Сибирский математический журнал
Июль—август, 2011. Том 52, № 4

УДК 519.21

О РЕАЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

В. В. Сенатов

Аннотация. Рассматриваются различные аппроксимации в центральной предельной теореме для распределений сумм независимых случайных величин. Изучается вопрос о том, для какого числа слагаемых эти аппроксимации гарантируют точность 10^{-3}. Выясняется, что для одного и того же распределения для различных аппроксимаций это число варьируется от сотен тысяч до немногих десятков слагаемых.

Ключевые слова: центральная предельная теорема, точность аппроксимации, асимптотические разложения.

Цель данной работы — продемонстрировать некоторые из последних результатов, связанных с вопросом о точности аппроксимации в центральной предельной теореме, и показать, для какого числа слагаемых эти аппроксимации дают содержательные результаты. При этом под «содержательными результатами» понимаются общие результаты, которые для одного «модельного» распределения (заведомо не самого хорошего) гарантируют точность аппроксимации 10^{-3}. Граница 10^{-3} выбрана достаточно произвольно, но используемые подходы пригодны и для других границ. Большинство из приведенных ниже утверждений суть модификации соответствующих утверждений из [1]. Эта статья не претендует на роль обзорной, ее цель — лишь показать существо дела.

Центральная предельная теорема (ЦПТ) теории вероятностей утверждает, что при достаточно широких условиях сумма большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин имеет приближенно нормальное распределение. ЦПТ — одно из фундаментальных утверждений теории вероятностей, ее актуальность связана с тем, что она позволяет заменять очень сложные распределения сумм случайных величин нормальными распределениями, работа с которыми труда не представляет. Сложность вычисления распределений сумм независимых случайных величин, а такие суммы довольно часто встречаются в прикладных задачах, обусловлена тем, что эти распределения являются свертками распределений суммируемых случайных величин, а свертки распределений (тем более свертки многих распределений) в явном виде вычисляются лишь в исключительных случаях. Даже в этих случаях прямые расчеты по полученным формулам, как правило, невозможны хотя бы потому, что в них входят факториалы достаточно больших чисел. Еще одно обстоятельство, объясняющее важность ЦПТ, состоит в том, что для построения нормальной аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин нет необходимости знать полностью распределения слагаемых, достаточно знать лишь

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08–01–00563 и 09–01–1217ОФИ_М).

некоторые простые числовые характеристики этих распределений. Такими характеристиками являются моменты.

Мы будем использовать моменты

$$\alpha_k = \mathbf{E}X^k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

и абсолютные моменты

$$\beta_s = \mathbf{E}|X|^s = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^s \, dF(x), \quad s > 0.$$

Здесь X — случайная величина, F — ее функция распределения, $\mathbf{E}$ означает математическое ожидание, интегралы понимаются в смысле Римана — Стилтьеса. Рассматривая те или иные несобственные интегралы, всегда предполагаем, что они сходятся абсолютно.

Момент α_1 называется средним значением X; при $\alpha_1 = 0$ момент α_2 совпадает с дисперсией X.

Моменты α_k и β_s можно вычислять по формулам

$$\alpha_k = k \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{k-1}(E_0(x) - F(x)) \, dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\beta_s = s \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^{s-1}|E_0(x) - F(x)| \, dx, \quad s > 0,$$

где $E_0(x)$ — (вырожденная) функция распределения с единичным скачком в точке $x = 0$. По определению полагаем $\alpha_0 = \beta_0 = 1$.

Мы будем иметь дело только с простейшей схемой суммирования, в которой рассматриваются независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \dots$ с конечным вторым моментом, и будем считать (это не ограничивает общности), что их средние равны нулю, а дисперсии — единице. Пусть $F(x) = \mathbf{P}(X_k < x)$, $-\infty < x < \infty$, $k = 1, 2, \dots,$ — общая функция распределения этих случайных величин,

$$F_n(x) = \mathbf{P}\biggl(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} < x\biggr), \quad -\infty < x < \infty, \ n = 1, 2, \dots,$$

