Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 515.162

ХИРУРГИИ ДЕНА НА УЗЛЕ ВОСЬМЕРКА: ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ

Е. А. Фоминых

Аннотация. Построена верхняя оценка $\omega(p/q)$ сложности многообразий, получаемых p/q-хирургиями на узле восьмерка. Оказалось, что если $\omega(p/q) \le 12$, то оценка точна.

Ключевые слова: хирургия Дена, узел восьмерка, верхняя оценка сложности.

Введение

В [1] введено понятие сложности $c(M)$ компактного трехмерного многообразия M, которая определяется как минимальное возможное число истинных вершин почти простого спайна многообразия. Если M замкнуто, неприводимо и $c(M) > 0$, то $c(M)$ совпадает с минимальным числом тетраэдров, необходимых для склейки этого многообразия. Проблема вычисления сложности $c(M)$ весьма трудна. В настоящее время точные значения сложности известны только для нескольких бесконечных серий неприводимых гранично неприводимых многообразий [2–4]. Кроме того, эта проблема решена для всех замкнутых ориентируемых неприводимых многообразий до сложности 12 (см. [5]). Отметим, что построенная в [5] таблица содержит 36833 многообразий и доступна только в электронном виде [6].

Задача нахождения верхней оценки сложности многообразия M решается относительно легко. Для этого достаточно построить какой-нибудь простой спайн многообразия M, число истинных вершин которого и оценивает сложность сверху. Известно [7, п. 2.1.2], что простой спайн строится исходя из практически любого задания многообразия. Довольно большой объем таблицы [6] порождает новую задачу нахождения потенциально точных верхних оценок сложности, т. е. верхних оценок, которые дают точное значение сложности для всех табличных многообразий. Важный результат в этом направлении был получен Мартелли и Петронио [8]. Они построили потенциально точную оценку сложности для всех замкнутых ориентируемых многообразий Зейферта. Подобные результаты для нескольких бесконечных серий граф-многообразий приведены в [9, 10].

В [8] построена верхняя оценка $h(r/s, t/u, v/w)$ сложности гиперболических многообразий, получаемых хирургиями на трехкомпонентном зацеплении 6^3_1 (в обозначениях Рольфсена [11]) с рациональными параметрами $(r/s, t/u, v/w)$. Оказалась, что оценка не точна для большого числа многообразий. Приведем

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–91056–НЦНИ) и Программы, выполняемой совместно Институтом математики и механики УрО РАН и Институтом математики СО РАН.

два примера. Во-первых, значение функции h равно 10 только для 13 из 24 многообразий сложности 10, получаемых хирургиями на зацеплении 6_1^3 (см. [8]). Во-вторых, проведенный автором анализ таблицы [6] показал, что оценка не точна для 44 из 46 гиперболических многообразий вида $6_1^3(1, 2, v/w)$, сложность которых не превосходит 12. Обозначим через $4_1(p/q)$ замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие, полученное p/q-хирургией на узле восьмерка 4_1. Поскольку многообразия $4_1(p/q)$ и $6_1^3(1, 2, p/q + 1)$ гомеоморфны, задача построения потенциально точной верхней оценки сложности таких многообразий актуальна.

Следующая теорема представляет основной результат статьи. Для ее формулировки нам потребуется ввести функцию $\omega(p/q)$, определенную на множестве неотрицательных рациональных чисел и принимающую натуральные значения. Пусть $p \geq 0$, $q \geq 1$ — взаимно простые целые числа, $[p/q]$ — целая часть числа p/q и $\mathrm{rem}(p, q)$ — остаток от деления p на q. Следуя [7], обозначим через $S(p, q)$ сумму всех неполных частных в разложении числа p/q в непрерывную дробь. Определим значение $\omega(p/q)$ по правилу

$$\omega(p/q) = a(p/q) + \max\{[p/q] - 3, 0\} + S(\mathrm{rem}(p, q), q),$$

где

$$a(p/q) = \begin{cases} 6, & \text{если } p/q = 4, \\ 7, & \text{если } p/q \in \mathbb{Z} \text{ и } p/q \neq 4, \\ 8, & \text{если } p/q \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Теорема. *Для любых взаимно простых целых чисел $p \geq 0$ и $q \geq 1$ справедливо неравенство $c(4_1(p/q)) \leq \omega(p/q)$. Более того, если $\omega(p/q) \leq 12$, то $c(4_1(p/q)) = \omega(p/q)$.*

Отметим, что накладываемые в условии теоремы ограничения $p \geq 0$ и $q \geq 1$ несущественны, поскольку узел 4_1 эквивалентен своему зеркальному образу, что влечет гомеоморфность многообразий $4_1(-p/q)$ и $4_1(p/q)$.

