Сибирский математический журнал
Июль—август, 2011. Том 52, № 4

УДК 514.7

НОВОЕ УРАВНЕНИЕ НА МЕТРИКИ КАЛАБИ — ЯУ В МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ

Д. В. Егоров

Аннотация. Получено уравнение на метрики компактных кэлеровых многообразий в размерностях 2 и 3, решением которого будут метрики Калаби — Яу. Данное уравнение отличается от уравнения Монжа — Ампера, рассмотренного Калаби [1] и Яу [2].

Ключевые слова: многообразие Калаби — Яу, уравнение Монжа — Ампера, симплектическая структура.

§ 1. Введение

Пусть M — компактное кэлерово многообразие размерности n с кэлеровой формой ω. Калаби сформулировал гипотезу, суть которой в следующем: если $c_1(M)=0$, то на M существует риманова метрика с группой голономий, содержащейся в $SU(n)$, в частности, это означает, что метрика эйнштейнова. Более точно гипотезу Калаби можно сформулировать следующим образом: уравнение Монжа — Ампера на вещественную функцию φ

$$(\omega + i\partial\bar\partial\varphi)^n = e^F\omega^n, \tag{1}$$

где F — гладкая вещественная функция на M с условием $\int\limits_M e^F\omega^n = \int\limits_M \omega^n$, имеет единственное решение. При этом предполагается, что $\omega + i\partial\bar\partial\varphi$ является вещественной положительной $(1,1)$-формой и $\int\limits_M \varphi\,\omega^n = 0$. Заметим, что уравнение Монжа — Ампера описывает деформацию симплектической структуры.

Из существования решения уравнения (1), которое доказал Яу, и условия $c_1(M)=0$ следует существование метрики Калаби — Яу [2].

В этой работе введем уравнение на деформацию комплексной структуры кэлерова многообразия M в размерностях $n=2,3$. Решениям этого уравнения так же, как и решениям уравнения (1), отвечают метрики Калаби — Яу.

Пусть Ω — голоморфная форма объема на M, т. е. Ω является замкнутой формой, и в окрестности каждой точки в некоторой локальной комплексной системе координат $z^1,\dots,z^n$ форма Ω имеет вид $\Omega = dz^1\wedge\dots\wedge dz^n$. Напомним, что n-форма Ω называется *примитивной*, если

$$\Omega\wedge\omega = 0. \tag{2}$$

Справедлива

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00598–а), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–7256.2010.1) и гранта Президента РФ по государственной поддержке молодых российских ученых МК–842.2011.1.

Теорема 1. *Пусть M — компактное кэлерово многообразие размерности n и $c_1(M)=0$. Пусть F — произвольная вещественная функция на M с условием нормировки $\int\limits_M e^F\Omega\wedge\overline{\Omega}=\int\limits_M \Omega\wedge\overline{\Omega}$. Тогда при $n=2,3$ уравнение*

$$(\Omega+dd^s\psi)\wedge(\overline{\Omega}+dd^s\bar{\psi})=e^F\Omega\wedge\overline{\Omega} \tag{3}$$

на комплексную n-форму ψ, где d^s — симплектический дифференциальный оператор (см. определение в § 2), имеет такое решение, что $\widetilde{\Omega}=\Omega+dd^s\psi$ является устойчивой примитивной формой.

Условие устойчивости формы $\widetilde{\Omega}$ в формулировке теоремы означает существование комплексной структуры на M, для которой $\widetilde{\Omega}$ является голоморфной формой объема. Вопрос о существовании решения уравнения (3) в размерности $n>3$ остается открытым.

Покажем, что из теоремы 1 вытекает существование метрики Калаби — Яу. Так как форма $\widetilde{\Omega}=\Omega+dd^s\psi$ является голоморфной формой объема в некоторой комплексной структуре, $\widetilde{\Omega}\wedge\overline{\widetilde{\Omega}}$ пропорциональна форме объема метрики, т. е. существует вещественная функция F такая, что

$$c_ne^F\Omega\wedge\overline{\Omega}=\omega^n,$$

где c_n — некоторая постоянная, зависящая от размерности многообразия, причем функция F удовлетворяет условию нормировки:

$$\int\limits_M e^F\Omega\wedge\overline{\Omega}=\int\limits_M \Omega\wedge\overline{\Omega}.$$

Тогда из теоремы 1 следует, что существует форма $\widetilde{\Omega}$ такая, что

$$c_n\widetilde{\Omega}\wedge\overline{\widetilde{\Omega}}=\omega^n. \tag{4}$$

Таким образом, на M существуют симплектическая форма ω и голоморфная форма объема Ω, удовлетворяющие условиям совместности (2), (4). Отсюда следует существование метрики Калаби — Яу на M [3].

