits_0^\delta \psi(t)\frac{dt}{t} = O(\psi(\delta))$ $(\delta \to +0)$. Тогда существует константа α $(0 < \alpha < 1)$ такая, что функция $\frac{\psi(t)}{t^\alpha}$ почти возрастает.*

Лемма 5. *Пусть $q > 0$, $\psi(t)$ — неотрицательная неубывающая на $[0,1]$ функция такая, что $\int\limits_0^\delta \psi(t)\frac{dt}{t} = O(\psi(\delta))$ $(\delta \to +0)$. Тогда*

$$\sum_{m=n}^{\infty} \psi^q(2^{-m}) \le c(\psi,q)\psi^q(2^{-n}) \quad (n = 0,1,2,\dots).$$

Доказательство. Применяя лемму 4, для $n = 0,1,2,\dots$ будем иметь

$$\sum_{m=n}^{\infty} \psi^q(2^{-m}) = \sum_{m=n}^{\infty} \psi^q(2^{-m})2^{mq\alpha}2^{-mq\alpha} \le c(\psi,q)\psi^q(2^{-n})2^{nq\alpha}\sum_{m=n}^{\infty} 2^{-mq\alpha}$$
$$\le c_1(\psi,q)\psi^q(2^{-n}).$$

Лемма 6. *Пусть $0 < q_1, q_2 < +\infty$; $p = \min(q_1,1)$; $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности; $\psi_1(t), \psi_2(t)$ — положительные неубывающие на $(0,1]$ функции такие, что*

$$\int\limits_0^\delta \psi_2(t)\frac{dt}{t} = O\biggl(\psi_2\Bigl(\frac{\delta}{2}\Bigr)\biggr), \quad \int\limits_\delta^1 \frac{\psi_1^p(t)}{t}\frac{dt}{t} = O\biggl(\frac{\psi_1^p(\delta)}{\delta}\biggr)\ (\delta \to +0).$$

Тогда

(I) *если $0 < q_2 < q_1 < +\infty$, $\{x_n\} = \{x_n(\psi_1,\psi_2,q_1 > q_2)\}_{n\in A}$, то условие* (4),

(II) *если $0 < q_1 \le q_2 < +\infty$, $\{x_n\} = \{x_n(\psi_1,\psi_2,q_1 \le q_2)\}_{n\in A}$, то условие* (5) *достаточно для вложения* (1).

Доказательство. Пусть $f \in H^\omega_{\psi_1,q_1}$.

(I) Рассмотрим сначала случай, когда $\int\limits_0^1 \bigl(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\bigr)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t} < +\infty$. В этом случае имеет место неравенство (4). Действительно, из построения множества A видно, что оно конечно и, естественно, условие (4) выполнено. Покажем, что в этом случае $f \in \Lambda_{\psi_2,q_2}$. Имеем

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2} = \int\limits_0^1 (\psi_2(t)f^*(t))^{q_2}\frac{dt}{t} = \int\limits_0^1 \biggl(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\biggr)^{q_2} t^{-\frac{q_1-q_2}{q_1}}(\psi_1(t)f^*(t))^{q_2}t^{-\frac{q_2}{q_1}}\,dt.$$

Применим неравенство Гёльдера с показателями $p = \frac{q_1}{q_2}$ и $q = \frac{q_1}{q_1-q_2}$. Тогда

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2} \le \left(\int\limits_0^1 \biggl(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\biggr)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}\right)^{1-\frac{q_2}{q_1}} \left(\int\limits_0^1 (\psi_1(t)f^*(t))^{q_1}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}.$$

Таким образом,

$$\|f\|_{\psi_2,q_2} \le \left(\int\limits_0^1 \biggl(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\biggr)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}} \|f\|_{\psi_1,q_1},$$

т. е. при $0 < q_2 < q_1 < +\infty$ из того, что

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1 - q_2}} \frac{dt}{t} < +\infty,$$

следует, что $\Lambda_{\psi_1,q_1} \subset \Lambda_{\psi_2,q_2}$, а тогда и $H^{\omega_1}_{\psi_1,q_1} \subset \Lambda_{\psi_2,q_2}$.

Пусть теперь $\int\limits_0^1 \left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1 - q_2}} \frac{dt}{t} = +\infty$. Тогда

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2} \le c_1(\psi_2,q_2) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_2^{q_2}(2^{-n}) \left(\sum_{m=0}^{n} (f^*(2^{-(m+1)}) - f^*(2^{-m})) + f^*(1) \right)^{q_2}.$$

Применяя леммы 1, 5 и 2, будем иметь

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2} \le c_2(\psi_2,q_2) \left(\psi_2^{q_2}(1) f^{*q_2}(1) + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_2^{q_2}(2^{-n}) (f^*(2^{-(n+1)}) - f^*(2^{-n}))^{q_2} \right).$$

Но при $0 < q_1 < +\infty$ будет $\|f\|^{q_1}_{\psi_1,q_1} \ge c_3(\psi_1,q_1)\psi_1^{q_1}(1) f^{*q_1}(1)$. Тогда, используя свойства функции $\psi_2(t)$, имеем

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2} \le c_4(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2) \times \left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} \psi_2^{q_2}(2^{-x}) (f^*(2^{-(n+1)}) - f^*(2^{-n}))^{q_2}\, dx \right).$$

Пусть $R(x) = f^*(2^{-(n+1)}) - f^*(2^{-n})$, если $n \le x < n+1$. Тогда

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2} \le c_5(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2) \left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1} + \int\limits_0^{+\infty} \psi_2^{q_2}(2^{-x}) R^{q_2}(x)\, dx \right). \tag{8}$$

Возьмем последовательность $\{x_n\}$, построенную в условии леммы 6, п. (I)). Тогда

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2} \le c_5(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2) \left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1} + \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \psi_2^{q_2}(2^{-x}) R^{q_2}(x)\, dx \right).$$

К каждому из интегралов применим неравенство Гёльдера с показателями $p = \frac{q_1}{q_2}$ и $q = \frac{q_1}{q_1 - q_2}$:

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2} \le c_6(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)$$
$$\times \left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{\psi_2(2^{-x})}{\psi_1(2^{-x})}\right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1 - q_2}} dx \right)^{1 - \frac{q_2}{q_1}} \left(\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \psi_2^{q_1}(2^{-x}) R^{q_1}(x)\, dx \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \right).$$

Рассмотрим $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \psi_1^{q_1}(2^{-x}) R^{q_1}(x)\, dx$. Найдется целое неотрицательное число M такое, что $M \le x_k < M+1$. Тогда, применяя лемму 3, будем иметь

