Сибирский математический журнал
Июль—август, 2011. Том 52, № 4

УДК 519.21

ТЕОРЕМА НЕПРЕРЫВНОСТИ В ЗАДАЧЕ О РАЗОРЕНИИ

И. С. Борисов, А. М. Шойсоронов

Аннотация. Доказывается теорема непрерывности для моментов выхода случайного блуждания из полосы с прямолинейными границами, параллельными оси абсцисс, в том числе и через априори выбранную границу. В качестве следствия вычисляется вероятность разорения для двух классов центрированных распределений.

Ключевые слова: случайное блуждание, марковское свойство перескока, момент выхода траектории случайного блуждания, двустороннее обобщенное геометрическое распределение, двустороннее показательное распределение.

§ 1. Теорема непрерывности для моментов выхода случайного блуждания из полосы

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Обозначим

$$S(t) = \sum_{i \le t} \xi_i, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

где сумма по пустому множеству индексов полагается равной нулю. На протяжении этого параграфа мы рассматриваем случайные блуждания с произвольным невырожденным распределением скачка ξ_1.

Обозначим через

$$\tau := \min\{k \ge 1 : S(k) \notin (-a, b),\ \min_{i \le k} S(i) > -a\} \tag{2}$$

момент первого выхода траектории случайного блуждания из полосы через (или на) ее верхнюю границу, если событие, определяющее введенную случайную величину, происходит. Если не происходит, то мы полагаем $\tau = \infty$. Так что областью возможных значений $\mathcal{N}_\infty$ случайной величины τ являются все натуральные числа, пополненные символом ∞.

Далее, пусть распределение каждого скачка ξ_i «возмущается» (одним и тем же способом для каждого i) с помощью положительного параметра ε. Обозначим i-й возмущенный скачок через ξ_i^ε. Соответствующие случайное блуждание и момент выхода обозначим через $S^\varepsilon(t)$ и τ^ε соответственно.

Наконец, определим расстояние полной вариации между борелевскими распределениями двух произвольных случайных величин ζ_1 и ζ_2, не обязательно скалярных, но со значениями в сепарабельном метрическом пространстве:

$$TV(\zeta_1, \zeta_2) := \sup_A |\mathbf{P}(\zeta_1 \in A) - \mathbf{P}(\zeta_2 \in A)|,$$

где супремум берется по всем борелевским множествам рассматриваемого выборочного пространства.

Теорема 1. *Если* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} TV\bigl(\xi_1^\varepsilon, \xi_1\bigr) = 0$, *то* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} TV(\tau^\varepsilon, \tau) = 0$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что исходный и возмущенный моменты τ и τ^ε имеют, вообще говоря, несобственные арифметические распределения, т. е.

$$TV(\tau^\varepsilon, \tau) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathscr{N}_\infty} |\mathbf{P}(\tau^\varepsilon = n) - \mathbf{P}(\tau = n)|.$$

Значит, в этом случае сходимость по вариации рассматриваемых распределений эквивалентна слабой сходимости, которая для арифметических распределений сводится к сходимости точечных масс:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{P}(\tau^\varepsilon = n) = \mathbf{P}(\tau = n)$$

для каждого $n \in \mathscr{N}_\infty$.

Нам понадобится следующий известный результат Р. Л. Добрушина (см., например, [1]).

Лемма 1. *Любые случайные величины ζ_1 и ζ_2 со значениями в произвольном сепарабельном метрическом пространстве можно так задать на одном вероятностном пространстве, что*

$$TV(\zeta_1, \zeta_2) = \mathbf{P}(\zeta_1 \neq \zeta_2).$$

Дальнейшее доказательство теоремы состоит в рассмотрении двух случаев: конечного и бесконечного n. Пусть сначала n — произвольное натуральное число. Из приведенной леммы следует, что для каждого фиксированного натурального n случайные векторы $\bar\zeta := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\bar\zeta^\varepsilon := \bigl(\xi_1^\varepsilon, \dots, \xi_n^\varepsilon\bigr)$ можно так задать на одном вероятностном пространстве, что

$$TV(\bar\zeta^\varepsilon, \bar\zeta) \le nTV\bigl(\xi_1^\varepsilon, \xi_1\bigr). \tag{3}$$

Поскольку

$$\mathbf{P}(\tau = n) = \mathbf{P}\bigl(\max_{i\le n-1} S(i) \le b,\ \min_{i\le n} S(i) > -a,\ S(n) \ge b\bigr)$$

и событие, стоящее под знаком вероятности в правой части этого равенства, можно записать как $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in B$ для очевидно определяемого n-мерного борелевского множества B, на основании (3) получим

$$|\mathbf{P}(\tau^\varepsilon = n) - \mathbf{P}(\tau = n)| \le nTV \in \bigl(\xi_1^\varepsilon, \xi_1\bigr). \tag{4}$$