1. Предварительные сведения

В этом разделе напомним известные определения и факты, которые будут использованы в работе.

1.1. Тэта-кривые на торе. *Тэта-кривой* $\theta \subset T$ на двумерном торе T будем называть граф, гомеоморфный окружности с диаметром, дополнение $T \setminus \theta$ к которому есть открытый диск. Хорошо известно [8, 12], что произвольную тэта-кривую на торе можно преобразовать в любую другую тэта-кривую при помощи изотопии и так называемых флип-преобразований (рис. 1). Введем на множестве $\Theta(T)$ всех тэта-кривых на T функцию расстояния d, полагая, что для данных тэта-кривых $\theta, \theta' \in \Theta(T)$ число $d(\theta, \theta')$ равно наименьшему числу флип-преобразований, необходимых для перехода от θ к θ'.

Для вычисления расстояния между тэта-кривыми на торе воспользуемся классической идеальной триангуляцией Фарея $\mathbb{F}$ гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$. В качестве модели плоскости $\mathbb{H}^2$ рассмотрим верхнюю полуплоскость комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченную окружностью $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Множество вершин триангуляции $\mathbb{F}$ состоит из точек $\mathbb{Q} \cup \{1/0\} \subset \partial\mathbb{H}^2$, где $1/0 = \infty$. При этом две вершины a/c, b/d соединены ребром (геодезической в $\mathbb{H}^2$) тогда и только тогда, когда $ad - bc = \pm 1$. На рис. 2 приведен образ гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ и триангуляции $\mathbb{F}$ при отображении $z \to (z - i)/(z + i)$.

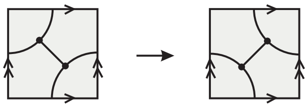


Рис. 1. Флип-преобразование.

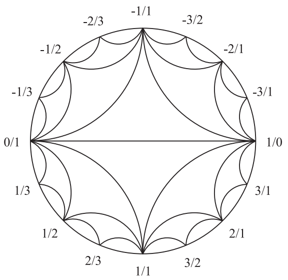


Рис. 2. Идеальная триангуляция гиперболической плоскости.

Фиксируем произвольную систему координат (μ, λ) на торе T. Построим отображение $\Psi_{\mu,\lambda}$ множества $\Theta(T)$ на множество всех треугольников триангуляции $\mathbb{F}$. Для этого рассмотрим отображение $\psi_{\mu,\lambda}$, которое каждой нетривиальной простой замкнутой кривой $\mu^\alpha\lambda^\beta$ на T сопоставляет точку $\alpha/\beta \in \partial\mathbb{H}^2$. Заметим, что любая тэта-кривая θ на T содержит три нетривиальные простые замкнутые кривые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, каждая из которых состоит из двух ребер тэта-кривой θ. Так как индекс пересечения любых двух кривых ℓ_i, ℓ_j, $i \neq j$, равен ± 1, то точки $\psi_{\mu,\lambda}(\ell_1)$, $\psi_{\mu,\lambda}(\ell_2)$, $\psi_{\mu,\lambda}(\ell_3)$ являются вершинами некоторого треугольника $\triangle$ триангуляции Фарея. Итак, мы полагаем $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta) = \triangle$.

Обозначим через Σ двойственный граф триангуляции $\mathbb{F}$. Он является деревом, поскольку триангуляция идеальная. Определим расстояние между произвольными двумя треугольниками триангуляции Фарея как число ребер единственного простого пути в Σ, соединяющего соответствующие вершины двойственного графа. Ключевое для практических вычислений наблюдение заключается в том, что при любом выборе системы координат (μ, λ) на торе T расстояние между тэта-кривыми θ, θ' равно расстоянию между треугольниками $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta)$, $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta')$ триангуляции $\mathbb{F}$. Это следует из того, что если тэта-кривая θ' получается из тэта-кривой θ одним флип-преобразованием, то треугольники $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta)$, $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta')$ имеют общее ребро.

1.2. Простые и специальные спайны. Следуя [7], компактный полиэдр P будем называть *простым*, если линк каждой точки $x \in P$ гомеоморфен одному из следующих одномерных полиэдров:

(a) окружности (такая точка x называется *неособой*);
(b) окружности с диаметром (такая точка x называется *тройной точкой*);
(c) окружности с тремя радиусами (такая точка x называется *истинной вершиной*).