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \psi_1^{q_1}(2^{-x}) R^{q_1}(x)\, dx \le \int\limits_M^{+\infty} \psi_1^{q_1}(2^{-x}) R^{q_1}(x)\, dx$$
$$\le c_7(\psi_1,q_1) \sum_{n=M}^{\infty} \psi_1^{q_1}(2^{-n}) (f^*(2^{-(n+1)}) - f^*(2^{-n}))^{q_1} \le c_8(\psi_1,q_1) \omega^{q_1}_{\psi_1,q_1}(f, 2^{-M}).$$

Используя свойства модуля непрерывности, получим

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \psi_1^{q_1}(2^{-x})R^{q_1}(x)\,dx \le c_9(\psi_1,q_1)\omega^{q_1}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-x_k}).$$

Таким образом,

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2} \le c_{10}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2) \times \left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int\limits_0^{x_{k+1}}\left(\frac{\psi_2(2^{-x})}{\psi_1(2^{-x})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dx\right)^{1-\frac{q_2}{q_1}}\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-x_k})\right).$$

Так как

$$\int\limits_0^{x_k}\left(\frac{\psi_2(2^{-x})}{\psi_1(2^{-x})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dx = \frac{1}{\ln 2}\int\limits_{\frac12}^{1}\left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}2^k,$$

то

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2} \le c_{11}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1} + \sum_{k=0}^{\infty}2^{(k+1)(1-\frac{q_2}{q_1})}\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-x_k})\right)$$

$$\le c_{12}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int\limits_{2^{-x_k}}^{1}\left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_1-q_2}{q_1}}\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-x_k})\right).$$

В силу (4) получаем, что $f \in \Lambda_{\psi_2,q_2}$, т. е. достаточность вложения (1) в этом случае доказана.

(II) Рассмотрим сначала случай, когда $\sup\limits_{t\in(0,1]}\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} = c < \infty$. Из условий, наложенных на функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, следует, что

$$c_1\frac{\psi_2(\delta)}{\psi_1(\delta)} \le \frac{1}{\delta}\int\limits_0^{\delta}\frac{t\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\frac{dt}{t} \le c_2\frac{\psi_2(\delta)}{\psi_1(\delta)},$$

где c_1, c_2 — положительные постоянные, не зависящие от $\delta \in (0,1]$. Таким образом, множество A конечно и, естественно, условие (5) выполнено. Применяя лемму 1, будем иметь

$$\|f\|_{\psi_2,q_2} \le c_3(\psi_1,q_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\psi_1(2^{-n})f^*(2^{-n}))^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\le c_3(\psi_1,q_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\psi_1(2^{-n})f^*(2^{-n}))^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}} \le c_4(\psi_1,q_2)\|f\|_{\psi_1,q_1}.$$

Таким образом, $\Lambda_{\psi_1,q_1} \subseteq \Lambda_{\psi_2,q_2}$, а тогда и $H^{\omega_1}_{\psi_1,q_1} \subseteq \Lambda_{\psi_2,q_2}$.

Пусть теперь $\sup\limits_{t\in(0,1]}\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} = \infty$. Тогда множество A бесконечно. Возьмем последовательность $\{x_n\}$, построенную в условии леммы 6, п. (II). Применяя неравенство (8), получаем

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2} \le c_5(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1} + \int\limits_0^{+\infty}\psi_2^{q_2}(2^{-x})R^{q_2}(x)\,dx\right)$$

$$\leq c_6(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1}+\int\limits_0^\infty\left(\psi_1(2^{-x})2^x\int\limits_0^{2^{-x}}\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt\right)^{q_2}R^{q_2}(x)\,dx\right)$$

$$= c_6(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1}+\sum_{k=0}^\infty\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\left(2^x\int\limits_0^{2^{-x}}\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt\Big/\int\limits_0^1\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt\right)^{q_2}\right.$$

$$\left.\times\left(\psi_1(2^{-x})\int\limits_0^1\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dtR(x)\right)^{q_2}dx\right).$$

Так как

$$2^{k+1}=2^{x_{k+1}}\int\limits_0^{2^{-x_{k+1}}}\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt\Big/\int\limits_0^1\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt>2^x\int\limits_0^{2^{-x}}\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt\Big/\int\limits_0^1\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt$$

при $0\leq x<x_{k+1}$, то

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2}\leq c_7(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)$$

$$\times\left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1}+\sum_{k=0}^\infty\left(2^{x_{k+1}}\int\limits_0^{2^{-x_{k+1}}}\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\frac{dt}{t}\Big/\int\limits_0^1\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\frac{dt}{t}\right)^{q_2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}(\psi_1(2^{-x})R(x))^{q_2}\,dx\right).$$

Рассмотрим $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}(\psi_1(2^{-x})R(x))^{q_2}\,dx$. Для каждого целого неотрицательного числа k существует целое неотрицательное число M такое, что $M\leq x_k<M+1$. Применяя леммы 1 и 3, получим оценки

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}(\psi_1(2^{-x})R(x))^{q_2}\,dx\leq\int\limits_M^{+\infty}(\psi_1(2^{-x})R(x))^{q_2}\,dx$$

$$\leq\left(\sum_{n=M}^\infty\psi_1^{q_2}(2^{-n})(f^*(2^{-(n+1)})-f^*(2^{-n}))^{q_2}\right)^{\frac{q_2}{q_2}}$$

$$\leq\left(\sum_{n=M}^\infty\psi_1^{q_1}(2^{-n})(f^*(2^{-(n+1)})-f^*(2^{-n}))^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\leq c_8(\psi_1,q_1)\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-M})$$

$$\leq c_9(\psi_1,q_1)\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-x_k}).$$

Тогда

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2}\leq c_{10}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1}+\sum_{k=0}^\infty 2^{(k+1)q_2}\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-x_k})\right)$$

$$\leq c_{11}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1}+\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{\psi_2(2^{-x_k})}{\psi_1(2^{-x_k})}\right)^{q_2}\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-x_k})\right).$$

В силу (5) $f\in\Lambda_{\psi_2,q_2}$, т. е. достаточность вложения (1) в этом случае доказана.

