Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 517.983+517.986

ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ ПРОЕКТОРОВ И ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СЛЕДА НА АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Получены новые необходимые и достаточные условия коммутирования проекторов в терминах операторных неравенств. Эти неравенства применены для характеризации следа на алгебрах фон Неймана в классе всех положительных нормальных функционалов. Получена характеризация следа на алгебрах фон Неймана в терминах коммутирования произведений проекторов под знаком веса.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, спектральная теорема, вес, след, нормальный функционал, линейный ограниченный оператор, проектор, операторное неравенство, перестановочность операторов.

Введение

Исследования по задачам характеризации следов в классе нормальных весов или функционалов на алгебрах фон Неймана начались в 70-е гг. XX в. Недавние продвижения в теории сингулярных следов на идеалах компактных операторов и важные приложения этой теории в некоммутативной геометрии привели к задачам характеризации следов в более широких классах весов на алгебрах фон Неймана.

Настоящая заметка является продолжением работ [1–4], обозначений и терминологии которых мы придерживаемся. В [2] доказано неулучшаемое (по числу сомножителей) утверждение: *если алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ не имеет прямого абелева слагаемого* (*соответственно собственно бесконечна*), *то каждый оператор $x \in \mathscr{M}$ представляется в виде конечной суммы $x = \sum x_k$, где каждое x_k есть произведение не более чем трех* (*соответственно двух*) *проекторов из $\mathscr{M}$*. В [3] дано второе доказательство этого факта с равномерной оценкой количества слагаемых в таких представлениях. Наименьшая верхняя граница, равная трем, связана с существованием нетривиального конечного следа на этих алгебрах.

В [4] получено новое условие коммутирования пары проекторов в терминах их верхней (нижней) грани в решетке всех проекторов алгебры и показано, что каждый косоэрмитов элемент собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathscr{M}$ представляется в виде конечной суммы коммутаторов проекторов из $\mathscr{M}$. В конечномерном случае в терминах конечных сумм коммутаторов проекторов описано множество операторов с нулевым каноническим следом tr.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193).

© 2010 Бикчентаев А. М.

В данной работе установлен новый критерий перестановочности проекторов в терминах операторного неравенства. Это неравенство и ряд других неравенств применены для характеризации следа в классе всех положительных нормальных функционалов на алгебре фон Неймана. Получен критерий попарной ортогональности набора проекторов в терминах одного операторного неравенства. Показано, что в отличие от подобных квазиподобные операторы не обязаны принадлежать одному и тому же идеалу.

Получена характеризация следа на алгебрах фон Неймана в терминах коммутирования произведений проекторов под знаком веса. Выдвинута гипотеза.

Часть результатов (без доказательств) анонсирована в кратком сообщении [5]. Сведения о других характеризациях следа можно почерпнуть в [6–10], см. также библиографию в них.

§ 1. Определения и обозначения

Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и e — тождественный оператор в $\mathscr{H}$. Через $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ обозначим $*$-алгебру всех линейных ограниченных операторов в $\mathscr{H}$, и пусть $\sigma(x)$ — спектр оператора $x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $|x| = (x^*x)^{1/2}$. *Коммутантом множества* $X \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется множество

$$X' = \{y \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) : xy = yx,\ x^*y = yx^*\ (x \in X)\}.$$

$*$-Подалгебра $\mathscr{M}$ алгебры $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется *алгеброй фон Неймана*, действующей в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, если $\mathscr{M} = \mathscr{M}''$. Если $X \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$, то X' — алгебра фон Неймана, а X'' — наименьшая алгебра фон Неймана, содержащая X. Для алгебры фон Неймана $\mathscr{M}$ операторов в $\mathscr{H}$ через $\mathscr{M}^{\mathrm{nor}}$, $\mathscr{M}^{\mathrm{h}}$, $\mathscr{M}^{\mathrm{u}}$, $\mathscr{M}^{+}$, $\mathscr{Z}(\mathscr{M})$ и $\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ обозначим ее нормальную, эрмитову, унитарную, положительную части, центр и решетку проекторов соответственно. Пусть $\mathscr{M}^{\mathrm{s}} = \mathscr{M}^{\mathrm{h}} \cap \mathscr{M}^{\mathrm{u}}$, $s_r(x)$ — правый носитель оператора $x \in \mathscr{M}$, т. е. проектор на $\overline{\mathrm{Ran}(x^*)}$. Если $x = u|x|$ — полярное разложение x, то $s_r(x) = u^*u$. Для $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ пишем $p \sim q$, если $p = u^*u$ и $q = uu^*$ с некоторым $u \in \mathscr{M}$, и пусть $p^{\perp} = e - p$. Если $\{p_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$, то $p = \bigwedge\limits_{i\in I} p_i \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ определяется равенством $p\mathscr{H} = \bigcap\limits_{i\in I} p_i\mathscr{H}$, а $\bigvee\limits_{i\in I} p_i = (\bigwedge\limits_{i\in I} p_i^{\perp})^{\perp}$ — проектор на $\overline{\mathrm{Lin} \bigcup\limits_{i\in I} p_i\mathscr{H}}$.