Теперь рассмотрим случай $n = \infty$. Имеем

$$\mathbf{P}(\tau^\varepsilon = \infty) = \sum_{k\ge 1} \mathbf{P}(S^\varepsilon(i) \in (-a, b)\ \forall i < k;\ S^\varepsilon(k) \le -a) = \sum_{k\le m} \dots + \sum_{k>m} \dots, \tag{5}$$

где m произвольное натуральное. Далее, для любого натурального k в силу леммы 1 имеем аналогичную (4) оценку:

$$|\mathbf{P}(S^\varepsilon(i) \in (-a, b)\ \forall i < k;\ S^\varepsilon(k) \le -a) - \mathbf{P}(S(i) \in (-a, b) \forall i < k;\ S(k) \le -a)| \\ \le kTV\bigl(\xi_1^\varepsilon, \xi_1\bigr).$$

Стало быть, первая сумма правой части (5) близка к аналогичной сумме, записанной для невозмущенного блуждания, с погрешностью, не превосходящей $m^2 TV\bigl(\xi_1^\varepsilon, \xi_1\bigr)$.

Наконец, оценим вторую сумму правой части (5). С помощью леммы 1 получаем

$$\sum_{k>m} \dots \le \mathbf{P}(S^\varepsilon(i) \in (-a,b)\ \forall i \le m) \le \mathbf{P}(S(i) \in (-a,b)\ \forall i \le m) + mTV\big(\xi_1^\varepsilon, \xi_1\big).$$

Поскольку выбором m вероятность в правой части последнего неравенства можно сделать сколь угодно малой, приведенные оценки позволяют утверждать, что при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbf{P}(\tau^\varepsilon = \infty) \to \mathbf{P}(\tau = \infty).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Утверждение теоремы верно и для момента выхода случайного блуждания из полосы, так как его распределение очевидным образом выражается через распределения «односторонних» моментов выхода, фигурирующих в теореме.*

Следствие 2. *Пусть распределение F случайной величины ξ_1 представлено в виде смеси двух распределений: $F = \alpha F_1 + (1-\alpha)F_2$. Возмущенное распределение случайной величины ξ_1^ε задается как $F^\varepsilon = (\alpha+\varepsilon)F_1 + (1-\alpha-\varepsilon)F_2$ при $0 < \varepsilon < 1-\alpha$. Тогда $TV\big(\xi_1^\varepsilon, \xi_1\big) \le \varepsilon$ и, стало быть, имеет место утверждение теоремы* 1.

Обозначим через $P_{a,b}$ вероятность выхода траектории случайного блуждания $S(t)$ из рассматриваемой полосы $\{(t,y) : t \ge 0,\ -a < y < b\}$ через ее верхнюю границу $y = b$ — это так называемая *вероятность разорения* (одна из двух).

Следствие 3. *В условиях теоремы* 1 *имеет место теорема непрерывности для вероятности разорения.*

В самом деле, если обозначить через $P_{a,b}^\varepsilon$ вероятность выхода возмущенного случайного блуждания из полосы через ее верхнюю границу, то

$$P_{a,b}^\varepsilon = \mathbf{P}(\tau^\varepsilon < \infty) \overset{\varepsilon \to 0}{\to} \mathbf{P}(\tau < \infty) = P_{a,b}.$$

Замечание 1. Выбор метрики полной вариации в качестве меры близости распределений ξ_1^ε и ξ_1 объясняется отсутствием свойства непрерывности у функционалов типа τ в пространстве траекторий рассматриваемого случайного блуждания с топологией, порожденной семейством равномерных норм на конечных временных отрезках. Поэтому утверждение, подобное теореме 1, при условии слабой сходимости распределений ξ_1^ε к распределению ξ_1 будет иметь место только в случае, когда $\mathbf{P}\big(\bigcup_k \{S(k) = b\}\big) = 0$. Например, это условие выполнено для любого непрерывного распределения скачка. Однако если верхний уровень b — натуральное число, то для полунепрерывного сверху случайного блуждания приведенное условие не выполнено.

§ 2. Универсальная формула для вероятности разорения для двух классов распределений скачка

В этом параграфе изучается вероятность $P_{a,b}$ для следующих двух классов невырожденных распределений скачка ξ_1.

(I) Двустороннее *обобщенное геометрическое* распределение:

$$\mathbf{P}(\xi_1 = k) = \alpha p^{k-1},\ k \in \mathbb{N}; \quad \mathbf{P}(\xi_1 = -k) = \beta q^{k-1},\ k \in \mathbb{N}; \quad \mathbf{P}(\xi_1 = 0) = r;$$

здесь неотрицательные параметры α, β, r, p, q связаны соотношением

$$\alpha(1-p)^{-1} + \beta(1-q)^{-1} + r = 1,$$

причем $r < 1$, а при $p = q = 0$ по определению полагаем $0^0 = 1$, что позволяет включить в рассмотрение и класс трехточечных распределений с атомами $-1, 0, 1$.