Лемма 7 [20]. *Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности. Тогда найдется такой выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega_1(\delta)$, что будут верны неравенства $\omega(\delta) \le \omega_1(\delta) \le 2\omega(\delta)$.*

Лемма 8 [17]. *Пусть даны числа a, b, α и β такие, что $0 < a < b < \infty$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тогда $\frac{b^{(\alpha+\beta)} - a^{(\alpha+\beta)}}{(b-a)^{\alpha}} \ge b^{\beta} - a^{\beta}$.*

Пусть даны модуль непрерывности $\omega(\delta)$ и положительное число q. Через $E_q(\omega)$ обозначим множество всевозможных последовательностей неотрицательных чисел $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что

$$\sum_{n=s}^{\infty} \varepsilon_n^q = O(\omega^q(2^{-s})), \quad \sum_{n=1}^{s} 2^{nq} \varepsilon_n^q = O(2^{sq}\omega^q(2^{-s})) \quad (s \in N,\ s \to +\infty).$$

Лемма 9. *Пусть $0 < q < \infty$, $\psi(t)$ — положительная неубывающая на $(0,1]$ функция такая, что $\int\limits_0^{\delta} \psi(t)\frac{dt}{t} = O\big(\psi\big(\frac{\delta}{2}\big)\big)$ $(\delta \to +0)$, $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности, а последовательность неотрицательных чисел $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in E_q(\omega)$. Положим $\varepsilon(t) = \varepsilon_n, t \in (2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$ $(n = 1, 2, \dots)$, $f(x) = \begin{cases} \int\limits_x^{1/4} \frac{\varepsilon(t)}{\psi(t)}\frac{dt}{t}, & 0 < x \le 1/4, \\ 0, & 1/4 < x \le 1, \end{cases}$ и доопределим функцию $f(x)$ на всей числовой оси как периодическую с периодом 1.*

Тогда $f \in H^{\omega}_{\psi,q}$.

Заметим, что функции, подобные этой, рассматривались в ряде работ различных авторов (см., например, [4, 9, 12, 16, 17]).

При $\alpha_\psi > 1$, $\beta_\psi < \infty$ лемма 9 доказана в [16]. Доказательство, проведенное в [16], будет верным и для случая, когда $\int\limits_0^{\delta} \psi(t)\frac{dt}{t} = O\big(\psi\big(\frac{\delta}{2}\big)\big)$ $(\delta \to +0)$.

Лемма 10. *Пусть $0 < q_1, q_2 < +\infty$, $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности; $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — положительные неубывающие на $(0,1]$ функции такие, что*

$$\int\limits_0^{\delta} \psi_1(t)\frac{dt}{t} = O\left(\psi_1\left(\frac{\delta}{2}\right)\right), \quad \int\limits_0^{\delta} \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt = O\left(\delta\frac{\psi_2(\delta)}{\psi_1(\delta)}\right) \quad (\delta \to +0).$$

Тогда

(I) *если $0 < q_2 < q_1 < +\infty$, $\{x_n\} = \{x_n(\psi_1, \psi_2, q_1 > q_2)\}_{n \in A}$, то условие* (4),

(II) *если $0 < q_1 \le q_2 < +\infty$, $\{x_n\} = \{x_n(\psi_1, \psi_2, q_1 \le q_2)\}_{n \in A}$, то условие* (5) *необходимо для вложения* (1).

Доказательство будем вести от противного.

(I) Предположим, что имеет место вложение (1), но условие (4) не выполняется, т. е.

$$\sum_{n \in A} \left(\int\limits_{2^{-x_n}}^{1} \left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1 - q_2}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{q_1 - q_2}{q_1}} \omega^{q_2}(2^{-x_n}) = +\infty.$$

Покажем, что тогда можно подобрать такую функцию $f(x)$, что $f \in H^{\omega}_{\psi_1,q_1}$, но $f \notin \Lambda_{\psi_2,q_2}$. Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность из класса $E_{q_1}(\omega)$. Рассмотрим для этой последовательности функцию $f(x)$ из леммы 9. Легко видеть, что $f^*(x)=f(x)$. По лемме 9 $f\in H^{\omega}_{\psi_1,q_1}$. Очевидно, что

$$f^*(2^{-n})=f(2^{-n})\ge\int\limits_{2^{-n}}^{2^{-(n-1)}}\frac{\varepsilon(t)}{t\psi_1(t)}\,dt\ge c(\psi_1)\frac{\varepsilon_{n-1}}{\psi_1(2^{-(n-1)})}.$$

Тогда

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2}\ge\sum_{n=2}^{\infty}\int\limits_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}}\psi_2^{q_2}(t)f^{*q_2}(t)\frac{dt}{t}\ge c_1(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\varepsilon_n\right)^{q_2}.$$

Если $\int\limits_0^1\bigl(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\bigr)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}<\infty$, то множество A конечно и

$$\sum_{n\in A}\left(\int\limits_{2^{-x_n}}^{1}\left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_1-q_2}{q_1}}\omega^{q_2}(2^{-x_n})<+\infty,$$

что противоречит нашему предположению. Значит, $\int\limits_0^1\bigl(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\bigr)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}=\infty$.

Так как по лемме 7 для любого модуля непрерывности $\omega(\delta)$ найдется выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega_1(\delta)$ такой, что $\omega(\delta)\le\omega_1(\delta)\le2\omega(\delta)$ $(0\le\delta\le1)$, достаточно доказать п. (I) для выпуклых вверх модулей непрерывности. Пусть $\omega(\delta)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда $\frac{\omega(\delta)}{\delta}\uparrow$ при $\delta\downarrow+0$.

Если $\lim\limits_{\delta\to0+0}\frac{\omega(\delta)}{\delta}<\infty$, то $\omega(\delta)\le c_2\delta$ и

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}\left(\int\limits_{2^{-x_n}}^{1}\left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_1-q_2}{q_1}}\omega^{q_2}(2^{-x_n})\\
&\le c_3(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^{x}\left(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt\right)^{-\frac{q_2}{q_1}}\left(\frac{\psi_2(2^{-x})}{\psi_1(2^{-x})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\omega^{q_2}(2^{-x})\,dx\\
&\le c_3(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^{n}\left(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt\right)^{-\frac{q_2}{q_1}}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\omega^{q_2}(2^{-n})\\
&\le c_4(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})2^{-n}}{\psi_1(2^{-n})}\right)^{q_2}<\infty,
\end{aligned}$$

что противоречит нашему предположению. Значит, $\frac{\omega(\delta)}{\delta}\uparrow+\infty$ при $\delta\downarrow+0$.

Построим последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ по индукции.