В § 2 изложим элементы симплектической теории Ходжа, в частности, напомним определение оператора d^s. В § 3 докажем теорему 1, сведя ее к теореме существования Яу. В § 4 обсудим возможные обобщения теоремы 1.

Автор благодарит И. А. Тайманова за привлечение внимания к данной области математики и постоянную поддержку.

§ 2. Симплектическая теория Ходжа

Пусть (M,ω) — симплектическое многообразие вещественной размерности $2n$. Определим оператор симплектической звездочкой Ходжа $*_s$ из следующего равенства на k-формы [4, 5] (см. также [6]):

$$\alpha\wedge *_s\beta=(\omega^{-1})^k(\alpha,\beta)\frac{\omega^n}{n!}.$$

Определим симплектический дифференциальный оператор d^s на k-формах по формуле

$$d^s:=(-1)^{k+1}*_s d*_s \tag{5}$$

при действии на k-формы. Заметим, что оператор d^s понижает степень формы на единицу и $dd^s=-d^sd$.

Для кэлеровых многообразий справедливо равенство (dd^s-лемма)

$$\operatorname{im} d\cap\ker d^s=\ker d\cap\operatorname{im} d^s=\operatorname{im} dd^s.$$

Утверждение 1. *Пусть M — кэлерово многообразие размерности n и Ω и $\widetilde{\Omega}$ — две примитивные когомологичные n-формы. Тогда $\widetilde{\Omega} = \Omega + dd^s\psi$, где ψ некоторая n-форма.*

Доказательство. Используем следующую формулу для примитивных n-форм [7]:

$$*_s\eta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\eta. \tag{6}$$

Получаем, что из d-замкнутости следует d^s-замкнутость. По условию форма $\widetilde{\Omega} - \Omega$ является d-точной формой, и по формуле (6) она d^s-замкнута. Тогда по dd^s-лемме $\widetilde{\Omega} - \Omega$ принимает вид $dd^s\psi$, где ψ — некоторая n-форма. Утверждение доказано.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Напомним определение устойчивой формы. Любая устойчивая форма в комплексных размерностях 2 и 3 является вещественной или мнимой частью голоморфной формы [8, 9].

Пусть V — вещественное m-мерное пространство. Вещественная форма $\rho \in \Lambda^p V^*$ *устойчива*, если при естественном действии $GL(V)$ на $\Lambda^p V^*$ орбита ρ является открытой.

При $p = 2$, $m = 2n$ получаем определение невырожденности симплектической формы. Вспомним, что все компактные кэлеровы многообразия с нулевым первым классом Чжэня комплексной размерности 2 являются гиперкэлеровыми и на них существуют три кэлеровы формы: ω_I, ω_J, ω_K, соответствующие комплексным формам I, J, K. Вследствие размерности голоморфной формой объема, соответствующей комплексной структуре I, является форма $\omega_J + i\omega_K$. Таким образом, в комплексной размерности 2 голоморфная форма составлена из симплектических и устойчива.

При $p = 3$ и размерности V, равной 6, Хитчин [8] определяет $GL(V)$-инвариант λ, при этом устойчивые формы соответствуют ненулевому инварианту. Нас интересуют формы, соответствующие $\lambda < 0$, это в точности вещественные и мнимые части неразложимых комплексных 3-форм. Везде далее под устойчивыми 3-формами будем принимать те, которые соответствуют $\lambda < 0$.

Нам потребуется ориентируемая версия теоремы Мозера [10].