(II) Произвольная смесь двустороннего показательного распределения с вырожденным в нуле распределением:

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in dt) = \alpha p e^{-pt} dt,\ t > 0; \quad \mathbf{P}(\xi_1 \in dt) = \beta q e^{qt} dt,\ t < 0; \quad \mathbf{P}(\xi_1 = 0) = r,$$

где $p, q, \alpha, \beta, r \geq 0$, причем $\alpha + \beta + r = 1$ и $r < 1$.

Отметим, что для класса (I) в определении вероятности разорения $P_{a,b}$ уровни a и b — произвольные натуральные числа. Введем не зависящую от последовательности $\{\xi_i\}$ неотрицательную случайную величину χ_+^*, имеющую распределение

$$\mathbf{P}(\chi_+^* \in A) = \mathbf{P}(\xi_1 - 1 \in A \mid \xi_1 \geq 1).$$

Аналогично введем неотрицательную случайную величину χ_-^*, заменяя в предыдущей формуле ξ_1 на $(-\xi_1)$. В классах (I) и (II) случайная величина ξ_1 обладает *марковским свойством* двустороннего перескока, т. е. при всех $x > 0$ из носителя ее распределения, для которых $\mathbf{P}(\xi_1 \geq x) > 0$, условное распределение разности (величины перескока) $\xi_1 - x$ при условии $\xi_1 \geq x$ не зависит от x. Для знакопостоянной случайной величины ξ_1 полагаем по определению $\chi_-^* \equiv 0$, если $\xi_1 \geq 0$, и аналогично $\chi_+^* \equiv 0$, если $\xi_1 \leq 0$. Отметим также, что классы (I) и (II) в известном смысле исчерпывают все распределения с упомянутым свойством перескока и что классическое свойство *отсутствия последействия*, т. е. когда распределения случайных величин χ_+^* и ξ_1 совпадают, является частным случаем рассматриваемой схемы.

Прежде всего приведем универсальное представление вероятности разорения для двух введенных классов распределений. Это представление интересно тем, что оно явно указывает распределения тех граничных функционалов, которые участвуют в формуле вероятности разорения.

Теорема 2. *Пусть* ξ_1 *имеет распределение вида* (I) *или* (II) *и* $\mathbf{E}\xi_1 \neq 0$. *Тогда*

$$\mathbf{P}_{a,b} = \frac{\mathbf{P}(\sup\limits_{t\geq 0} S(t) \geq b) - \mathbf{P}(\sup\limits_{t\geq 0} S(t) - \chi_-^* \geq a+b)\mathbf{P}(\inf\limits_{t\geq 0} S(t) \leq -a)}{1 - \mathbf{P}(\sup\limits_{t\geq 0} S(t) - \chi_-^* \geq a+b)\mathbf{P}(\inf\limits_{t\geq 0} S(t) + \chi_+^* \leq -a-b)}. \tag{6}$$

Замечание 2. Полученное представление для вероятности разорения позволяет относительно несложно вычислить ее для классов (I) и (II) распределений скачка (что далее в § 3 будет продемонстрировано), поскольку для этих классов известны точные формулы для распределений как экстремумов, так и величины перескока соответствующих случайных блужданий.

Однако если $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, то правая часть приведенной формулы превращается в неопределенность вида $0/0$, так как все экстремальные функционалы в вышеприведенной формуле будут с вероятностью 1 бесконечными с соответствующими знаками и, стало быть, все вероятности в вышеприведенной формуле будут равны 1. Поэтому для нахождения вероятности $\mathbf{P}_{a,b}$ для центрированных случайных величин в случаях (I) и (II) воспользуемся следствием 2 из § 1, т. е. с помощью малого аддитивного параметра $\varepsilon > 0$ «возмутим» вес смеси, образующей распределение ξ_1, найдем $P^{\varepsilon}_{a,b}$ и предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ получим вероятность $P_{a,b}$.

Доказательство теоремы 1. На множестве траекторий $S(\cdot)$, пересекающих уровень b, определим случайную величину $\tau_+ := \min\{t \geq 0 : S(t) \geq b\}$. Аналогично на множестве траекторий, пересекающих уровень $-a$, определим случайную величину $\tau_- := \min\{t \geq 0 : S(t) \leq -a\}$. Отметим, что введенные неотрицательные случайные величины могут быть несобственными: они полагаются равными ∞, если траектория $S(\cdot)$ не пересекает соответствующий уровень. Эти величины будут одновременно п. н. конечными только при условии $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ и невырожденности распределения ξ_1 (случай так называемого осциллирующего блуждания). В дальнейшем нам будет удобно полагать, что $S(\infty) = 0$. Введем обозначения:

$$\chi_+ := \max\{S(\tau_+), b\} - b; \quad \chi_- := \max\{-S(\tau_-), a\} - a;$$

$$Q(b) := \mathbf{P}(\sup_{t\geq 0} S(t) \geq b); \quad R(a) := \mathbf{P}(\inf_{t\geq 0} S(t) \leq -a); \quad D_{a,b} := Q(b) - P_{a,b};$$

$$P_+ := \mathbf{P}(\inf_{t\geq 0} S(t) + \chi_+^* \leq -a - b); \quad P_- := \mathbf{P}(\sup_{t\geq 0} S(t) - \chi_-^* \geq a + b).$$