Пусть $n_0=1$ и уже определены натуральные числа $n_1,\dots,n_k$. Тогда полагаем $m_{k+1}=\min\{n\in N: 2^n\omega(2^{-n})\ge2\cdot2^{n_k}\omega(2^{-n_k})\}$. Такое число найдется, так как у нас $\frac{\omega(\delta)}{\delta}\uparrow+\infty$ при $\delta\downarrow+0$. Если при этом $\omega(2^{-m_{k+1}})\le2^{-1}\omega(2^{-n_k})$, то полагаем $n_{k+1}=m_{k+1}$. В этом случае для всех натуральных n таких, что

$n_k \le n < n_{k+1}$, используя свойства выпуклого вверх модуля непрерывности, имеем $2^{n_k}\omega(2^{-n_k}) \le 2^n\omega(2^{-n}) \le 2^{n_{k+1}-1}\omega(2^{-(n_{k+1}-1)}) < 2\cdot 2^{n_k}\omega(2^{-n_k})$. Отметим, что $2^{n_{k+1}}\omega(2^{-n_{k+1}}) = 2\cdot 2^{n_{k+1}-1}\omega(2^{-1}\cdot 2^{-(n_{k+1}-1)}) \le 2\cdot 2^{n_{k+1}-1}\omega(2^{-(n_{k+1}-1)}) < 4\cdot 2^{n_k}\omega(2^{-n_k})$.

Если же $\omega(2^{-m_{k+1}}) > 2^{-1}\omega(2^{-n_k})$, то полагаем $n_{k+1} = \min\{n \in N : \omega(2^{-n}) \le 2^{-1}\omega(2^{-n_k})\}$. При этом $n_{k+1} > m_{k+1}$ и для всех натуральных n таких, что $n_k \le n < n_{k+1}$, имеем $2^{-1}\omega(2^{-n_k}) < \omega(2^{-(n_{k+1}-1)}) \le \omega(2^{-n}) \le \omega(2^{-n_k})$. Отметим, что $\omega(2^{-n_{k+1}}) = \omega(2^{-1}\cdot 2^{-(n_{k+1}-1)}) \ge 2^{-1}\omega(2^{n_{k+1}-1}) > 4^{-1}\omega(2^{-n_k})$.

Зададим последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0, & n_k < n < n_{k+1},\ n_{k+1} = m_{k+1}, \\ \omega(2^{-n_k}), & n = n_k,\ n_{k+1} = m_{k+1}, \\ \dfrac{\omega(2^{-n_{k+1}})\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\right)^{\frac{q_2}{q_1-q_2}}}{\left(\sum\limits_{m=n_k}^{n_{k+1}-1}\left(\frac{\psi_2(2^{-m})}{\psi_1(2^{-m})}\right)^{\frac{q_2}{q_1-q_2}q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}}, & n_k \le n < n_{k+1},\ n_{k+1} > m_{k+1}. \end{cases}$$

Покажем, что последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит классу $E_{q_1}(\omega)$. Пусть s — натуральное число такое, что $n_i \le s < n_{i+1}$ для некоторого натурального числа i. Тогда, учитывая свойства выпуклого вверх модуля непрерывности и последовательности n_k, имеем

$$\sum_{n=s}^{\infty}\varepsilon_n^{q_1} = \sum_{n=s}^{n_{i+1}-1}\varepsilon_n^{q_1} + \sum_{\substack{t\in N: t\ge i+1,\\ n_{t+1}=m_{t+1}}}\ \sum_{n=n_t}^{n_{t+1}-1}\varepsilon_n^{q_1} + \sum_{\substack{t\in N: t\ge i+1,\\ n_{t+1}>m_{t+1}}}\ \sum_{n=n_t}^{n_{t+1}-1}\varepsilon_n^{q_1}$$

$$\le \sum_{n=s}^{n_{i+1}-1}\varepsilon_n^{q_1} + \sum_{t=i+1}^{\infty}\omega^{q_1}(2^{-n_t}) \le \sum_{n=s}^{n_{i+1}-1}\varepsilon_n^{q_1} + c_7(q_1)\omega^{q_1}(2^{-n_{i+1}}).$$

Если $n_{i+1} > m_{i+1}$, то получаем $\sum\limits_{n=s}^{n_{i+1}-1}\varepsilon_n^{q_1} \le \omega^{q_1}(2^{-n_{i+1}})$. Если $n_{i+1} = m_{i+1}, n_i < s$, то $\sum\limits_{n=s}^{n_{i+1}-1}\varepsilon_n^{q_1} = 0$. Если же $n_{i+1} = m_{i+1}, n_i = s$, то $\sum\limits_{n=s}^{n_{i+1}-1}\varepsilon_n^{q_1} = \omega^{q_1}(2^{-s})$. Таким образом, $\sum\limits_{n=s}^{\infty}\varepsilon_n^{q_1} \le c_8(q_1)\omega^{q_1}(2^{-s})$, $s \in N$.

Аналогично проверяется, что $\sum\limits_{n=1}^{s}2^{nq_1}\varepsilon_n^{q_1} \le c_9(q_1)2^{sq_1}\omega^{q_1}(2^{-s})$.

Итак, последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит классу $E_{q_1}(\omega)$.

Учитывая неравенство

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\int_{2^{-x_n}}^{1}\left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_1-q_2}{q_1}}\omega^{q_2}(2^{-x_n})$$

$$\le c_{10}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\int_0^{\infty}\left(\int_0^{x}\left(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt\right)^{-\frac{q_2}{q_1}}\left(\frac{\psi_2(2^{-x})}{\psi_1(2^{-x})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\omega^{q_2}(2^{-x})\,dx,$$

покажем, что если

$$\int_0^{\infty}\left(\int_0^{x}\left(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt\right)^{-\frac{q_2}{q_1}}\left(\frac{\psi_2(2^{-x})}{\psi_1(2^{-x})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\omega^{q_2}(2^{-x})\,dx = \infty,$$

то для функции $f(x)$, построенной с помощью данной последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, будет расходиться ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\bigl(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\varepsilon_n\bigr)^{q_2}$.

Пусть $n_{k+1} > m_{k+1}$. Воспользуемся леммой 8:

$$\int\limits_{n_k}^{n_{k+1}}\left(\int\limits_0^x\left(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt\right)^{-\frac{q_2}{q_1}}\left(\frac{\psi_2(2^{-x})}{\psi_1(2^{-x})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\omega^{q_2}(2^{-x})\,dx$$

$$\le\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}\omega^{q_2}(2^{-n})\int\limits_n^{n+1}\left(\int\limits_0^x\left(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt\right)^{-\frac{q_2}{q_1}}\left(\frac{\psi_2(2^{-x})}{\psi_1(2^{-x})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dx$$

$$\le c_{11}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\omega^{q_2}(2^{-n_{k+1}})$$

$$\times\int\limits_{n_k}^{n_{k+1}}\left(\int\limits_0^x\left(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt\right)^{-\frac{q_2}{q_1}}\left(\frac{\psi_2(2^{-x})}{\psi_1(2^{-x})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dx$$

$$\le c_{12}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\omega^{q_2}(2^{-n_{k+1}})\left(\left(\int\limits_0^{n_{k+1}}\left(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt\right)^{1-\frac{q_2}{q_1}}\right.$$

$$\left.-\left(\int\limits_0^{n_k}\left(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt\right)^{1-\frac{q_2}{q_1}}\right)$$

$$\le c_{13}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\omega^{q_2}(2^{-n_{k+1}})\frac{\int\limits_0^{n_{k+1}}\bigl(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\bigr)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt-\int\limits_0^{n_k}\bigl(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\bigr)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt}{\left(\int\limits_0^{n_{k+1}}\bigl(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\bigr)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt-\int\limits_0^{n_k}\bigl(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\bigr)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt\right)^{\frac{q_2}{q_1}}}$$

$$\le c_{13}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\omega^{q_2}(2^{-n_{k+1}})\frac{\sum\limits_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}\bigl(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\bigr)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}}{\left(\sum\limits_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}\bigl(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\bigr)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}}$$

$$=c_{13}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\varepsilon_n\right)^{q_2}.$$