— функции распределения их нормированных сумм и $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона. Плотность $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty < x < \infty$, стандартного нормального закона всегда будем обозначать через $\varphi(x)$. Для этой схемы суммирования ЦПТ утверждает, что

$$F_n(x) \to \Phi(x), \quad n \to \infty,$$

равномерно по всем действительным x, т. е. $F_n(x) \approx \Phi(x)$ для всех x при больших n (или, что то же самое, $\mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n < y) \approx \Phi\bigl(\frac{y}{\sqrt{n}}\bigr)$), и мы можем в расчетах заменять $F_n(x)$ на $\Phi(x)$. Однако при такой замене всегда возникает некоторая ошибка и естественно возникает вопрос о величине этой ошибки. Так приходят к задаче об оценке точности аппроксимации в ЦПТ или, как иногда говорят, об оценке скорости сходимости в ЦПТ. Хорошо известно, что для получения содержательных оценок точности аппроксимации в ЦПТ необходимо налагать условия, связанные с существованием моментов порядка выше второго. Самой известной оценкой точности аппроксимации в ЦПТ для случайных величин с конечным третьим моментом является оценка теоремы Берри — Эссеена, которая в нашем случае имеет вид

$$\rho(F_n, \Phi) = \sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - \Phi(x)| \le c\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}, \tag{1}$$

где $c > 0$ — постоянная, β_3 — абсолютный третий момент функции распределения F. История уточнений верхних оценок величины c насчитывает многие десятилетия (об этой истории и о последних достижениях см. [2, 3]). Нижняя оценка величины c, $c \ge c_* = \frac{3+\sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} = 0,4097\ldots$, получена в [4]. Из этой оценки, а также из того, что для случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией всегда $\beta_3 \ge 1$, следует, что для того чтобы правая часть оценки (1) была меньше 0.001, необходимо, чтобы число слагаемых n в нормированных суммах было больше 160000. Для n порядка нескольких десятков или сотен оценка (1) малосодержательна. Малая точность оценки Берри — Эссеена привела к развитию ряда направлений в исследовании точности аппроксимации в ЦПТ, среди которых изучение неравномерных оценок, оценок, содержащих псевдомоменты, а также изучение асимптотических разложений в ЦПТ, о которых пойдет речь ниже. По-видимому, малая точность оценки Берри — Эссеена связана с тем, что она справедлива для очень широкого множества распределений исходных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, поэтому имеет смысл поискать классы распределений, для которых величины $\rho(F_n, \Phi)$ оцениваются точнее, чем в общем случае.

Далее будем для некоторых утверждений давать наброски доказательств, в которых используется метод характеристических функций. Напомним, что *характеристической функцией* случайной величины X или ее функции распределения F называется функция

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x), \quad -\infty < t < \infty,$$

где i — мнимая единица. Если момент порядка k функции распределения F конечен, то соответствующая характеристическая функция $f(t)$ дифференцируема k раз и ее k-я производная равна

$$f^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx}\, dF(x), \quad -\infty < t < \infty.$$

Отсюда следует, что $|f^{(k)}(t)| \le \beta_k$ для всех действительных t,

$$f^{(j)}(0) = i^j \alpha_j, \quad j = 0, 1, \ldots, k,$$

и $f(t)$ допускает представление в виде отрезка ряда Тейлора, которое можно записать в виде

$$f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j}{j!}(it)^j + \gamma\frac{\beta_k}{k!}t^k, \quad -\infty < t < \infty. \tag{2}$$

Здесь и далее одним и тем же символом γ обозначаются измеримые действительные или комплекснозначные функции такие, что $|\gamma| \le 1$, эти функции в разных местах работы, вообще говоря, различны. Равенство (2), которое легко получается из формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, понадобится нам в двух вариантах:

$$f(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \gamma\frac{\beta_3}{3!}t^3 \tag{3}$$

для распределений с конечным третьим моментом, и

$$f(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{\alpha_3}{3!}(it)^3 + \gamma\frac{\beta_4}{4!}t^4 \tag{4}$$

для распределений с конечным четвертым моментом. Напомним, что мы рассматриваем случайные величины $X_1, X_2, \dots$ с нулевым средним и единичной дисперсией. Для данного распределения F (далее термины «распределение» и «функция распределения» используются как синонимы) введем пару (μ, T), где $\mu(t)$ — четная функция, $e^{-\frac{t^2}{2}} \le \mu(t) \le 1$, а $T > 0$ — число, такие, что

$$|f(t)| \le \mu(t), \quad |t| \le T. \tag{5}$$

Такая пара (μ, T) существует всегда, в частности, для распределений с конечным третьим моментом можно взять $\mu(t) = e^{-\frac{t^2}{3}}$ и $T = \frac{1}{\beta_3}$, что легко следует из (3). С помощью пары (μ, T) определим числа

$$B_{k,n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt$$

и

$$B_{k,n-1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt, \quad k, n = 1, 2, \dots.$$

Строго говоря, числа $B_{k,n-1}$ необходимо обозначать как-нибудь иначе, но мы этого делать не будем, так как при фиксированном n всегда будет ясно, о каких величинах идет речь.