Ясно, что

$$P_{a,b} = \mathbf{P}(\sup_{t\geq 0} S(t) \geq b,\ \inf_{t\leq \tau_+} S(t) > -a);$$

$$\begin{aligned} D_{a,b} &= \mathbf{P}(\sup_{t\geq 0} S(t) \geq b,\ \inf_{t\leq \tau_+} S(t) \leq -a) \\ &= \mathbf{P}(\inf_{t\geq 0} S(t) \leq -a,\ \sup_{t\leq \tau_-} S(t) < b,\ \sup_{t\geq 0} S_1(t) - \chi_- \geq a + b), \end{aligned}$$

где случайный процесс $S_1(t) = S(\tau_\pm + t) - S(\tau_\pm)$, $t \geq 0$, совпадает по распределению с процессом $S(t)$.

Обозначим через $\mathscr{B}(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, σ-алгебру событий, порожденную траекториями $S(\cdot)$ до момента $t = k$ включительно, а через $\mathscr{B}(\tau_\pm)$ — минимальную σ-алгебру, содержащую события вида $B \cap \{\tau_\pm = k\}$ при всех $B \in \mathscr{B}(k)$, $k < \infty$. Кроме того, через $\mathscr{B}_1$ обозначим σ-алгебру событий, порожденных траекториями случайного процесса $S_1(\cdot)$.

Далее используем следующее утверждение из [2].

Лемма 2. *Пусть распределение ξ_1 принадлежит одному из классов* (I) *или* (II). *Тогда для всех борелевских множеств A неотрицательной полуоси справедливы следующие соотношения*:

$$\mathbf{P}(\chi_\pm \in A \mid \tau_\pm = k) = \mathbf{P}(\chi_\pm^* \in A)$$

при всех натуральных k,

$$\mathbf{P}(B \cap \{\chi_\pm \in A\} \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(\chi_\pm^* \in A)\mathbf{P}(C)$$

при всех $B \in \mathscr{B}(\tau_\pm)$ и $C \in \mathscr{B}_1$.

Из этой леммы следует, что вероятность в выражении для $D_{a,b}$ факторизуется:

$$\begin{aligned} D_{a,b} &= \mathbf{P}(\inf_{t\geq 0} S(t) \leq -a,\ \sup_{t\leq \tau_-} S(t) < b,\ \sup_{t\geq 0} S_1(t) - \chi_- \geq a + b) \\ &= \mathbf{P}(\inf_{t\geq 0} S(t) \leq -a,\ \sup_{t\leq \tau_-} S(t) < b)\mathbf{P}(\sup_{t\geq 0} S(t) - \chi_-^* \geq a + b). \end{aligned}$$

Заметим, что первый множитель в правой части этого равенства есть не что иное, как вероятность выхода блуждания $S(\cdot)$ из полосы через нижнюю границу. Ее мы можем преобразовать точно так же, как и исходную. В итоге получаем

$$D_{a,b} = \mathbf{P}(\inf_{t\geq 0} S(t) \leq -a,\ \sup_{t\leq\tau_-} S(t) < b)\mathbf{P}(\sup_{t\geq 0} S(t) - \chi_-^* \geq a+b)$$
$$= P_-\mathbf{P}(\inf_{t\geq 0} S(t) \leq -a,\ \sup_{t\leq\tau_-} S(t) < b) = P_-(R(a) - \mathbf{P}(\inf_{t\geq 0} S(t) \leq -a,\ \sup_{t\leq\tau_-} S(t) \geq b))$$
$$= P_-(R(a) - P_+\mathbf{P}(\sup_{t\geq 0} S(t) \geq b,\ \inf_{t\leq\tau_+} S(t) > -a)) = P_-(R(a) - P_+P_{a,b}).$$

Таким образом,

$$P_{a,b} = Q(b) - P_-(R(a) - P_+P_{a,b}).$$

Отсюда следует, что

$$P_{a,b} = \frac{Q(b) - P_-R(a)}{1 - P_-P_+}. \tag{7}$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Стоит отметить некоторые из полученных ранее результатов, связанных с вычислением точной формулы для $P_{a,b}$ для конкретных классов распределений. Классический учебный пример расчета вероятности разорения для блуждания с двухточечным распределением скачка рассмотрен, например, в [3]. Для случая (I) в [4] вычислена производящая функция случайной величины τ_+, откуда тоже можно извлекать результаты, подобные вышеприведенному.