Теорема 2. *Пусть M — ориентируемое многообразие и на нем задано семейство симплектических форм ω_t для $0 \leqslant t \leqslant 1$ с фиксированными периодами, т. е.*

$$\int_c \omega_t = \int_c \omega_0$$

для всех двумерных циклов c из M. Тогда для всех t существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм ϕ_t такой, что

$$\phi_t^*\omega_t = \omega_0$$

и ϕ_0 — тождественное отображение.

Согласно теореме Яу форме Ω соответствует форма $\widetilde{\Omega} \sim \omega$, удовлетворяющая условиям совместности (2), (4). Вместе данные формы задают метрику Калаби — Яу.

В доказательстве теоремы Яу используется метод продолжения, что непосредственно дает семейство когомологичных симплектических форм с $\omega_0 = \omega$,

$\omega_1 = \widetilde{\Omega}$. Обозначим ϕ_1 через ϕ. Утверждаем, что $\phi^*\Omega$ — искомая форма $\widetilde{\Omega}$. Подействуем отображением ϕ^* на совместную пару форм Ω и $\widetilde{\Omega} = (\phi^{-1})^*\omega$. Диффеоморфизм сохраняет условия совместности (2), (4), а также устойчивость формы Ω. Диффеоморфизм ϕ изотопичен тождественному, поэтому $\widetilde{\Omega} = \phi^*\Omega \in [\Omega]$.

Таким образом, формы $\widetilde{\Omega}$ и ω замкнуты, удовлетворяют условиям совместности (2), (4) и, следовательно, определяют метрику Калаби — Яу.

Докажем, что $\widetilde{\Omega}$ является решением уравнения (3). Из утверждения 1 вытекает, что $\widetilde{\Omega}$ имеет следующий вид:

$$\widetilde{\Omega} = \Omega + dd^s\psi,$$

где ψ — некоторая комплексная n-форма.

Покажем, теперь что $\widetilde{\Omega}$ удовлетворяет уравнению (3). Так как форма $\widetilde{\Omega} = \Omega + dd^s\psi$ является голоморфной формой объема в некоторой комплексной структуре, $\widetilde{\Omega}\wedge\overline{\widetilde{\Omega}}$ пропорциональна форме объема метрики, т. е. существует вещественная функция F такая, что

$$c_n e^F \widetilde{\Omega}\wedge\overline{\widetilde{\Omega}} = \omega^n, \tag{7}$$

$$\int\limits_M e^F \widetilde{\Omega}\wedge\overline{\widetilde{\Omega}} = \int\limits_M \widetilde{\Omega}\wedge\overline{\widetilde{\Omega}}.$$

Подставляя (7) в формулу (4), получим искомое уравнение (3):

$$c_n\widetilde{\Omega}\wedge\overline{\widetilde{\Omega}} = \omega^n = c_n e^F \Omega\wedge\overline{\Omega}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что ключевым моментом в доказательстве является то, что устойчивость формы сохраняется при диффеоморфизме. Вследствие этого данное доказательство неприменимо в старших размерностях, где голоморфная форма объема не является устойчивой формой.

§ 4. Заключение

В заключение приведем возможные варианты продолжения работы по изучению нового уравнения.

Пусть (M,ω) — симплектическое, но не кэлерово многообразие размерности $2n$. Непосредственное обобщение уравнения Монжа — Ампера на этот случай выглядит следующим образом:

$$(\omega + dJd\varphi)^n = e^F\omega^n, \tag{8}$$

где J — неинтегрируемая почти комплексная структура. Если J интегрируется, то данное уравнение превращается в комплексное уравнение Монжа — Ампера.

Оказывается, уравнение (8) не дает ничего нового, так как Делоне доказал в [11], что если решение существует для любой (совместной) правой части при $n = 2$, то почти комплексная структура J интегрируема и, следовательно, многообразие кэлерово. Позже данный результат был распространен и на старшие размерности [12].

Было бы интересно поискать аналог результата Делоне для предложенного нами уравнения. Согласно обобщенной комплексной геометрии естественно вводится почти симплектическая структура, которая является невырожденной 2-формой. Условие интегрируемости — это замкнутость. Симплектическую звездочку Ходжа, а значит, и симплектический оператор d^s можно ввести и без замкнутости.