Компоненты связности объединения всех неособых точек и объединения всех тройных точек называются соответственно 2-*компонентами* и *тройными линиями* полиэдра P. Простой полиэдр называется *специальным*, если каждая его тройная линия является открытой 1-клеткой, а каждая его 2-компонента — открытой 2-клеткой.

Подполиэдр P трехмерного многообразия M называется его *спайном*, если либо $\partial M \neq \varnothing$ и многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно $\partial M \times (0, 1]$, либо $\partial M = \varnothing$ и многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно открытому шару. Спайн многообразия называется *простым* или *специальным*, если он является простым или специальным полиэдром соответственно.

1.3. Относительные спайны. Следуя Йогансону [13], *многообразием с граничным узором* будем называть произвольное компактное трехмерное многообразие, на крае которого выбран граф $\Gamma \subset \partial M$ без изолированных вершин. Многообразие M с граничным узором Γ удобно трактовать как пару (M, Γ).

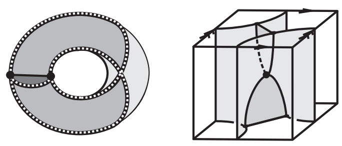
Случай $\Gamma = \varnothing$ также допускается.

Определение. Пусть (M, Γ) — многообразие с граничным узором. Подполиэдр $P \subset M$ называется *относительным спайном многообразия* (M, Γ), если выполнены три условия:

(1) $M \setminus P$ есть открытый шар;
(2) $\partial M \subset P$;
(3) $\partial M \cap Cl(P \setminus \partial M) = \Gamma$.

Относительный спайн P называется *простым*, если P является простым полиэдром. Очевидно, что если многообразие M замкнуто, то любой относительный спайн многообразия $(M, \varnothing)$ является спайном многообразия M.

Приведем два примера простых относительных спайнов полнотория и прямого произведения тора на отрезок, с помощью которых в [14] был разработан общий метод построения простых спайнов граф-многообразий.



(a) (b)

Рис. 3. Примеры простых относительных спайнов.

Пример 1. Пусть V — полноторие с фиксированным меридианом m. Выберем простую замкнутую кривую ℓ на ∂V, дважды пересекающую m в одном и том же направлении. Заметим, что ℓ разбивает m на две дуги. Рассмотрим тэта-кривую $\theta_V \subset \partial V$, состоящую из кривой ℓ и одной из дуг (обозначим ее через γ) меридиана m. Тогда многообразие (V, θ_V) имеет простой относительный спайн без внутренних истинных вершин. Этот спайн получается объединением края ∂V, вложенным в полноторие V листом Мёбиуса и частью меридионального диска, ограниченного дугой γ (рис. 3(a)).

Заметим, что ни одна из трех нетривиальных простых замкнутых кривых, лежащих в тэта-кривой θ_V, не изотопна меридиану m полнотория V. С другой стороны, если к θ_V применить флип-преобразование вдоль дуги γ, то получим тэта-кривую $\theta_m \subset \partial V$, содержащую меридиан m.

Пример 2. Пусть θ, θ' — тэта-кривые на торе T такие, что θ' получается из θ одним флип-преобразованием. Тогда многообразие

$$(T \times [0,1], (\theta \times \{0\}) \cup (\theta' \times \{1\}))$$

имеет простой относительный спайн R с одной внутренней истинной вершиной (на рис. 3(b) тор T представлен в виде квадрата с отождествленными сторонами). Заметим, что R удовлетворяет следующим условиям:

(1) для каждого $t \in [0, 1/2)$ тэта-кривая θ_t, где $R \cap (T \times \{t\}) = \theta_t \times \{t\}$, изотопна θ;
(2) для каждого $t \in (1/2, 1]$ тэта-кривая θ_t изотопна θ';
(3) $R \cap (T \times \{1/2\})$ есть букет двух окружностей.

1.4. Сборка многообразий с граничными узорами. Обозначим через $\mathscr{T}$ класс всех таких многообразий (M, Γ), у которых каждая компонента T края ∂M является двумерным тором, а $T \cap \Gamma$ — тэта-кривая. Пусть (M, Γ) и (M', Γ') — два многообразия из множества $\mathscr{T}$ с непустыми краями. Выберем два тора $T \subseteq \partial M$, $T' \subseteq \partial M'$ и гомеоморфизм $\varphi : T \to T'$, переводящий тэта-кривую $\theta = T \cap \Gamma$ в тэта-кривую $\theta' = T' \cap \Gamma'$. Тогда можно построить новое многообразие

$(W, \Xi) \in \mathscr{T}$, где $W = M \cup_\varphi M'$ и $\Xi = (\Gamma \setminus \theta) \cup (\Gamma' \setminus \theta')$, получающееся сборкой многообразий (M, Γ) и (M', Γ') [15].