Достаточно простой метод доказательства теоремы 2 дает возможность выписать универсальную формулу расчета $P_{a,b}$ для всех распределений, обладающих свойством двустороннего *марковского перескока* (см. [2]). При этом получен данный результат элементарным «двухшаговым» методом включения-исключения. Подобный прием использовался в научной литературе неоднократно, в частности, в [4] при изучении асимптотики вероятности разорения при $b \to \infty$ в случае *непрерывного* распределения ξ_1 более общего вида, чем в случае (II). Отметим, что авторам не удалось найти публикаций, в которых были бы выписаны исчерпывающим образом вероятности разорения за конечное или бесконечное время случайного блуждания для рассматриваемых классов распределений, за исключением уже упомянутого случая с двухточечным распределением скачка.

§ 3. Вычисление вероятности разорения для случайных блужданий из классов (I) и (II)

Как отмечено ранее, формула (6) сводит расчет вероятности разорения к вычислению распределений экстремальных функционалов для случайных блужданий из классов (I) и (II). Решение этой задачи в общем-то известно (см., например, [2, 5]). В частности, в [2] приведено элементарное решение этой задачи, которое нам здесь будет удобнее использовать.

Класс (I). Для этого случая в [2] показано, что компоненты формулы (7) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$Q(b) = Q(1)(\mathbf{P}(\chi_+^* \geq 1) + Q(1)\mathbf{P}(\chi_+^* = 0))^{b-1},$$

и в силу симметрии задачи

$$R(a) = R(1)(\mathbf{P}(\chi_-^* \geq 1) + R(1)\mathbf{P}(\chi_-^* = 0))^{a-1}.$$

Распределения χ_+^* и χ_-^* вычисляются элементарно:

$$\mathbf{P}(\chi_+^* = k) = \mathbf{P}(\xi_1 = k+1 \mid \xi_1 \geq 1) = (1-p)p^k,$$
$$\mathbf{P}(\chi_-^* = k) = (1-q)q^k, \quad k \geq 0.$$

Таким образом,

$$Q(b) = Q(1)(p + (1-p)Q(1))^{b-1}, \quad R(a) = R(1)(q + (1-q)R(1))^{a-1}.$$

Найдем $Q(1)$ и $R(1)$. По формуле полной вероятности имеем

$$Q(1) = \frac{\alpha}{1-p} + rQ(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta q^{k-1} Q(k+1)$$
$$= \frac{\alpha}{1-p} + rQ(1) + \beta Q(1)\frac{(p + (1-p)Q(1))}{1 - q(p + (1-p)Q(1))}.$$

Обозначим $x := p + (1-p)Q(1)$. Тогда $Q(1) = \frac{x-p}{1-p}$. После подстановки этого выражения в предыдущее равенство получаем квадратное уравнение:

$$[\beta + q(1-r)]x^2 - [\alpha q + \beta p + (1+pq)(1-r)]x + [\alpha + p(1-r)] = 0.$$

Преобразуем коэффициент при первой степени x:

$$\alpha q + \beta p + (1+pq)(1-r) = \alpha q + \beta p + (1-p)(1-q)(1-r) + p(1-r) + q(1-r)$$
$$= \alpha q + \beta p + \alpha(1-q) + \beta(1-p) + p(1-r) + q(1-r) = \alpha + p(1-r) + \beta + q(1-r).$$

Таким образом, корнями уравнения будут

$$x_{1,2} = \frac{\alpha + p(1-r) + \beta + q(1-r) \pm |\alpha + p(1-r) - \beta - q(1-r)|}{2(\beta + q(1-r))}. \tag{8}$$

В силу симметрии задачи формулы для $y := q + (1-q)R(1)$ выписываются аналогичным образом:

$$y_{1,2} = \frac{\alpha + p(1-r) + \beta + q(1-r) \pm |\alpha + p(1-r) - \beta - q(1-r)|}{2(\alpha + p(1-r))}. \tag{9}$$

Как легко видеть, для каждого из двух приведенных уравнений один из корней всегда равен 1, что влечет за собой соотношения $Q(1) = 1$ и $R(1) = 1$, которые, в свою очередь, возможны лишь при определенном знаке математического ожидания $\mathbf{E}\xi_1$ (т. е. сноса случайного блуждания). Покажем, что в (8) и (9) нужно выбрать меньшие по величине корни, т. е. со знаком минус перед модулем. В самом деле, в силу соотношения $\frac{\alpha}{1-p} + \frac{\beta}{1-q} = 1 - r$ имеем

$$\mathbf{E}\xi_1 = \frac{\alpha}{(1-p)^2} - \frac{\beta}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-p)(1-q)}\left[\frac{\alpha(1-q)}{1-p} - \frac{\beta(1-p)}{1-q}\right]$$
$$= \frac{1}{(1-p)(1-q)}\left[\alpha + p\frac{\alpha}{1-p} - q\frac{\alpha}{1-p} - \beta - q\frac{\beta}{1-q} + p\frac{\beta}{1-q}\right]$$
$$= \frac{1}{(1-p)(1-q)}\left[\alpha + p(1-r) - \beta - q(1-r)\right].$$