Если $n_{k+1} = m_{k+1}$, то получаем

$$\int\limits_{n_k}^{n_{k+1}}\left(\int\limits_0^x\left(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt\right)^{-\frac{q_2}{q_1}}\left(\frac{\psi_2(2^{-x})}{\psi_1(2^{-x})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\omega^{q_2}(2^{-x})\,dx$$

$$\le c_{14}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)2^{n_kq_2}\omega^{q_2}(2^{-n_k})\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}2^{-nq_2}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\right)^{q_2}$$

$$\le c_{15}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\varepsilon_n\right)^{q_2}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{n_k}^{n_{k+1}}\left(\int\limits_0^x\left(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt\right)^{-\frac{q_2}{q_1}}\left(\frac{\psi_2(2^{-x})}{\psi_1(2^{-x})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\omega^{q_2}(2^{-x})\,dx$$

$$\le c_{16}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\varepsilon_n\right)^{q_2}.$$

Отсюда

$$\|f\|^{q_2}_{\psi_2,q_2}\ge c_{18}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\varepsilon_n\right)^{q_2}\ge c_{17}(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)$$

$$\times\int\limits_1^{\infty}\left(\int\limits_0^x\left(\frac{\psi_2(2^{-t})}{\psi_1(2^{-t})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}dt\right)^{-\frac{q_2}{q_1}}\left(\frac{\psi_2(2^{-x})}{\psi_1(2^{-x})}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\omega^{q_2}(2^{-x})\,dx=\infty.$$

Поэтому $f\notin\Lambda_{\psi_2,q_2}$. Таким образом, п. (I) доказан.

(II) Доказательство п. (II) проводится по схеме доказательства п. (I). Мы лишь покажем последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ из класса $E_{q_1}(\omega)$ и убедимся, что для нее $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\varepsilon_n\right)^{q_2}=\infty$.

Возьмем последовательность $\{x_n\}$, построенную в условии п. (II). Рассмотрим $A_0=\left\{x\ge 0:\ \frac{2^x\int_0^{2^{-x}}\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt}{\int_0^1\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt}=1\right\}$. Видим, что $x_0=\min\{x: x\in A_0\}=0$. По последовательности $\{x_n\}$ построим последовательности $\{x_{r_n}\}$ и $\{M_n\}$ ($M_n\in N\cup\{0\}$) следующим образом. Полагаем $M_0=0$. Построим r_0. Возьмем x_1. Если $x_1\ge 1$, то берем $r_0=0$. Если $x_1\in[M_0,M_0+1)$, а $x_2\ge 1$, то берем $r_0=1$. Если же $x_2\in[0,1)$, то берем x_3, и т. д. Так как по построению $x_k\to+\infty$ при $k\to+\infty$, найдется такое k_0, что $x_{k_0}\in[0,1)$, а $x_{k_0+1}\ge 1$. Тогда полагаем $r_0=k_0$. Следовательно, $x_0\in[0,1)$, $x_1\in[0,1),\dots,x_{r_0}\in[0,1)$, $x_{r_0+1}\ge 1$. Возьмем x_{r_0+1}. Найдется натуральное число M_1 такое, что $x_{r_0+1}\in[M_1,M_1+1)$. Если $x_{r_0+2}\ge M_1+1$, то полагаем $r_1=r_0+1$. Если же $x_{r_0+2}\in[M_1,M_1+1)$, то берем x_{r_0+3} и т. д. Найдется целое число k_1 такое, что $x_{r_0+k_1}\in[M_1,M_1+1)$, а $x_{r_0+k_1+1}\ge M_1+1$. Тогда полагаем $r_1=r_0+k_1$, и т. д. Таким образом, построены последовательности $\{x_{r_n}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ такие, что $x_{r_n}\in[M_n,M_{n+1})$ $(n=0,1,\dots)$.

Покажем, что существует число T такое, что $r_{n+1}-r_n\le T$ для любого n.

Для любых n и любых x,y таких, что $M_n\le y\le x<M_n+1$, исходя из свойств функций $\psi_2(t)$ и $\psi_1(t)$, имеем

$$\varphi(x)=\frac{2^x\int_0^{2^{-x}}\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt}{\int_0^1\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt}\le\frac{2^{M_n+1}}{\int_0^1\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt}\int\limits_0^{2^{-M_n}}\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt$$

$$\le c_1 2^y\int\limits_0^{2^{-y}}\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt\Big/\int\limits_0^1\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\,dt=c_1\varphi(y),$$

где положительная постоянная c_1 не зависит от x, y, M_n и n.

Найдется такое целое число p, что $2^p \le c_1 < 2^{p+1}$. Следовательно, $\varphi(x) \le 2^{p+1}\varphi(y)$.

Возьмем любое натуральное число n и рассмотрим члены последовательности $\{x_k\}$ из полуинтервала $[M_n, M_n+1)$: $x_{r_{n-1}+1} \in [M_n, M_n+1)$, $x_{r_{n-1}+2} \in [M_n, M_n+1), \dots, x_{r_n} \in [M_n, M_n+1)$, $x_{r_n+1} \ge M_n + 1$. Тогда $\varphi(x_{r_n}) = 2^{r_n} \le 2^{p+1}\varphi(x_{r_{n-1}+1}) = 2^{p+1}2^{r_{n-1}+1}$. Следовательно, $r_n - r_{n-1} \le p+2$, т. е. если $T = p+2$, то $r_{n+1} - r_n \le T$ для любого $n = 0, 1, \dots$.

Построим последовательность $\{n_k\}$ так же, как в п. (I) леммы 10.

Зададим последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом. Рассмотрим $n \in [n_k,\, n_{k+1}-1]$. Возникают следующие две ситуации.