Заметим, что если многообразия (M, Γ) и (M', Γ') имеют простые относительные спайны P и P' соответственно с v и v' внутренними истинными вершинами, то многообразие (W, Ξ) имеет простой относительный спайн R с $v + v'$ внутренними истинными вершинами. Действительно, спайн R получается склейкой спайнов P и P' при помощи гомеоморфизма φ и удалением из объединения $P \cup_\varphi P'$ открытого диска, являющегося отождествлением диска $T \setminus \theta$ с диском $T' \setminus \theta'$.

Для доказательства теоремы обобщим понятие сборки многообразий, убрав ограничение $\varphi(\theta) = \theta'$.

Лемма. *Пусть (M, Γ) и (M', Γ') — два многообразия из множества $\mathscr{T}$ с непустыми краями, имеющие простые относительные спайны с v и v' внутренними истинными вершинами. Тогда для любого гомеоморфизма $\varphi : T \to T'$ тора $T \subseteq \partial M$ на тор $T' \subseteq \partial M'$ многообразие (W, Υ), где $W = M \cup_\varphi M'$ и $\Upsilon = (\Gamma \setminus \theta) \cup (\Gamma' \setminus \theta')$, имеет простой относительный спайн с $v + v' + d(\varphi(\theta), \theta')$ внутренними истинными вершинами.*

Доказательство. Сначала индукцией по $n = d(\varphi(\theta), \theta')$ построим простой относительный спайн многообразия

$$(M'', \Gamma'') = (T' \times [0, 1], (\varphi(\theta) \times \{0\}) \cup (\theta' \times \{1\}))$$

с n внутренними истинными вершинами. Если $n = 0$, т. е. тэта-кривые $\varphi(\theta)$ и θ' изотопны, то искомый спайн изотопен полиэдру $(\varphi(\theta) \times [0, 1]) \cup \partial M''$. Пусть $n > 0$. Тогда, как уже отмечалось ранее, существует такая последовательность $\{\theta_i\}_{i=0}^n$ попарно различных тэта-кривых на торе T', что $\theta_0 = \varphi(\theta)$, $\theta_n = \theta'$ и для каждого $i = 1 \dots n$ тэта-кривая θ_i получается из тэта-кривой θ_{i-1} одним флип-преобразованием. По предположению индукции многообразие

$$(T' \times [0, 1/2], (\theta_0 \times \{0\}) \cup (\theta_{n-1} \times \{1/2\})) \tag{1}$$

имеет простой относительный спайн с $n-1$ внутренними истинными вершинами. Простой относительный спайн многообразия

$$(T' \times [1/2, 1], (\theta_{n-1} \times \{1/2\}) \cup (\theta_n \times \{1\})) \tag{2}$$

с одной внутренней истинной вершиной описан в примере 2. Тогда искомый спайн многообразия (M'', Γ'') получается в процессе сборки многообразий (1) и (2) по тождественному отображению тора $T' \times \{1/2\}$ в себя.

Заметим, что последовательные сборки многообразий (M, Γ), (M'', Γ'') и (M', Γ') по естественным гомеоморфизмам, переводящим каждую точку $x \in T$ в точку $(\varphi(x), 0) \in T' \times \{0\}$, а каждую точку $(y, 1) \in T' \times \{1\}$ в точку $y \in T'$, приводит к многообразию (W, Υ) и его простому относительному спайну с $v + v' + d(\varphi(\theta), \theta')$ внутренними истинными вершинами.

2. Относительные спайны дополнительного пространства восьмерки

В этом разделе построим несколько простых относительных спайнов дополнительного пространства $E(4_1)$ узла восьмерка. Фиксируем на граничном торе $\partial E(4_1)$ стандартную систему координат, состоящую из таких ориентируемых замкнутых кривых μ, λ, что меридиан μ порождает группу $H_1(E(4_1); \mathbb{Z})$, а параллель λ ограничивает поверхность в $E(4_1)$. Эта система определяет отображение $\Psi_{\mu,\lambda}$ множества $\Theta(T)$ на множество всех треугольников триангуляции Фарея. Обозначим через $\triangle^{(i)}$ треугольник триангуляции $\mathbb{F}$ с вершинами i, $i+1$, ∞.