Таким образом, знак выражения под модулем в (8) и (9) совпадает со знаком $\mathbf{E}\xi_1$. Теперь элементарный анализ позволяет заключить, что лишь знак минус перед модулем в (8) и (9) обеспечивает согласование соотношений $Q(1) = 1$ или

$R(1) = 1$ соответственно с положительным или отрицательным сносом случайного блуждания. Значит,

$$x = p + (1-p)Q(1) = \frac{\alpha + p(1-r) + \beta + q(1-r) - |\alpha + p(1-r) - \beta - q(1-r)|}{2(\beta + q(1-r))},$$

$$y = q + (1-q)R(1) = \frac{\alpha + p(1-r) + \beta + q(1-r) - |\alpha + p(1-r) - \beta - q(1-r)|}{2(\alpha + p(1-r))}.$$

Теперь выведем формулы для вероятностей P_+ и P_- в (7). Принимая во внимание лемму 2, имеем

$$P_+ = \mathbf{P}(\chi_+^* + \inf_{t\geq 0} S(t) \leq -a-b) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\inf_{t\geq 0} S(t) \leq -a-b-k)\mathbf{P}(\chi_+^* = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} R(1)(q+(1-q)R(1))^{a+b+k-1}(1-p)p^k = \frac{(1-p)R(1)(q+(1-q)R(1))^{a+b-1}}{1-p(q+(1-q)R(1))}.$$

Аналогично получаем формулу для P_-. Итак,

$$P_+ = \frac{(1-p)R(1)(q+(1-q)R(1))^{a+b-1}}{1-p(q+(1-q)R(1))},$$

$$P_- = \frac{(1-q)Q(1)(p+(1-p)Q(1))^{a+b-1}}{1-q(p+(1-p)Q(1))}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (7), окончательно получаем, что при условии $\mathbf{E}\xi_1 \neq 0$ вероятность разорения для случайных блужданий из класса (I) имеет вид

$$P_{a,b} = \frac{(x-p)(1-py)x^{b-1} \cdot ((1-qx) - x(y-q)(xy)^{a-1})}{(1-p)((1-qx)(1-py) - (x-p)(y-q)(xy)^{a+b-1})}, \tag{10}$$

где

$$x = \frac{\alpha + p(1-r) + \beta + q(1-r) - |\alpha + p(1-r) - \beta - q(1-r)|}{2(\beta + q(1-r))},$$

$$y = \frac{\alpha + p(1-r) + \beta + q(1-r) - |\alpha + p(1-r) - \beta - q(1-r)|}{2(\alpha + p(1-r))}.$$

Рассмотрим теперь блуждание с нулевым сносом, т. е. $\mathbf{E}\xi_1 = 0$. Возмущаем вес смеси, образующей распределение ξ_1. Обозначим $\alpha' = \alpha + \varepsilon, \quad \beta' = \beta \cdot c$, где c находится из уравнения $\frac{\alpha+\varepsilon}{1-p} + r + \frac{\beta \cdot c}{1-q} = 1$, так как для распределения ξ_1 верно $\frac{\alpha}{1-p} + r + \frac{\beta}{1-q} = 1$. Получаем $c = 1 - \frac{\varepsilon(1-q)}{(1-p)\beta}$. Для возмущенного блуждания верна формула (10), где вместо x и y стоят соответственно x' и y', определяемые через α' и β'.

Так как

$$\mathbf{E}\xi_1^\varepsilon = \frac{\alpha'}{(1-p)^2} - \frac{\beta'}{(1-q)^2} > 0,$$

как установлено выше,

$$\alpha' + p(1-r) > \beta' + q(1-r).$$

Стало быть, подмодульные выражения в формулах для x' и y' положительны, и тогда

$$x' = 1, \quad y' = \frac{\beta' + q(1-r)}{\alpha' + p(1-r)} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 1.$$

Следовательно,

$$P_{a,b} = \lim_{\varepsilon\to 0} P^{\varepsilon}_{a,b} = \lim_{y'\to 1} \frac{(1-py')((1-q)-(y'-q)y'^{a-1})}{(1-q)(1-py')-(1-p)(y'-q)y'^{a+b-1}}.$$

Предел, а вместе с ним точное выражение для вероятности разорения находим с помощью правила Лопиталя:

$$P_{a,b} = \lim_{y'\to 1} \frac{(1-py')(-y'^{a-1}-(y'-q)(a-1)y'^{a-2})}{-p(1-q)-(1-p)y'^{a+b-1}-(1-p)(y'-q)(a+b-1)y'^{a+b-2}}$$
$$= \frac{(1-p)(a+q-aq)}{p+q+(a+b)(1-p)(1-q)-2pq}. \quad (11)$$

Таким образом, формулы (10) и (11) позволяют легко вычислять вероятность разорения для случайных блужданий с распределением скачка из класса (I) при наличии сноса или отсутствии такового.