1. Для любого m точка x_{r_m} не принадлежит $[n_k, n_{k+1})$. В этом случае полагаем $\varepsilon_n = 0$, $n_k \le n \le n_{k+1} - 1$.

2. Существуют m и $s(m)$ такие, что $x_{r_{m-1}} < n_k$, $x_{r_m} \in [n_k, n_{k+1})$, $x_{r_{m+1}} \in [n_k, n_{k+1}), \dots, x_{r_{m+s(m)}} \in [n_k, n_{k+1})$, $x_{r_{m+s(m)+1}} \ge n_{k+1}$. Пусть $n_{k+1} = m_{k+1}$, тогда полагаем $\varepsilon_n = \begin{cases} 0, & n_k < n < n_{k+1}, \\ \omega(2^{-n_k}), & n = n_k. \end{cases}$

Пусть $n_{k+1} > m_{k+1}$, $R_m = [x_{r_{m+s(m)}}]$, где $[a]$ — целая часть числа a. Так как $x_{r_{m+s(m)}} \in [n_k, n_{k+1})$, то $R_m \in [n_k, n_{k+1}-1]$. Тогда положим $\varepsilon_n = \omega(2^{-R_m})$, если $n = R_m$, и $\varepsilon_n = 0$, если $n \ne R_m$ и $n_k \le n \le n_{k+1} - 1$.

Покажем, что если $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\bigl(\frac{\psi_2(2^{-x_{r_n}})}{\psi_1(2^{-x_{r_n}})}\omega(2^{-x_{r_n}})\bigr)^{q_2} = \infty$, то для функции $f(x)$, построенной с помощью данной последовательности $\{\varepsilon_n\}$, будет расходиться ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\bigl(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\varepsilon_n\bigr)^{q_2}$.

Пусть $n_{k+1} > m_{k+1}$. Возможны два случая.

1. Существует j такое, что $x_{r_{j-1}} \notin [n_k, n_{k+1})$, $x_{r_{j+l}} \in [n_k, n_{k+1})$ $(l = 0, 1, \dots, s(j))$, $x_{r_{j+s(j)+1}} \ge n_{k+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{s(j)}\left(\frac{\psi_2(2^{-x_{r_{j+k}}})}{\psi_1(2^{-x_{r_{j+k}}})}\omega(2^{-x_{r_{j+k}}})\right)^{q_2} &\le c_2(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\sum_{k=0}^{s(j)}(2^{r_{j+k}}\omega(2^{-x_{r_{j+k}}}))^{q_2} \\
&\le c_3(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\omega^{q_2}(2^{-x_{r_{j+s(j)}}})\sum_{k=0}^{s(j)}2^{r_{j+k}q_2} \\
&\le c_4(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)2^{r_{j+s(j)}q_2}\omega^{q_2}(2^{-x_{r_{j+s(j)}}}) \\
&\le c_5(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\left(\frac{\psi_2(2^{-R_j})}{\psi_1(2^{-R_j})}\omega(2^{-R_j})\right)^{q_2} \\
&= c_5(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\varepsilon_n\right)^{q_2}.
\end{aligned}$$

2. Пусть $x_{r_m} \notin [n_k, n_{k+1})$ для любого m. Тогда

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} 0 = \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\varepsilon_n\right)^{q_2},$$

так как в этом случае $\varepsilon_n = 0$.

Аналогично проверяется случай, когда $n_{k+1} = m_{k+1}$.

Отсюда

$$\|f\|_{\psi_2,q_2}^{q_2} \geq c_7(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\varepsilon_n\right)^{q_2}$$
$$\geq c_6(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\psi_2(2^{-x_{r_n}})}{\psi_1(2^{-x_{r_n}})}\omega(2^{-x_{r_n}})\right)^{q_2} = \infty.$$

Поэтому $f(x) \notin \Lambda_{\psi_2,q_2}$. Лемма 10 доказана полностью.

3. Доказательство теоремы 1. Можно проверить, что условия, наложенные на функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ в формулировке теоремы 1, приводят к тому, что выполняются условия, наложенные на эти функции в леммах 6 и 10. Применяя эти леммы, убеждаемся в справедливости теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2. Из условий на функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ можно получить

(I) если $0 < q_2 < q_1 < +\infty$, то

$$\left(\int_{2^{-1}}^{1}\left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_1-q_2}{q_1}}\omega^{q_2}(2^{-1})$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{2^{-n}}^{1}\left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_1-q_2}{q_1}}(\omega^{q_2}(2^{-n})-\omega^{q_2}(2^{-(n+1)}))$$
$$\leq c_1\left(\left(\int_{2^{-1}}^{1}\left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_1-q_2}{q_1}}\omega^{q_2}(2^{-1})\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{2^{-n}}^{1}\left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_1-q_2}{q_1}}(\omega^{q_2}(2^{-n})-\omega^{q_2}(2^{-(n+1)}))\right);$$

(II) если $0 < q_1 \leq q_2 < +\infty$, то из построения последовательности $\{x_n\}$ следует, что

$$c_2\sum_{n\in A}\left(\frac{\psi_2(2^{-x_n})}{\psi_1(2^{-x_n})}\omega(2^{-x_n})\right)^{q_2} \geq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\right)^{q_2}(\omega^{q_2}(2^{-n})-\omega^{q_2}(2^{-(n+1)})).$$

Если дополнительно функция $\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}$ ограничена или почти убывает на $(0,1]$ или $\int_\delta^1 \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\frac{dt}{t} = O\big(\frac{\psi_2(\delta)}{\psi_1(\delta)}\big)$ $(\delta \to +0)$, то

$$\sum_{n\in A}\left(\frac{\psi_2(2^{-x_n})}{\psi_1(2^{-x_n})}\omega(2^{-x_n})\right)^{q_2} \leq c_3\left(\left(\frac{\psi_2(1)}{\psi_1(1)}\omega(1)\right)^{q_2}\right.$$
$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\right)^{q_2}(\omega^{q_2}(2^{-n})-\omega^{q_2}(2^{-(n+1)}))\right).$$

Это означает, что условия теоремы 1 выполнены. Применяя теорему 1, получаем доказательство теоремы 2.

5. Замечания.

Замечание 1. В случае $0 < q_1 \le q_2 < +\infty$ достаточное условие для вложения (1) в теореме 2 может быть получено в более общей форме, не требующей дополнительного условия на функции $\psi_2(t)$ и $\psi_1(t)$, а именно условий: 1) $\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}$ ограничена или почти убывает на $(0,1]$ или 2) $\int\limits_\delta^1 \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\frac{dt}{t} = O\big(\frac{\psi_2(\delta)}{\psi_1(\delta)}\big)$ $(\delta \to +0)$. Тем самым достаточное условие вложения (1) приобретает следующий вид.