Весом на $\mathscr{M}$ называется отображение $\varphi : \mathscr{M}^{+} \to [0, +\infty]$ такое, что

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \quad x, y \in \mathscr{M}^{+},\ \lambda \geq 0,\ 0 \cdot \infty \equiv 0.$$

Вес φ на $\mathscr{M}$ называется *точным*, если $\varphi(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x \in \mathscr{M}^{+}$; *нормальным*, если $x_i \nearrow x$, $(x_i, x \in \mathscr{M}^{+}) \Longrightarrow \varphi(x) = \sup \varphi(x_i)$; *полуконечным*, если $\mathfrak{M}_{\varphi} = \mathrm{Lin}\{x \in \mathscr{M}^{+} : \varphi(x) < +\infty\}$ ультраслабо плотна в $\mathscr{M}$; *конечным*, если $\varphi(e) < +\infty$; *следом*, если $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$, $x \in \mathscr{M}$. Ограничение $\varphi|\{x \in \mathscr{M}^{+} : \varphi(x) < +\infty\}$ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathfrak{M}_{\varphi}$. Такое продолжение позволяет отождествлять конечные веса с положительными функционалами на $\mathscr{M}$. Пусть $\mathscr{M}_*^{+}$ — конус положительных нормальных функционалов на $\mathscr{M}$ и $f(t) = \sqrt{t(1-t)}$ для $0 \leq t \leq 1$.

§ 2. Новые свойства произведений проекторов

Предложение 2.1. *Для $p, q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ следующие условия эквивалентны:*
(i) $|p - q| \leq p + q$;
(ii) $pqp \leq q$;

(iii) $pq = qp$.

Доказательство. Эквивалентность $(i) \Longleftrightarrow$ (iii) установлена в [11, предложение 1].

Импликация (iii) $\Longrightarrow$ (ii) следует из функционального исчисления для C^*-алгебр.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Умножив неравенство (ii) с обеих сторон на $q^\perp$, имеем $0 = q^\perp pqpq^\perp = |qpq^\perp|^2$. Поэтому $qpq^\perp = 0$ и $qp = qpq = pq$. Предложение доказано. $\square$

Замечание 2.2. Пусть $\{p, q\} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$.

(i) Имеем

$$p + q \le e \Longleftrightarrow pq = qp = 0; \quad p + q \le e + p \wedge q \Longleftrightarrow pq = qp.$$

В обеих эквивалентностях оператор e можно заменить на $p \vee q$.

(ii) В эквивалентности $p \vee q \le p + q \Longleftrightarrow pq = qp$ импликация $\Longrightarrow$ следует из замечания: $r \equiv p \vee q - p \le q$, поэтому $r \le qr = rq$ и $pq = qp$ в силу равенства $p = p \vee q - r$.

(iii) Если $\mathscr{M}$ — алгебра фон Неймана и $p, q \in \mathscr{M}$, то $p \vee q \le p + sqs$ для некоторого $s \in \mathscr{M}^{\mathrm{s}}$. Действительно, существует $s \in \mathscr{M}^{\mathrm{s}}$ такой, что $p \vee q - p = s(q - p \wedge q)s$ [12, гл. 3, лемма 3.47]. Имеем $p \vee q = p + sqs - s(p \wedge q)s \le p + sqs$.