Предложение. *Для каждого $i \in \{0,1,2,3\}$ существует такая тэта-кривая $\theta^{(i)}$ на торе $\partial E(4_1)$, что многообразие $(E(4_1), \theta^{(i)})$ имеет простой относительный спайн с 10 внутренними истинными вершинами и $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta^{(i)}) = \triangle^{(i)}$.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть P — специальный спайн компактного ориентируемого трехмерного многообразия M с краем тор, и пусть θ — тэта-кривая на торе ∂M. Начнем доказательство с описания метода построения простого относительного спайна $R(P,\theta)$ многообразия (M,θ).

По теореме 1.1.1 из [7] многообразие M можно отождествить с цилиндром некоторого локального вложения $f : \partial M \to P$. Обозначим через $f|_\theta : \theta \to P$ ограничение отображения f на тэта-кривую θ. Тогда объединение $R(P,\theta)$ цилиндра отображения $f|_\theta$ с краем ∂M является относительным спайном многообразия M, поскольку $\partial M \subset R(P,\theta)$, $\partial M \cap Cl(R(P,\theta) \setminus \partial M) = \theta$ и $M \setminus R(P,\theta)$ гомеоморфно прямому произведению открытого диска $\partial M \setminus \theta$ на интервал. Вообще говоря, построенный полиэдр $R(P,\theta)$ не обязан быть простым. Эта проблема устраняется путем введения понятия общего положения. Будем говорить, что тэта-кривая $\theta \subset \partial M$ *находится в общем положении относительно отображения* f, если ее образ $f(\theta)$ удовлетворяет следующим условиям.

(1) Образ $f(\theta)$ не содержит истинных вершин полиэдра P.

(2) Каждая точка x пересечения множества $f(\theta)$ с тройными линиями полиэдра P имеет такую окрестность $U(x) \subset P$, что пересечение $U(x) \cap f(\theta)$ является дугой, трансверсально пересекающей тройные линии полиэдра P в единственной точке x.

(3) Прообраз $(f|_\theta)^{-1}(x)$ каждой точки x пересечения множества $f(\theta)$ с 2-компонентами полиэдра P состоит из не более чем двух точек тэта-кривой θ. Более того, если $(f|_\theta)^{-1}(x)$ состоит из двух точек, то найдется такая окрестность $U(x) \subset P$, что прообраз $(f|_\theta)^{-1}(U(x) \cap f(\theta))$ пересечения $U(x) \cap f(\theta)$ является несвязным объединением двух дуг γ_1, γ_2 в θ, образы $f(\gamma_1)$, $f(\gamma_2)$ которых трансверсально пересекаются в единственной точке x. Такую точку x будем называть *точкой самопересечения* образа $f(\theta)$ тэта-кривой θ.

Очевидно, что если тэта-кривая θ находится в общем положении относительно отображения f, то относительный спайн $R(P,\theta)$ многообразия M является простым.

Рис. 4. Минимальный спайн дополнительного пространства узла восьмерка.

Шаг 2. Рассмотрим минимальный специальный спайн P многообразия $M = E(4_1)$, представленный на рис. 4 (см. [7, разд. 2.4.2]). Для построения тэта-кривых $\theta^{(i)}$, $i \in \{0,1,2,3\}$, потребуется описание клеточных разбиений тора $T = \partial M$ и его универсального накрытия $\widetilde{T}$. Локальное вложение $f : T \to P$ определяет клеточное разбиение тора T следующим образом.

(1) Прообраз $f^{-1}(C)$ каждой открытой k-мерной клетки C комплекса P состоит из двух открытых 2-клеток, если $k=2$, трех открытых дуг, если $k=1$, и четырех точек, если $k=0$.

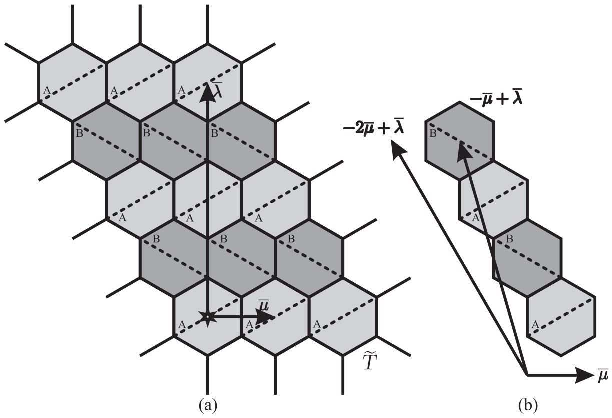


Рис. 5. Клеточные разбиения: (a) накрывающего пространства $\widetilde{T}$; (b) тора T.