Пусть $0 < q_1 \le q_2 < +\infty$, $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности; $\psi_1(t), \psi_2(t)$ — положительные неубывающие на $(0,1]$ функции такие, что $\int\limits_0^\delta \psi_i(t)\frac{dt}{t} = O(\psi_i(\delta))$ $(i = 1,2)$, $\int\limits_\delta^1 \frac{\psi_1(t)}{t}\frac{dt}{t} = O\big(\frac{\psi_1(\delta)}{\delta}\big)$, $\psi_2(\delta) = O(\psi_2(\delta/2))$ $(\delta \to +0)$. Тогда условие

$$\sum_{n=0}^{\infty}\bigg(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\bigg)^{q_2}\omega^{q_2}(2^{-n}) < +\infty \tag{9}$$

достаточно для вложения (1).

Сравним условия (7) и (9):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\bigg(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\bigg)^{q_2}(\omega^{q_2}(2^{-n}) - \omega^{q_2}(2^{-(n+1)})) \le \sum_{n=0}^{\infty}\bigg(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\bigg)^{q_2}\omega^{q_2}(2^{-n}),$$

т. е. условие (7) более слабое.

Если же модуль непрерывности $\omega(\delta)$ удовлетворяет дополнительному условию $\int\limits_0^\delta \omega(t)\frac{dt}{t} = O(\omega(\delta))$ $(\delta \to +0)$, то

$$c\Bigg(\bigg(\frac{\psi_2(1)}{\psi_1(1)}\bigg)^{q_2}\omega^{q_2}(1) + \sum_{n=0}^{\infty}\bigg(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\bigg)^{q_2}(\omega^{q_2}(2^{-n}) - \omega^{q_2}(2^{-(n+1)}))\Bigg) \\ \ge \sum_{n=0}^{\infty}\bigg(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\bigg)^{q_2}\omega^{q_2}(2^{-n}),$$

т. е. в этом случае условие (9) будет также необходимым для вложения (1).

В качестве примера отметим, что если $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$, то $\int\limits_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt = O(\delta^\alpha)$ $(\delta \to +0)$. Таким образом, если $0 < q_1 \le q_2 < +\infty$, $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$ и функции $\psi_1(t), \psi_2(t)$ удовлетворяют условиям, наложенными на них в теореме 2, то условие (9) будет необходимым и достаточным условием для вложения (1).

Отметим также, что из условий на функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ в теореме 2 вытекает, что $\int\limits_0^1 (\psi_2(t)/\psi_1(t))^{q_2} t^{q_2-1}\,dt < +\infty$. Таким образом, если функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ удовлетворяют условиям, наложенными на них в теореме 2, $0 < q_1 \le q_2 < +\infty$ и $\omega(\delta) = \delta$, то $H^\delta_{\psi_1,q_1} \subset \Lambda_{\psi_2,q_2}$.

Замечание 2. Если положительная неубывающая на $(0,1]$ функция $\psi(t)$ такова, что $\alpha_\psi > 1$, $\beta_\psi < 2$, то из [5] следует, что $\int\limits_0^\delta \psi(t)t^{-1}\,dt = O(\psi(\delta))$,

$\int\limits_\delta^1 \psi(t)t^{-2}\,dt = O(\psi(\delta)/\delta)$ $(\delta \to +0)$. Обратное не всегда верно. Чтобы доказать это, рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{3^{n+1}}, & \text{если } t \in \left(\frac{2}{4^{n+1}}, \frac{1}{4^n}\right],\ n = 0, 1, \dots, \\ \frac{1}{3^{n+2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{n+2}\left(t - \frac{1}{4^{n+1}}\right), & \text{если } t \in \left(\frac{1}{4^{n+1}}, \frac{2}{4^{n+1}}\right],\ n = 0, 1, \dots, \\ 0, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

Для нее $\int\limits_0^\delta \psi(t)\frac{dt}{t} = O(\psi(\delta))$, $\int\limits_\delta^1 \frac{\psi(t)}{t}\frac{dt}{t} = O\left(\frac{\psi(\delta)}{\delta}\right)$ $(\delta \to +0)$. В то же время для этой функции $\psi(t)$ $\alpha_\psi = 1$ будет $\beta_\psi = 3$.

Заметим также, что если положительная неубывающая на $(0,1]$ функция $\psi(t)$ удовлетворяет условию $\int\limits_\delta^1 \psi(t)t^{-2}\,dt = O(\psi(\delta)/\delta)$ $(\delta \to +0)$, то $\psi(\delta) = O(\psi(\delta/2))$ $(\delta \to +0)$. Обратное не всегда верно. Так, например, для функции $\psi(t) = t\left(\ln\frac{1}{t}\right)^\varepsilon (\varepsilon > 0)$, как нетрудно проверить, условие $\int\limits_\delta^1 \psi(t)t^{-2}\,dt = O(\psi(\delta)/\delta)$ $(\delta \to +0)$ не выполнено, но в то же время выполнено условие $\psi(\delta) = O(\psi(\delta/2))$ $(\delta \to +0)$.

Замечание 3. Если в теореме A в качестве одной из функций $\psi_1(t)$ или $\psi_2(t)$ взять, например, функцию $\psi(t)$ из замечания 2, то теорему A нельзя применить, так как $\alpha_\psi = 1$, $\beta_\psi = 3$. В то же время теорему 1 можно применить для исследования вложения (1).

Замечание 4. Если функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, рассмотренные в условии теоремы 1, будут непрерывными, то множество A_m из п. (II) может иметь следующий вид: $A_m = \left\{x \geq 0 : \frac{\psi_2(2^{-x})}{\psi_1(2^{-x})} \cdot \frac{\psi_1(1)}{\psi_2(1)} = 2^m\right\}$ $(m = 0, 1, 2, \dots)$.

Замечание 5. Пусть $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$. Тогда $H^\omega_{\psi_1,q_1}$ есть класс Липшица $\mathrm{Lip}(\alpha, \psi_1, q_1)$. Для этих классов из теоремы 2 и замечания 1 вытекает следующее утверждение.