Теорема 2.3. *Пусть $\{p_k\}_{k=1}^n \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$, $n \ge 2$. Тогда*

$$p_k p_i = 0 \ (k, i = 1, \dots, n, \ k \ne i) \Longleftrightarrow a_n \equiv \left| \prod_{k=1}^{n} (e + p_k) \right| \le 2e.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{p_k\}_{k=1}^n \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ и $p_k p_i = 0$ при $k \ne i$, тогда

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} (e + p_k) = e + \sum_{k=1}^{n} p_k \le 2e.$$

Достаточность. Заметим, что

$$|x| \le \lambda e \Longleftrightarrow |x|^2 \le \lambda^2 e \quad (x \in \mathscr{B}(\mathscr{H}), \ \lambda \ge \|x\|).$$

Воспользуемся методом математической индукции. Для $n = 2$ имеем

$$\begin{aligned} a_2^2 &= (e + p_2)(e + p_1)^2(e + p_2) = (e + p_2)(e + 3p_1)(e + p_2) \\ &= e + 3(p_1 + p_2 + p_1p_2 + p_2p_1 + p_2p_1p_2) = e + 3(p_1 + p_2)^2 + 3p_2p_1p_2 \le 4e. \end{aligned}$$

Поскольку $p_2p_1p_2 \ge 0$, то $(p_1 + p_2)^2 \le e$, тем самым $p_1 + p_2 \le e$. Следовательно, $p_1p_2 = 0$.

Пусть утверждение теоремы верно для всех $n \le m - 1$ и выполнено неравенство

$$a_m^2 = (e + p_m)(e + p_{m-1}) \cdots (e + p_1)(e + p_1) \cdots (e + p_{m-1})(e + p_m) \le 4e,$$

т. е. $(e + p_m)a_{m-1}^2(e + p_m) \le 4e$. Умножив это неравенство с обеих сторон на $(e + p_m)^{-1}$, имеем $a_{m-1}^2 \le 4(e + p_m)^{-2} = 4(e + 3p_m)^{-1} \le 4e$.

По предположению индукции $\{p_k\}_{k=1}^{m-1}$ является набором попарно ортогональных проекторов. Теперь

$$\prod_{k=1}^{m-1} (e + p_k) = e + \sum_{k=1}^{m-1} p_k \equiv e + r, \quad r \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}},$$

поэтому
$$a_m^2 = (e + p_m)(e + r)^2(e + p_m) \le 4e$$
и $p_m r = 0$ в силу утверждения, установленного для $n = 2$. Осталось заметить, что $0 \le p_m p_k p_m \le p_m r p_m = 0$, тем самым $|p_k p_m|^2 = 0$ и $p_k p_m = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots, m - 1$. Теорема доказана. $\square$

Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$, $L^1(\mathscr{M}, \tau)$ — пространство τ-интегрируемых операторов [13, 14]. Если $\mathscr{M} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $\tau = \mathrm{tr}$, то $L^1(\mathscr{M}, \tau)$ совпадает с идеалом $\mathscr{S}_1$ ядерных операторов.

В 1993 г. А. Н. Шерстнев поставил следующий вопрос. Пусть $x, y \in \mathscr{M}^+$ и $xy \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$. Будет ли $x^{1/2} y x^{1/2}$ принадлежать $L^1(\mathscr{M}, \tau)$?

В [15] (см. также [16]) получен положительный ответ и построен пример таких $p, q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$, что $pqp \in \mathscr{S}_1$, но $pq \notin \mathscr{S}_1$. В [16] показано, что для всех идеалов J в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, отличных от идеалов конечномерных и компактных операторов ($\mathscr{H}$ сепарабельно и $\dim \mathscr{H} = \infty$), найдутся такие $p, q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$, что $pqp \in J$, но $pq \notin J$. Поэтому операторы pq и pqp не всегда подобны и циклическая перестановка проекторов в произведениях под знаком tr при $\dim \mathscr{H} = \infty$ (см. также [4]) в общем случае недопустима.

Напомним (см. [17; 18, гл. II, § 3]), что операторы a, b *квазиподобны*, если $ax = xb$ и $ya = by$ для некоторых $x, y \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ с $\mathrm{Ker}(x) = \mathrm{Ker}(y) = \{0\}$ и $\overline{\mathrm{Ran}(x)} = \overline{\mathrm{Ran}(y)} = \mathscr{H}$.

Предложение 2.4. *Для $p, q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ операторы pq и pqp квазиподобны, причем $\sigma(pq) = \sigma(pqp)$.*