Таким образом, можно поставить вопрос: следует ли из существования решения уравнения для любой совместной правой части

$$\widetilde{\Omega} \wedge \overline{\widetilde{\Omega}} = e^F \Omega \wedge \overline{\Omega}, \quad \widetilde{\Omega} = \Omega + dd^s\varphi$$

интегрируемость симплектической структуры, т. е. ее замкнутость?

Вторым интересным продолжением работы, с нашей точки зрения, было бы изучение того, на какие классы многообразий можно обобщить теоремы существования нового симплектического уравнения в духе Дональдсона — Вейнкова — Тозатти, которые в последние годы начали исследования по обобщению уравнения Монжа — Ампера на некэлеровы симплектические многообразия.

В работе [13] Дональдсоном предложено обобщение уравнения (1) на симплектические многообразия, не являющиеся кэлеровыми в вещественной размерности 4. В данном случае ω — это симплектическая форма, совместная с почти комплексной структурой J, и ищется симплектическая форма $\widetilde{\Omega}$, когомологичная ω, удовлетворяющая уравнению

$$\widetilde{\Omega}^n = \sigma \tag{9}$$

для заданной совместной формы объема σ. Данное обобщенное уравнение называется *уравнением Калаби — Яу*.

В работах [14–16] доказано, что существует единственное решение уравнения Калаби — Яу (9) в вещественной размерности 4 при определенном ограничении на кривизну связности Чжэня. Так, в [12] замечено, что полученный там результат применим при некотором возмущении кэлеровой метрики.

Естественными претендентами на обобщение теоремы существования решения уравнения (3) являются некэлеровы эрмитовы многообразия с тривиальным каноническим расслоением (см., например, [17]).

Также неясно, возможно ли в кэлеровом случае обобщение теоремы существования уравнения (3) на старшие размерности $n > 3$, где голоморфная форма объема уже не является устойчивой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Calabi E.* On Kähler manifolds with vanishing canonical class // Algebraic geometry and topology / Symp. in honor of S. Lefshetz. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1957. P. 78–89.
2. *Yau S.-T.* On the Ricci curvature of compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation. I // Comm. Pure Appl. Math. 1978. V. 31. P. 339–411.
3. *Joyce D.* Compact manifolds with special holonomy. Oxford: Oxford Univ. Press, 2000.
4. *Ehresmann C., Libermann P.* Sur le problème d'équivalence des formes différentielles extérieures quadratiques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1949. V. 229. P. 697–698.
5. *Libermann P.* Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières // Bull. Soc. Math. France. 1955. V. 83. P. 195–224.
6. *Tseng Li-Sheng, Yau S.-T.* Cohomology and Hodge theory on symplectic manifolds. I. arXiv:0909.5418.
7. *Weil A.* Introduction à l'Étude des variété Kahlériennes. Paris: Hermann, 1958. (Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago; VI).
8. *Hitchin N.* The geometry of three-forms in six and seven dimensions // arXiv:math/0010054.
9. *Hitchin N.* Stable forms and special metrics // arXiv:math/0107101.
10. *Moser J.* On the volume elements of a manifold // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 120. P. 286–294.

11. *Delanoë P.* Sur l'analogue presque-complexe de l'equation de Calabi–Yau // Osaka J. Math. 1996. V. 33. P. 829–846.

12. *Wang Hongyu, Zhu Peng.* On a generalized Calabi–Yau equation // arXiv:0911.0784.

13. *Donaldson S. K.* Two-forms on four-manifolds and elliptic equations // arXiv:math/0607083.

14. *Weinkove B.* The Calabi–Yau equation on almost Kähler four-manifolds // J. Diff. Geometry. 2007. V. 76, N 2. P. 317–349.

15. *Tosatti V., Weinkove B., Yau S.-T.* Taming symplectic forms and the Calabi–Yau equation // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97, N 2. P. 401–424.

16. *Tosatti V., Weinkove B.* The Calabi–Yau equation, symplectic forms and almost complex structures // arXiv:0901.1501.

17. *Fine J., Panov D.* Hyperbolic geometry and non-Kähler manifolds with trivial canonical bundle // arXiv:0905:3237.

Статья поступила 10 сентября 2010 г.

Егоров Дмитрий Владимирович
НИИ математики при Северо-Восточном федеральном
университете им. М. К. Аммосова
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
egorov.dima@gmail.com