(2) Ограничение отображения f на каждую из клеток тора T является гомеоморфизмом на соответствующую клетку спайна P.

Построим универсальное накрытие $\widetilde{T}$ тора T. Оно может быть представлено как плоскость, разбитая на шестиугольники (рис. 5(a)). Группа трансляций этого накрытия изоморфна группе $\pi_1(T) = H_1(T;\mathbb{Z})$. Выберем базис $\tilde{\mu}$, $\tilde{\lambda}$ так, как показано на рис. 5(a). Легко показать, что соответствующие элементы группы $\pi_1(T)$ (которые можно интерпретировать как ориентированные петли) образуют стандартную систему координат (μ, λ) на T. Если профакторизуем накрывающее пространство по трансляциям $\tilde{\mu}$, $\tilde{\lambda}$, то вернемся к тору T. Если же дополнительно отождествим шестиугольники, помеченные буквой A, по суперпозиции симметрии относительно указанной точками диагонали шестиугольника и переноса на вектор $-\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}/2$ и то же самое сделаем для шестиугольников, помеченных буквой B, то получим P. Тор T показан на рис. 5(b) как многоугольный диск D, составленный из четырех шестиугольников. Каждая сторона диска D отождествляется с другой стороной с помощью переноса вдоль одного из трех векторов $\tilde{\mu}$, $-2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}$ и $-\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}$. Спайн P может быть представлен как объединение двух шестиугольников (рис. 6 (справа)), ребра которых декорированы четырьмя различными узорами. Чтобы восстановить спайн P достаточно отождествить ребра, имеющие одинаковые узоры.

Шаг 3. Далее для каждого $i \in \{0,1,2,3\}$ предъявим такую тэта-кривую $\theta^{(i)} \subset \partial M$, что простой относительный спайн $R(P, \theta^{(i)})$ многообразия M имеет 10 внутренних истинных вершин и $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta^{(i)}) = \triangle^{(i)}$.

Рассмотрим букет трех дуг на $\widetilde{T}$ (рис. 6 (слева)). Проекции этих дуг на тор T образуют тэта-кривую, которую обозначим через $\theta^{(0)}$. Прямая проверка показывает, что тэта-кривая $\theta^{(0)}$ находится в общем положении относительно отображения f и $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta^{(0)}) = \triangle^{(0)}$. Остается заметить, что множество всех внутренних истинных вершин полиэдра $R(P, \theta^{(0)})$ состоит из двух истинных вершин специального полиэдра P, образов при отображении f двух вершин тэта-кривой $\theta^{(0)}$, пяти точек пересечения множества $f(\theta^{(0)})$ с тройными линиями полиэдра P (рис. 6 (слева)) и одной точки самопересечения образа $f(\theta^{(0)})$ тэта-кривой $\theta^{(0)}$ (показанную на рис. 6 (справа) серым кружком).

Тэта-кривые $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$, $\theta^{(3)}$, удовлетворяющие заключению предложения, предъявлены на рис. 7–9. Единственно стоит заметить, что среди 10 внут-

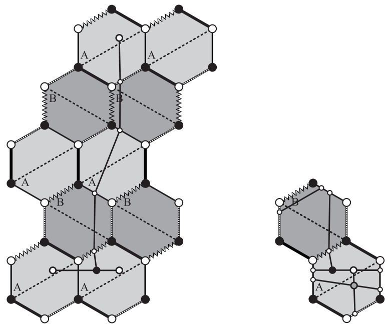


Рис. 6. Тэта-кривая $\theta^{(0)}$.

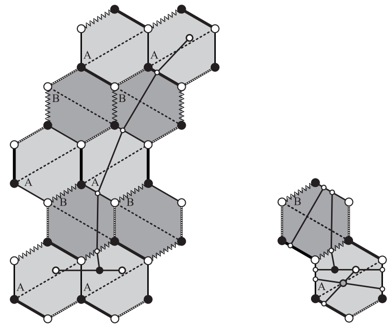


Рис. 7. Тэта-кривая $\theta^{(1)}$.

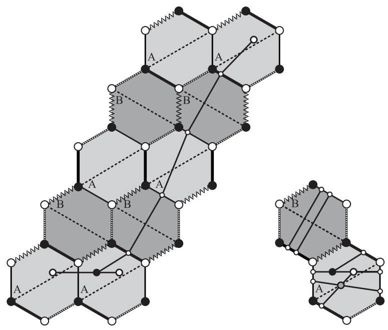


Рис. 8. Тэта-кривая $\theta^{(2)}$.