Доказательство. Согласно [19] $p, q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ находятся в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ *в общем положении* (a generic position), если
$$p \wedge q = p \wedge q^{\perp} = p^{\perp} \wedge q = p^{\perp} \wedge q^{\perp} = 0.$$
В этом случае $\mathscr{H} = \mathscr{K} \oplus \mathscr{K}$ и
$$p = \begin{pmatrix} 1_{\mathscr{K}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} c^2 & sc \\ cs & s^2 \end{pmatrix}$$
для некоторых $s, c \in \mathscr{B}(\mathscr{K})^+$, $\mathrm{Ker}(s) = \mathrm{Ker}(c) = \{0\}$ и $s^2 + c^2 = 1_{\mathscr{K}}$. Для произвольных $p, q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ можем записать прямые суммы:
$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2 \oplus \mathscr{H}_3 \oplus \mathscr{H}_4 \oplus \mathscr{H}_5,$$
$$p = p_1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0, \quad q = q_1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0,$$
и p_1, q_1 находятся в общем положении в $\mathscr{H}_1$. Ясно, что проектор r на $\mathscr{H}_2 \oplus \mathscr{H}_3 \oplus \mathscr{H}_4 \oplus \mathscr{H}_5$ осуществляет квазиподобие частей операторов pqp и pq на этом подпространстве.

Далее без ограничения общности считаем, что p и q находятся в общем положении в $\mathscr{H}$. Положим
$$x = pq + p^{\perp}, \quad y = p + q^{\perp} p^{\perp}.$$
Как нетрудно видеть, $pqp \cdot x = x \cdot pq$, $y \cdot pqp = pq \cdot y$. Напомним, что $\overline{\mathrm{Ran}(v)} = \mathrm{Ker}(v^*)^{\perp}$ для $v \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Для завершения доказательства квазиподобия операторов pqp и pq осталось проверить, что $\mathrm{Ker}(x) = \mathrm{Ker}(x^*) = \mathrm{Ker}(y) = \mathrm{Ker}(y^*) = \{0\}$. Пусть, например, $\xi \in \mathrm{Ker}(x)$. Тогда
$$pq\xi + p^{\perp}\xi = 0 \Rightarrow pq\xi = p^{\perp}\xi = 0 \Rightarrow \xi \in p\mathscr{H}, \quad q\xi \in (p^{\perp} \wedge q)\mathscr{H} = \{0\}$$
$$\Rightarrow \xi \in (p \wedge q^{\perp})\mathscr{H} \Rightarrow \xi = 0.$$

Пусть теперь $\xi \in \mathrm{Ker}(x^*)$. Тогда

$$qp\xi + p^\perp\xi = 0 \Rightarrow qp\xi = p^\perp\xi = 0 \text{ (так как } p^\perp \wedge q = 0)$$
$$\Rightarrow \xi \in p\mathscr{H},\ \xi = p\xi \in q^\perp\mathscr{H} \Rightarrow \xi \in (p \wedge q^\perp)\mathscr{H} \Rightarrow \xi = 0.$$

Аналогично проверяются равенства $\mathrm{Ker}(y) = \mathrm{Ker}(y^*) = \{0\}$. Стало быть, операторы pq и pqp квазиподобны.

Поскольку $\sigma(tz) \cup \{0\} = \sigma(zt) \cup \{0\}$ для всех $t, z \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, для $t = pq$ и $z = p$ получаем $\sigma(pqp) \cup \{0\} = \sigma(pq) \cup \{0\}$. Имеем

$$0 \notin \sigma(pq) \Longleftrightarrow p = q = e \Longleftrightarrow 0 \notin \sigma(pqp).$$

Предложение доказано. □

Итак, в отличие от подобных *квазиподобные элементы не обязаны принадлежать одному и тому же идеалу.*

§ 3. Характеризация следа на алгебрах фон Неймана

Вес φ на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$ является следом тогда и только тогда, когда $\varphi(x^{1/2}px^{1/2}) = \varphi(pxp)$ для всех $x \in \mathscr{M}^+$ и $p \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ [15, 20]. В частности, φ — след, если $\varphi(x^{1/2}yx^{1/2}) = \varphi(y^{1/2}xy^{1/2})$ для всех $x, y \in \mathscr{M}^+$. По теореме Фуглида — Путнама — Розенблюма (см. [21, теорема 12.16]) для $a, b \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{nor}}$ и $c \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ равенство $ac = cb$ влечет $a^*c = cb^*$. Пусть $x, y \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^+$ и $a = x^{1/2}y^{1/2}, b = y^{1/2}x^{1/2} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{nor}}$. Для $c = x^{1/2}$ имеем $ac = cb$, поэтому $x^{1/2}yx^{1/2} = y^{1/2}xy^{1/2}$ тогда и только тогда, когда $xy = yx$. В частности, если $(y =)p \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ и $x^{1/2}px^{1/2} = pxp$, то $xp = px$.