Класс (II). Вывод формулы для $Q(t)$ можно найти в различных источниках (см., например, [2, 5]). Опять будет удобнее использовать представление для $Q(t)$ из [2]:

$$Q(t) = Q(0^+)\exp\{-p(1-Q(0^+))t\},$$

где $Q(0^+) = \mathbf{P}(\sup_{t\ge 0} S(t) > 0)$, и в силу симметрии

$$R(t) = R(0^+)\exp\{-q(1-R(0^+))t\},$$

где $R(0^+) = \mathbf{P}(\inf_{t\ge 0} S(t) < 0)$.

Очевидно, распределения χ^*_+ и χ^*_- показательные с параметрами p и q соответственно. Получим представления для P_+ и P_-. Имеем

$$P_+ = \mathbf{P}(\chi^*_+ + \inf_{t\ge 0} S(t) \le -a-b) = \int_0^\infty \mathbf{P}(\inf_{t\ge 0} S(t) \le -a-b-z)\mathbf{P}(\chi^*_+ \in dz)$$
$$= pR(0^+)\int_0^\infty \exp\{-q(1-R(0^+))(a+b+z)-pz\}\,dz$$
$$= pR(0^+)\exp\{-q(1-R(0^+))(a+b)\}\int_0^\infty \exp\{-q(1-R(0^+))z-pz\}\,dz$$
$$= \frac{pR(a+b)}{p+q(1-R(0^+))}.$$

Используя симметрию, находим P_-. Таким образом,

$$P_+ = \frac{p\cdot R(a+b)}{p+q(1-R(0^+))}, \quad P_- = \frac{q\cdot Q(a+b)}{q+p(1-Q(0^+))}.$$

Теперь найдем $Q(0^+)$ и $R(0^+)$. По формуле полной вероятности

$$Q(0^+) = \alpha + rQ(0^+) + \int_{-\infty}^0 \beta q e^{qz}\cdot Q(-z)\,dz,$$

$$(1-r)Q(0^+) = \alpha + \beta q Q(0^+) \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\{(q + p(1 - Q(0^+)))z\}\, dz.$$

Обозначим $x := Q(0^+)$. После взятия интеграла, переноса всех членов в одну часть и приведения подобных членов получаем уравнение

$$p(1-r)x^2 - [\alpha p - \beta q + (p+q)(1-r)]x + \alpha(p+q) = 0.$$

Преобразуем коэффициент при первой степени x:

$$\alpha p - \beta q + (p+q)(1-r) = \alpha p - \beta q + p(1-r) + q(\alpha+\beta) = \alpha(p+q) + p(1-r).$$

Корни этого уравнения следующие:

$$x_{1,2} = \frac{\alpha(p+q) + p(1-r) \pm |\alpha(p+q) - p(1-r)|}{2p(1-r)}.$$

Один из корней всегда равен 1. Также заметим, что

$$\alpha(p+q) - p(1-r) = \alpha p + \alpha q - p(\alpha+\beta) = \alpha q - \beta p = pq\mathbf{E}\xi_1.$$

Стало быть, знак выражения под модулем соответствует знаку $\mathbf{E}\xi_1$. Так же, как и в случае (I), нужно выбирать меньший корень, т. е. со знаком минус перед модулем. Таким образом,

$$Q(0^+) = \frac{\alpha(p+q) + p(1-r) - |\alpha(p+q) - p(1-r)|}{2p(1-r)}.$$

В силу симметрии задачи

$$R(0^+) = \frac{\beta(p+q) + q(1-r) - |\beta(p+q) - q(1-r)|}{2q(1-r)}.$$

Подставив полученные выражения в формулу (7), приходим к окончательному виду для вероятности разорения блуждания из класса (II) с ненулевым сносом:

$$\begin{aligned} P_{a,b} &= \frac{Q(b) - P_- R(a)}{1 - P_- P_+} \\ &= \frac{xexp\{-p(1-x)b\} - \frac{qx\exp\{-p(1-x)(a+b)\}}{q+p(1-x)} y\exp\{-q(1-y)a\}}{1 - \frac{py\exp\{-q(1-y)(a+b)\}}{p+q(1-y)} \frac{qx\exp\{-p(1-x)(a+b)\}}{q+p(1-x)}} \\ &= \frac{x(p+q(1-y))e^{-p(1-x)b}[(q+p(1-x)) - ye^{-[p(1-x)+q(1-y)]a}]}{(p+q(1-y))(q+p(1-x)) - xye^{-[p(1-x)+q(1-y)](a+b)}}, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$x = \frac{\alpha(p+q) + p(1-r) - |\alpha(p+q) - p(1-r)|}{2p(1-r)},$$