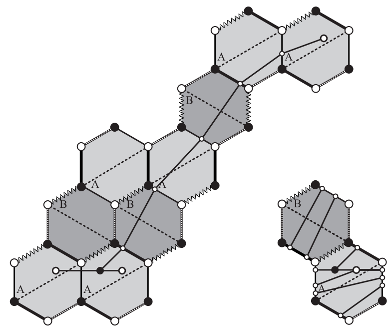


Рис. 9. Тэта-кривая $\theta^{(3)}$.

ренних истинных вершин полиэдра $R(P,\theta^{(3)})$ имеется шесть точек пересечения множества $f(\theta^{(3)})$ с тройными линиями полиэдра P (рис. 9 (слева)) и нет точек самопересечения образа $f(\theta^{(3)})$ тэта-кривой $\theta^{(3)}$ (рис. 9 (справа)).

3. Доказательство теоремы

Пусть $p \geq 0$, $q \geq 1$ — взаимно простые целые числа. Для того чтобы доказать неравенство $c(4_1(p/q)) \leq \omega(p/q)$, достаточно построить какой-нибудь простой спайн многообразия $4_1(p/q)$, содержащий ровно $\omega(p/q)$ истинных вершин.

Тёрстон в [16] доказал, что многообразие $4_1(p/q)$ является гиперболическим, за исключением случаев, когда $p/q \in \{0,1,2,3,4,\infty\}$. Случай $p/q = \infty$ не удовлетворяет условию теоремы. В каждом из пяти оставшихся случаев негиперболическое многообразие $4_1(p/q)$ имеет сложность семь [7] и значение $\omega(p/q)$ также равно семи.

Перейдем к построению простого спайна гиперболического многообразия $4_1(p/q)$. Напомним, что на крае многообразия (V,θ_V), рассмотренного в примере 1, фиксированы меридиан m и тэта-кривая θ_m. Пусть (μ,λ) — стандартная система координат на граничном торе $\partial E(4_1)$ дополнительного пространства $E(4_1)$ узла восьмерка. Среди всех гомеоморфизмов тора ∂V на тор $\partial E(4_1)$, которые переводят меридиан m в кривую $\mu^p\lambda^q$, выберем такой гомеоморфизм φ, что расстояние между тэта-кривыми $\varphi(\theta_m)$ и $\theta^{(0)}$ будет наименьшим из всех возможных. Пусть $z = \min\{[p/q],3\}$. В силу предложения многообразие $(E(4_1),\theta^{(z)})$ имеет простой относительный спайн с 10 внутренними истинными вершинами. Так как $4_1(p/q) = V \cup_\varphi E(4_1)$, по лемме многообразие $(4_1(p/q),\varnothing)$ имеет простой относительный спайн $Q_{p/q}$ с $10 + d(\varphi(\theta_V),\theta^{(z)})$ внутренними истинными вершинами. Более того, поскольку $\partial 4_1(p/q) = \varnothing$, относительный спайн $Q_{p/q}$ является спайном многообразия $4_1(p/q)$.

Докажем, что $d(\varphi(\theta_V), \theta^{(z)}) = -2 + \max\{[p/q]-3, 0\} + S(\mathrm{rem}(p,q), q)$. Напомним, что отображение $\Psi_{\mu,\lambda}$ каждой тэта-кривой $\theta^{(i)}$, $i \in \{0,1,2,3\}$, сопоставляет треугольник $\triangle^{(i)}$ триангуляции Фарея с вершинами i, $i+1$, ∞. Обозначим через $\triangle_V$ и $\triangle_m$ треугольники $\Psi_{\mu,\lambda}(\varphi(\theta_V))$ и $\Psi_{\mu,\lambda}(\varphi(\theta_m))$. Поскольку расстояние между тэта-кривыми на торе $\partial E(4_1)$ совпадает с расстоянием между соответствующими треугольниками триангуляции Фарея, достаточно найти $d(\triangle_V, \triangle^{(z)})$.