Теорема 3.1 [15, 20]. *Пусть вес φ на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$ удовлетворяет условию*

$$x_nx = xx_n,\ x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x,\ x_n \nearrow x \Longrightarrow \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n),\ x_n, x \in \mathscr{M}^+. \qquad (1)$$

Тогда φ — след $\Longleftrightarrow \varphi(pqp) = \varphi(qpq)$ для всех $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$.

Теорема 3.1 нашла приложения в теории расщепляющих подпространств [22]. Полунепрерывные снизу по норме веса удовлетворяют условию (1); таковы, в частности, нормальные или конечные веса. Для $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ три равенства $pqp = qpq$, $s_r(pqp) = s_r(qpq)$ и $pq = qp$ попарно эквивалентны [4, теорема 4.5].

Теорема 3.2. *Вес φ на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$ является следом тогда и только тогда, когда $\varphi((pqr)^*(pqr)) = \varphi((pqr)(pqr)^*)$ для всех $p, q, r \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$.*

Достаточность проверим в 3 этапа.

Шаг 1. В теореме 1.4.2 из [23] доказано, что вес φ на $\mathscr{M}$ является следом тогда и только тогда, когда $\varphi(sxs) = \varphi(x)$ для всех $x \in \mathscr{M}^+$ и $s \in \mathscr{M}^{\mathrm{s}}$. Покажем, что $\varphi(pqp) = \varphi(spqps)$ для $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ и $s \in \mathscr{M}^{\mathrm{s}}$. Если $s = 2r - e$, то $e - s = 2r^\perp$, $e + s = 2r$. Положим $y = pqp$, тогда

$$2\varphi(y + sys) = \varphi((e - s)y(e - s) + (e + s)y(e + s))$$
$$= 4\varphi(ryr) + 4\varphi(r^\perp yr^\perp) = 4\varphi(rpq \cdot (rpq)^*) + 4\varphi(r^\perp pq \cdot (r^\perp pq)^*)$$
$$= 4\varphi(qprpq) + 4\varphi(qpr^\perp pq) = 4\varphi(qpq) = 4\varphi(pqp) = 4\varphi(y).$$

Если $\varphi(y) < +\infty$ или $\varphi(y) = \varphi(sys) = +\infty$, то проверка завершается. Если $\varphi(sys) < \varphi(y) = +\infty$, то, повторяя рассуждения для $x = sys$ и $sxs(= y)$, имеем $+\infty = \varphi(y + sys) = \varphi(x + sxs) = 2\varphi(x) < +\infty$; противоречие.

Шаг 2. Если проекторы p, q из C^*-алгебры $\mathscr{A}$ ортогональны и $p \sim q$, то C^*-алгебра $(p+q)\mathscr{A}(p+q)$ $*$-изоморфна $\mathbb{M}_2(p\mathscr{A}p)$ [24, предложение 5.3.1]. В частности, если алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ не имеет прямых слагаемых типа $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$ и $p \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$, $p \sim p^\perp$, то $\mathscr{M} \simeq \mathbb{M}_2(p\mathscr{M}p)$.

Пусть $\delta \in \mathbb{C}$, $|\delta| = 1$, $0 \le t \le 1$. Определим проектор $r^{(\delta,t)}$ в $\mathbb{M}_2(\mathscr{M})$, положив

$$r^{(\delta,t)} = \begin{pmatrix} t \cdot e & \delta f(t) \cdot e \\ \bar{\delta} f(t) \cdot e & (1-t) \cdot e \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Если $x \in \mathscr{M}^+$, то существует такой $u \in \mathbb{M}_2(p\mathscr{M}p)^{\mathrm{u}}$, что $u \cdot x \cdot u^* = \mathrm{diag}(a,b)$ [25, теорема 3.20]. Пусть $\|x\| \le 1$, $p = \mathrm{diag}(1,0)$. Определим проекторы $r^{(1,a)}$ и $r^{(1,1-b)}$ операторными 2×2-матрицами по формуле (2). Тогда $uxu^* = pr^{(1,a)}p + p^\perp r^{(1,1-b)}p^\perp$, поэтому

$$x = u^*pu \cdot u^*r^{(1,a)}u \cdot u^*pu + u^*p^\perp u \cdot u^*r^{(1,1-b)}u \cdot u^*p^\perp u$$

и для $s \in \mathscr{M}^{\mathrm{s}}$ имеем $\varphi(sxs) = \varphi(x)$ в силу шага 1.