$$y = \frac{\beta(p+q) + q(1-r) - |\beta(p+q) - q(1-r)|}{2q(1-r)}.$$

Пусть распределение ξ_1 центрировано, при этом $\alpha + \beta + r = 1$. Тогда возмущаем вес смеси так: $\alpha' = \alpha + \varepsilon$, $\beta' = \beta - \varepsilon$. Для возмущенного блуждания верна формула (12), где вместо x и y стоят соответственно x' и y', определяемые через α' и β'. Кроме того, $\mathbf{E}\xi_1^\varepsilon > 0$. Следовательно,

$$x' = \frac{\alpha'(p+q) + p(1-r) - |\alpha'(p+q) - p(1-r)|}{2p(1-r)} = 1,$$

так как $\alpha'(p+q) - p(1-r) = pq\mathbf{E}\xi_1^\varepsilon$, и

$$y' = \frac{\beta'(p+q) + q(1-r) - |\beta'(p+q) - q(1-r)|}{2q(1-r)} = \frac{\beta'(p+q)}{q(1-r)} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \frac{\beta(p+q)}{q(1-r)} = \frac{\alpha q + \beta q}{q(1-r)} = 1,$$

так как $\beta'(p+q) - q(1-r) = -pq\mathbf{E}\xi_1^\varepsilon$. Таким образом,

$$P_{a,b} = \lim_{\varepsilon\to 0} P_{a,b}^\varepsilon = \lim_{y'\to 1} \frac{(p + q(1-y'))[q - qy'e^{-q(1-y')M}]}{(p+q(1-y'))q - pqy'e^{-q(1-y')(M+N))}}.$$

Окончательную формулу для вероятности разорения для блуждания с нулевым сносом находим также с помощью правила Лопиталя:

$$P_{a,b} = \lim_{y'\to 1} \frac{(p+q(1-y'))[-qe^{-q(1-y')a} - q^2y'e^{-q(1-y')a)}a]}{-q^2 - pqe^{-q(1-y')(a+b)} - pq^2y'(a+b)e^{-q(1-y')(a+b)}} = \frac{-pq(1+qa)}{-q(q+p+pq(a+b))} = \frac{p(1+qa)}{p+q+pq(a+b)}. \quad (13)$$

Замечание 4. В [6] при изучении асимптотики вероятности разорения в случае *неарифметического* распределения ξ_1 более общего вида, нежели в случае (II), при условии нулевого среднего получена асимптотическая формула (при $b\to\infty$):

$$P_{a,b} \cong \frac{|-a+\rho_-|}{b+\rho_+ + |-a+\rho_-|}, \quad (14)$$

где

$$\rho_\pm = \frac{\mathbf{E}(S_{\tau_\pm}^2)}{2\mathbf{E}(S_{\tau_\pm})}, \quad \tau_+ = \inf\{n\ge 1 : S_n \ge 0\}, \quad \tau_- = \inf\{n \ge 1 : S_n \le 0\}.$$

В рассматриваемом нами случае

$$S_{\tau_+} \underset{d}{=} \chi_+^*, \quad S_{\tau_-} \underset{d}{=} -\chi_-^*, \quad \mathbf{P}(\chi_+^* \ge t) = e^{-pt}$$

и

$$\mathbf{P}(\chi_-^* \ge t) = e^{-qt}, \quad t \ge 0.$$

Тогда $\rho_+ = \frac{1}{p}$ и $\rho_- = -\frac{1}{q}$. Подставляя эти величины в (14), получаем

$$P_{a,b} \cong \frac{p(1+qa)}{p+q+pq(a+b)}.$$

Но в (13) мы получили точное равенство для вероятности разорения $P_{a,b}$, совпадающее с правой частью последнего асимптотического соотношения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисов И. С.* Замечание к теореме Р. Л. Добрушина и каплинги в пуассоновской аппроксимации в абелевых группах // Теория вероятностей и ее применения. 2003. Т. 48, № 3. С. 576–583.

2. *Борисов И. С.* Замечание о распределении числа пересечений полосы случайным блужданием // Теория вероятностей и ее применения. 2008. Т. 53, № 2. С. 345–349.

3. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2001.

4. *Лотов В. И., Ходжибаев В. Р.* О вероятности разорения // Изв. АН УзССР. сер. физ.-мат. наук. 1980. Т. 3. С. 28–34.

5. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
6. *Siegmund D. O.* Sequential analysis. New York: Springer-Verl., 1985.

Статья поступила 5 января 2011 г.

Борисов Игорь Семенович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sibam@math.nsc.ru

Шойсоронов Арсалан Мэлсович
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
arsalanshoys@mail.ru