Из условия выбора гомеоморфизма φ следует, что треугольник $\triangle_m$ является ближайшим к треугольнику $\triangle^{(0)}$ среди всех треугольников, имеющих вершину в точке p/q. Поэтому (см. [8, предложение 4.3; 10, лемма 2]) $d(\triangle_m, \triangle^{(0)}) = S(p,q) - 1$. Поскольку тэта-кривая θ_V получается из тэта-кривой θ_m одним флип-преобразованием и θ_V не содержит меридиан m, треугольник $\triangle_V$ имеет общее ребро с треугольником $\triangle_m$, но точка p/q не является его вершиной. Следовательно, $d(\triangle_V, \triangle^{(0)}) = S(p,q) - 2$. Анализируя триангуляцию Фарея, можно заметить, что $d(\triangle_V, \triangle^{(z)}) = d(\triangle_V, \triangle^{(0)}) - d(\triangle^{(z)}, \triangle^{(0)})$. Принимая во внимание, что $d(\triangle^{(z)}, \triangle^{(0)}) = z$, $S(p,q) = [p/q] + S(\mathrm{rem}(p,q), q)$ и $[p/q] - \min\{[p/q], 3\} = \max\{[p/q]-3, 0\}$, получаем равенство $d(\varphi(\theta_V), \theta^{(z)}) = d(\triangle_V, \triangle^{(z)}) = -2 + \max\{[p/q]-3, 0\} + S(\mathrm{rem}(p,q), q)$.

Заметим, что если $p/q \notin \mathbb{Z}$, то $Q_{p/q}$ является искомым спайном, поскольку содержит $\omega(p/q)$ истинных вершин. С другой стороны, если $p/q \in \mathbb{Z}$, то спайн $Q_{p/q}$ содержит $\omega(p/q)+1$ истинных вершин. В этом случае спайн $Q_{p/q}$ можно трансформировать в другой простой спайн $Q'_{p/q}$ многообразия $4_1(p/q)$ с помощью последовательности преобразований по граничным кривым длины 4 (аналогичные рассуждения приведены в [7, с. 81]). Спайн $Q'_{p/q}$ имеет то же число истинных вершин, но содержит граничную кривую длины 3 и поэтому допускает упрощение. В результате последнего упрощения получим новый простой спайн многообразия $4_1(p/q)$, содержащий $\omega(p/q)$ истинных вершин.

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что таблица [6] содержит 46 гиперболических многообразий вида $4_1(p/q)$, удовлетворяющих условию $\omega(p/q) \le 12$. Для каждого из них наша верхняя оценка точна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Matveev S. V.* Complexity theory of three-dimensional manifolds // Acta Appl. Math. 1990. V. 19, N 2. P. 101–130.
2. *Frigerio R., Martelli B., Petronio C.* Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds // Pacific J. Math. 2003. V. 210, N 2. P. 283–297.
3. *Anisov S.* Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds // Moscow Math. J. 2005. V. 5, N 2. P. 305–310.
4. *Jaco W., Rubinstein H., Tillmann S.* Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces // J. Topology. 2009. V. 2, N 1. P. 157–180.
5. *Матвеев С. В.* Табулирование трехмерных многообразий // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, № 4. С. 97–122.
6. *Fominykh E., Matveev S., Tarkaev V.* Atlas of 3-manifolds. http://www.matlas.math.csu.ru.
7. *Матвеев С. В.* Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий. М.: МЦНМО, 2007.
8. *Martelli B., Petronio C.* Complexity of geometric 3-manifolds // Geom. Dedicata. 2004. V. 108, N 1. P. 15–69.
9. *Fominykh E., Ovchinnikov M.* On complexity of graph-manifolds // Сиб. электрон. мат. изв. 2005. V. 2. P. 190–191.
10. *Фоминых Е. А.* Верхние оценки сложности для бесконечной серии граф-многообразий // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 215–228.

11. *Rolfsen D.* Knots and links. Berkeley: Publ. Perish Inc., 1976.
12. *Анисов С. С.* Флип-эквивалентность триангуляций поверхностей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1994. № 2. С. 61–67.
13. *Johannson K.* Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries. Berlin: Springer-Verl., 1979. (Lect. Notes Math.; V. 761).
14. *Овчинников М. А.* Построение простых спайнов многообразий Вальдхаузена // Сб. тр. междунар. конф. «Маломерная топология и комбинаторная теория групп». Киев: Институт математики НАН Украины, 2000. С. 65–86.
15. *Martelli B., Petronio C.* Three-manifolds having complexity at most 9 // Experimental Math. 2001. V. 10, N 2. P. 207–236.
16. *Thurston W. P.* The geometry and topology of 3-manifolds. Princeton: Princeton Univ. Press, 1978. (Princeton Univ. Lect. Notes).

Статья поступила 22 июня 2010 г.

Фоминых Евгений Анатольевич
Челябинский гос. университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990
fominykh@csu.ru