Шаг 3. В силу структурной теории алгебр фон Неймана (см. [26, гл. V]) остается рассмотреть случай алгебр фон Неймана типа I_n $(n = 2, 3, \dots)$. Хорошо известно, что алгебра $\mathscr{M}$ типа I_n $*$-изоморфна матричной алгебре $\mathbb{M}_n(C(\Omega))$, где $C(\Omega)$ — алгебра всех комплекснозначных непрерывных функций на стоуновском пространстве Ω всех характеров алгебры $\mathscr{Z}(\mathscr{M})$.

Лемма 3.3 [27, следствие 3.3]. *Для каждого $x \in \mathbb{M}_n(C(\Omega))^{\mathrm{sa}}$ существует такой $u \in \mathbb{M}_n(C(\Omega))^{\mathrm{u}}$, что матрица $u^*xu(\omega)$ диагональна для всех $\omega \in \Omega$.*

Пусть $a \in \mathscr{M}^+$, $\|a\| \le 1$ и $u \in \mathscr{M}^{\mathrm{u}}$ такой, что

$$u^*au(\omega) = \mathrm{diag}(a_1(\omega), a_2(\omega), \dots, a_n(\omega)), \quad \omega \in \Omega$$

(см. лемму 3.3). Тогда $0 \le a_k(\omega) \le 1$ для всех $k = \overline{1,n}$ и $\omega \in \Omega$. Пусть

$$q_n = \mathrm{diag}(\underbrace{0,\dots,0}_{n-2 \text{ раз}}, r^{(1,1-a_n(\omega))}), \quad q_k = \mathrm{diag}(\underbrace{0,\dots,0}_{k-1 \text{ раз}}, r^{(1,a_k(\omega))}, \underbrace{0,\dots,0}_{n-k-1 \text{ раз}})$$

для $k = \overline{1,n-1}$. Тогда $e_{kk}, q_k \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$, $k = \overline{1,n}$, и $u^*au = \sum\limits_{k=1}^n e_{kk}q_ke_{kk}$. Если $s \in \mathscr{M}^{\mathrm{s}}$, то

$$\varphi(sas) = \sum_{k=1}^n \varphi(sue_{kk}q_ke_{kk}u^*s) = \sum_{k=1}^n \varphi(s \cdot ue_{kk}u^*\, uq_ku^*\, ue_{kk}u^* \cdot s)$$
$$= \sum_{k=1}^n \varphi(ue_{kk}u^*\, uq_ku^*\, ue_{kk}u^*) = \sum_{k=1}^n \varphi(ue_{kk}q_ke_{kk}u^*) = \varphi(a)$$

в силу шага 1, что доказывает теорему 3.2. $\square$

Гипотеза 1. *Вес φ на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$ является следом тогда и только тогда, когда $\varphi(pqp) = \varphi(qpq)$ для всех $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$.*

Теорема 3.4. *Для функционала $\varphi \in \mathscr{M}_*^+$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\varphi(pqp) = \varphi(qpq)$ для всех $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$;*
(ii) *$\varphi(s_r(pqp)) = \varphi(s_r(qpq))$ для всех $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$;*
(iii) *$\varphi(p+q) \le \varphi(e + p \wedge q)$ для всех $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$;*

(iv) $\varphi(pqp) \le \varphi(q)$ *для всех* $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$;
(v) $\varphi(|p-q|) \le \varphi(p+q)$ *для всех* $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$;
(vi) φ *является следом.*

Доказательство. Эквивалентность (i) $\Longleftrightarrow$ (vi) следует из теоремы 3.1 и подтверждает гипотезу 1 для конечного нормального веса φ.

(vi) $\Longrightarrow$ (ii). Если $x \in \mathscr{M}$, то $s_r(x) \sim s_r(x^*)$ [26, гл. V, предложение 1.5]. Поэтому $s_r(pqp) = s_r(qp) \sim s_r(pq) = s_r(qpq)$.

(vi) $\Longrightarrow$ (iii). Поскольку $q - p \wedge q \sim p \vee q - p$ [26, гл. V, предложение 1.6], имеем $\varphi(q - p \wedge q) = \varphi(p \vee q - p) \le \varphi(e - p)$, т. е. $\varphi(q) - \varphi(p \wedge q) \le \varphi(e) - \varphi(p)$, что и требовалось.