Пусть $0 < q_1, q_2 < +\infty$, $0 < \alpha \leq 1$, $\psi_1(t), \psi_2(t)$ — положительные неубывающие на $(0,1]$ функции такие, что $\int\limits_0^\delta \psi_i(t)\frac{dt}{t} = O(\psi_i(\delta))$ $(i = 1, 2)$, $\int\limits_\delta^1 \frac{\psi_1(t)}{t}\frac{dt}{t} = O\left(\frac{\psi_1(\delta)}{\delta}\right)$, $\psi_2(\delta) = O(\psi_2(\delta/2))$ $(\delta \to +0)$. Тогда

(I) при $0 < q_2 < q_1 < +\infty$ условие

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_t^1 \left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1 - q_2}} \frac{dy}{y}\right)^{-\frac{q_2}{q_1}} \left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1 q_2}{q_1 - q_2}} t^{\alpha q_2}\frac{dt}{t} < +\infty,$$

(II) при $0 < q_1 \leq q_2 < +\infty$ условие $\int\limits_0^1 \left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{q_2} t^{\alpha q_2}\frac{dt}{t} < +\infty$

необходимо и достаточно для вложения $\mathrm{Lip}(\alpha, \psi_1, q_1) \subset \Lambda_{\psi_2,q_2}$.

Замечание 6. Аналогично тому, как доказывается теорема 2, можно показать, что справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть* $0 < q_1, q_2 < +\infty$, $\psi_1(t), \psi_2(t)$ — *положительные неубывающие на* $(0,1]$ *функции такие, что* $\int\limits_0^\delta \psi_i(t)\frac{dt}{t} = O(\psi_i(\delta))$ $(i = 1, 2)$, $\int\limits_\delta^1 \frac{\psi_1(t)}{t}\frac{dt}{t} = O\left(\frac{\psi_1(\delta)}{\delta}\right)$, $\psi_2(\delta) = O(\psi_2(\delta/2))$ $(\delta \to +0)$; $f \in \Lambda_{\psi_1,q_1}$.

I. *Если* $0 < q_2 < q_1 < +\infty$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{2^{-n}}^{1}\left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_1-q_2}{q_1}}\left(\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-n})-\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-(n+1)})\right)<+\infty,$$

то $f \in \Lambda_{\psi_2,q_2}$ *и справедливы следующие неравенства:*

$$\|f\|_{\psi_2,q_2} \le c_1(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{2^{-n}}^{1}\left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_1-q_2}{q_1}}\times\left(\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-n})-\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-(n+1)})\right)\right)^{\frac{1}{q_2}},$$

$$\omega_{\psi_2,q_2}(f,2^{-n}) \le c_2(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\left(\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(\int_{2^{-m}}^{1}\left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_1-q_2}{q_1}}\times\left(\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-m})-\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-(m+1)})\right)\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

II. *Если* $0 < q_1 \le q_2 < +\infty$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\right)^{q_2}-\left(\frac{\psi_2(2^{-(n+1)})}{\psi_1(2^{-(n+1)})}\right)^{q_2}\right|\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-n})<+\infty,$$

то $f \in \Lambda_{\psi_2,q_2}$ *и справедливы следующие неравенства:*

$$\|f\|_{\psi_2,q_2} \le c_3(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\times\left(\|f\|^{q_2}_{\psi_1,q_1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{\psi_2(2^{-n})}{\psi_1(2^{-n})}\right)^{q_2}-\left(\frac{\psi_2(2^{-(n+1)})}{\psi_1(2^{-(n+1)})}\right)^{q_2}\right|\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-n})\right)^{\frac{1}{q_2}},$$

$$\omega_{\psi_2,q_2}(f,2^{-n}) \le c_4(\psi_1,\psi_2,q_1,q_2)\left(\left(\left(\frac{\psi_2(1)}{\psi_1(1)}\right)^{q_2}+\sum_{m=0}^{n}\left|\left(\frac{\psi_2(2^{-m})}{\psi_1(2^{-m})}\right)^{q_2}-\left(\frac{\psi_2(2^{-(m+1)})}{\psi_1(2^{-(m+1)})}\right)^{q_2}\right|\right)\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-n})+\sum_{m=n+1}^{\infty}\left|\left(\frac{\psi_2(2^{-m})}{\psi_1(2^{-m})}\right)^{q_2}-\left(\frac{\psi_2(2^{-(m+1)})}{\psi_1(2^{-(m+1)})}\right)^{q_2}\right|\omega^{q_2}_{\psi_1,q_1}(f,2^{-m})\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

2. *Lorentz G. G.* Some new functional spaces // Ann. Math. 1950. V. 51, N 1. P. 37–55.

3. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
4. *Темиргалиев Н.* О вложении классов H_p^ω в пространства Лоренца // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 2. С. 160–172.
5. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.
6. *Никольский С. М.* Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 2, № 3. С. 191–194.
7. *Ульянов П. Л.* Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32, № 3. С. 649–686.
8. *Андриенко В. А.* Теоремы вложения для функций одного переменного // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 649–686. (Итоги науки и техники).
9. *Коляда В. И.* О вложении в классы $\varphi(L)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1975. Т. 39, № 2. С. 418–437.
10. *Тиман М. Ф., Рубинштейн А. И.* О вложении классов функций, определенных на нульмерных группах // Изв. вузов. Математика. 1980. № 8. С. 66–76.
11. *Johansson H.* Embedding of H_p^ω in some Lorentz spaces. Umea, Sweden: University of Umea, Department of Mathematics, 1975. 26 p. (Report N 6).
12. *Шерстнева Л. А.* О вложении некоторых классов измеримых функций из пространств Лоренца // Дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1986. 144 с.
13. *Нетрусов Ю. В.* Теоремы вложения пространств Бесова в идеальные пространства // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1987. Т. 159. С. 69–82.
14. *Нетрусов Ю. В.* Теоремы вложения пространств $H_p^{\omega,k}$ и $H_p^{s,\omega,k}$ // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1987. Т. 159. С. 83–102.
15. *Гольдман М. Л.* О вложении пространства Никольского — Бесова в весовое пространство Лоренца // Тр. МИАН СССР. 1987. Т. 159. С. 93–95.
16. *Матвиюк Л. В.* Теоремы вложения классов функций с заданными мажорантами модулей непрерывности (наилучших приближений). Дис. … канд. физ.-мат. наук. Одесса, 1990. 115 с.
17. *Аганин А. И.* О необходимых и достаточных условиях вложения классов Никольского из пространств Лоренца // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, № 4. С. 1225–1249.
18. *Харди Г. П., Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. М.: Гостехиздат, 1948.
19. *Потапов М. К., Бериша М.* Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного // Publ. Inst. Math. 1979. V. 26. P. 215–228.
20. *Ефимов А. В.* Линейные методы приближения некоторых классов непрерывных периодических функций // Мат. сб. 1961. Т. 54, № 1. С. 51–90.

Статья поступила 6 июня 2009 г.

Симонов Борис Витальевич
Волгоградский гос. технический университет,
факультет технологии пищевых производств, кафедра прикладной математики,
пр. Ленина, 28, Волгоград 400131
simonov-b2002@yandex.ru