(vi) $\Longrightarrow$ (iv). Имеем $qpq \le q$ и

$$\varphi(pqp) = \varphi((qp)^* \cdot qp) = \varphi(qp \cdot (qp)^*) = \varphi(qpq) \le \varphi(q).$$

(vi) $\Longrightarrow$ (v). Существуют частичные изометрии $u, v \in \mathscr{M}$ такие, что $|p-q| \le upu^* + vqv^*$ (см. [28]). Имеем

$$\begin{aligned}\varphi(|p-q|) &\le \varphi(upu^*) + \varphi(vqv^*) = \varphi((pu^*)^* pu^*) + \varphi((qv^*)^* qv^*) \\ &= \varphi(pu^*up) + \varphi(qv^*vq) \le \varphi(p) + \varphi(q).\end{aligned}$$

Ниже показывается, что аналогично тому, как было проделано в ряде других подобных случаев (см. [6] или [8]), доказательство обратных импликаций для произвольной алгебры фон Неймана сводится к случаю алгебры $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

Известно [6], что $\varphi \in \mathscr{M}_*^+$ является следом тогда и только тогда, когда $\varphi(p) = \varphi(q)$ для всех $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ с $pq = 0$ и $p \sim q$ (см. также [8, лемма 2]). Пусть *-алгебра $\mathscr{N}$ в редуцированной алгебре $(p+q)\mathscr{M}(p+q)$ порождена частичной изометрией $v \in \mathscr{M}$, реализующей эквивалентность p и q. Тогда $\mathscr{N}$ *-изоморфна $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, а равенство в (ii) и неравенства в (iii), (iv) и (v) остаются справедливыми для операторов из $\mathscr{N}$ и ограничения функционала $\varphi|\mathscr{N}$. Мы покажем, что такое ограничение является следовым функционалом на $\mathscr{N}$, поэтому $\varphi(p) = \varphi(q)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (vi). Пусть p, q – одномерные проекторы из $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

Случай I: $pq \ne 0$. Тогда $b = \|pqp\| = \|qpq\| > 0$ и $pqp = bp$, $qpq = bq$, т. е. $s_r(pqp) = p$, $s_r(qpq) = q$. Имеем

$$\varphi(p) = \varphi(s_r(pqp)) = \varphi(s_r(qpq)) = \varphi(q).$$

Случай II: $pq = 0$. Можем считать, что $p = \mathrm{diag}(1,0)$, $q = \mathrm{diag}(0,1)$. Для $r = r^{(1,1/2)}$ (см. (2)) имеем $p = 2prp$, $q = 2qrq$, $r = 2rpr = 2rqr$. Следовательно,

$$\varphi(p) = \varphi(s_r(prp)) = \varphi(s_r(rpr)) = \varphi(r) = \varphi(s_r(rqr)) = \varphi(s_r(qrq)) = \varphi(q),$$

что и требовалось.

Пусть функционал φ задается оператором плотности $s_\varphi = \mathrm{diag}(1/2+s, 1/2-s)$, $0 \le s \le 1/2$, т. е. $\varphi(x) = \mathrm{tr}(xs_\varphi)$, $x \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

(iii) $\Longrightarrow$ (vi). Пусть $p = \mathrm{diag}(1,0)$, $q = r^{(1,t)}$ $(0 \le t \le 1)$. Тогда $p \wedge q = 0$ и $\varphi(p+q) = 1 + 2st \le 1 = \varphi(e)$ для всех $0 \le t \le 1$ только лишь при $s = 0$.

(iv) $\Longrightarrow$ (vi). Пусть $p = r^{(1,1/2+t)}$, $q = r^{(1,1/2-t)}$ $(0 < t \le 1/2)$. Тогда $pqp = (1-4t^2)p$ и $\varphi(q) = 1 - 2st$,

$$\varphi(pqp) = (1-4t^2)\varphi(p) = 1 + 2st - 4t^2 - 8st^3.$$

Имеем

$$\varphi(pqp) \le \varphi(q) \Longleftrightarrow h(t) \equiv s - t - 2st^2 \le 0,$$

однако $h(t) > 0$ при $t < s/2$.

(v) $\Longrightarrow$ (vi). Пусть $p = r^{(1,t)}$, $q = r^{(-1,t)}$ $(0 \le t \le 1)$. Тогда $|p-q|^2 = \operatorname{diag}(4t-4t^2, 4t-4t^2)$ и $|p-q| = \operatorname{diag}(2f(t), 2f(t))$. Имеем $\varphi(|p-q|) = 2f(t)$, $\varphi(p+q) = 1-2s+4st$. Проверим, что неравенство $2f(t) \le 1-2s+4st$ выполнено для всех $0 \le t \le 1$ только при $s = 0$. Оно выполнено при всех $1/2 \le t \le 1$ (где $s \in [0, 1/2]$), а для $t \in [0, 1/2)$ это неравенство равносильно неравенству

$$2s \le \frac{1-2f(t)}{1-2t},$$

и требуемое следует из равенства

$$\lim_{t \to 0.5-} \frac{1-2f(t)}{1-2t} = 0.$$

Теорема 3.4 доказана. $\square$

Автор выражает свою признательность О. Е. Тихонову за полезные обсуждения. Автор благодарит рецензента за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бикчентаев А. М.* О представлении линейных операторов в гильбертовом пространстве в виде конечных сумм произведений проекторов // Докл. РАН. 2003. Т. 393, № 4. С. 444–447.
2. *Бикчентаев А. М.* О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 32–45.
3. *Bikchentaev A. M.* Representation of elements of von Neumann algebras in the form of finite sums of products of projections. II // Theta Series in Advanced Mathematics. V. 6. Proc. Inter. Conf. Operator Theory'20. Bucharest: Theta Foundation, 2006. P. 15–23.
4. *Бикчентаев А. М.* О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов. III. Коммутаторы в C^*-алгебрах // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 4. С. 3–20.
5. *Бикчентаев А. М.* Перестановочность проекторов и характеризация следа на алгебрах фон Неймана. I // Изв. вузов. Математика. 2009. № 12. С. 80–83.
6. *Gardner L. T.* An inequality characterizes the trace // Canad. J. Math. 1979. V. 31, N 6. P. 1322–1328.
7. *Столяров А. И., Тихонов О. Е., Шерстнев А. Н.* Характеризация нормальных следов на алгебрах фон Неймана неравенствами для модуля // Мат. заметки. 2002. Т. 72, № 3. С. 448–454.
8. *Tikhonov O. E.* Subadditivity inequalities in von Neumann algebras and characterization of tracial functionals // Positivity. 2005. V. 9, N 2. P. 259–264.
9. *Bikchentaev A. M., Tikhonov O. E.* Characterization of the trace by Young's inequality // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2005. V. 6, N 2. Article 49. 4 p.
10. *Bikchentaev A. M., Tikhonov O. E.* Characterization of the trace by monotonicity inequalities // Linear Algebra Appl. 2007. V. 422, N 2. P. 274–278.
11. *Topping D. M.* Vector lattices of self-adjoint operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 115, N 1. P. 14–30.
12. *Alfsen E. M., Shultz F. W.* Geometry of state spaces of operator algebras. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2003.
13. *Segal I. E.* A non-commutative extension of abstract integration // Ann. Math. 1953. V. 57, N 3. P. 401–457.
14. *Шерстнев А. Н.* Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. М.: Физматлит, 2008.
15. *Бикчентаев А. М.* Об одном свойстве L^p-пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 2. С. 185–190.
16. *Bikchentaev A.* Majorization for products of measurable operators // Inter. J. Theor. Phys. 1998. V. 37, N 1. P. 571–576.
17. *Hoover T. B.* Quasi-similarity of operators // Illinois J. Math. 1972. V. 16, N 4. P. 678–686.

18. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
19. *Halmos P. R.* Two subspaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 144. P. 381–389.
20. *Бикчентаев А. М.* Характеризация следов в некоторых классах весов на алгебре фон Неймана // Теория функций и ее приложения. Казань: Казанск. фонд Математика, 1995. С. 8–9.
21. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
22. *Sherstnev A. N., Turilova E. A.* Classes of subspaces affiliated with a von Neumann algebra // Russian J. Math. Phys. 1999. V. 6, N 4. P. 426–434.
23. *Аюпов Ш. А.* Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент: ФАН, 1986.
24. *Wegge-Olsen N. E.* K-theory and C^*-algebras. A friendly approach. New York: The Clarendon Press; Oxford Univ. Press, 1993. (Oxford Sci. Publ.).
25. *Kadison R. V.* Diagonalizing matrices // Amer. J. Math. 1984. V. 106, N 6. P. 1451–1468.
26. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1979. V. I.
27. *Deckard D., Pearcy C.* On matrices over ring of continuous complex valued functions on a Stonian space // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V. 14, N 2. P. 322–328.
28. *Akemann C. A., Anderson J., Pedersen G. K.* Triangle inequalities in operator algebras // Linear Multilinear Algebra. 1982. V. 11, N 2. P. 167–178.

Статья поступила 3 июня 2009 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович
НИИ математики и механики
Казанского (Приволжского) федерального университета,
ул. Университетская, 17, Казань 420008
Airat.Bikchentaev@ksu.ru