Для широкого класса распределений пару (μ, T) можно подобрать так, что $B_{k,n} \to B_k$, $B_{k,n-1} \to B_k$, $n \to \infty$, где B_k — k-й абсолютный момент стандартного нормального закона, деленный на $\sqrt{2\pi}$. Эти соотношения неудивительны, так как если $e^{-\frac{t^2}{2}} \le |f(t)|$ на некотором интервале $(0, T)$, то в качестве функции $\mu(t)$ можно взять $|f(t)|$ и в этом случае $\mu^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\mu^{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$, $n \to \infty$, для любого фиксированного t; если $|f(t)| \le e^{-\frac{t^2}{2}}$ на некотором интервале $(0, T)$, то в качестве $\mu(t)$ можно взять $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Подробнее о выборе пары (μ, T) см. [1].

Будем говорить, что функция распределения *гладкая*, если для ее характеристической функции $f(t)$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, |f(t)| < 1 \tag{6}$$

и для некоторого числа $\nu > 0$

$$\int\limits_1^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t}\, dt < \infty. \tag{7}$$

Из условия (6), называемого *условием Крамера*, следует, что функция распределения $F(x)$ имеет непрерывную компоненту, т. е. $F(x)$ можно представить в виде $pU(x)+qV(x)$, где U и V — функции распределения, причем $U(x)$ непрерывна, а p и q — неотрицательные числа, $p+q=1$, причем $p>0$. Из выполнения условия (7) следует непрерывность функции $F(x)$. Нетрудно показать, что при выполнении условия Крамера

$$\alpha(T)=\sup\{|f(t)|:t\geq T\}<1$$

для любого $T>0$.

Оказывается, что для гладких распределений величину $\rho(F_n,\Phi)$ можно оценить существенно точнее, чем в (1).

Теорема 1. *Если для распределения F выполнены условия* (6) *и* (7), *то для $n\geq\nu$*

$$\rho(F_n,\Phi)\leq\frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}B_{2,n-1}+\frac{1}{8n}B_{3,n-1}+\frac{\alpha^{n-\nu}(T)}{\pi}\int\limits_T^\infty\frac{|f(t)|^\nu}{t}\,dt+\frac{e^{-T^2n/2}}{\pi T^2n}$$

для распределений с конечным третьим моментом и

$$\rho(F_n,\Phi)\leq\frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{n}}B_{2,n-1}+\frac{\beta_4+3}{4!n}B_{3,n-1}+\frac{\alpha^{n-\nu}(T)}{\pi}\int\limits_T^\infty\frac{|f(t)|^\nu}{t}\,dt+\frac{e^{-T^2n/2}}{\pi T^2n}$$

для распределений с конечным четвертым моментом. Здесь величина T та же, что в (5), *а α_3,β_3,β_4 — моменты распределения F.*

Отметим, что два последних слагаемых в каждой из оценок теоремы 1 при росте n убывают экспоненциально быстро.

Доказательство. Воспользуемся формулой обращения

$$F_n(x)-\Phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\frac{f^n\big(\frac{t}{\sqrt{n}}\big)-g^n\big(\frac{t}{\sqrt{n}}\big)}{-it}\,dt, \tag{8}$$

где $g(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$. Справедливость формулы (8) при $n\geq\nu$ гарантируется условием (7). Из (8) следует, что при всех действительных x

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}}\frac{\big|f^n\big(\frac{t}{\sqrt{n}}\big)-g^n\big(\frac{t}{\sqrt{n}}\big)\big|}{|t|}\,dt$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{T\sqrt{n}}^{\infty}\frac{\big|f\big(\frac{t}{\sqrt{n}}\big)\big|^n}{t}\,dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{T\sqrt{n}}^{\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\,dt. \tag{9}$$

Последнее слагаемое в правой части этого неравенства не превосходит

$$\frac{1}{\pi T^2n}\int\limits_{T\sqrt{n}}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\frac{e^{-T^2n/2}}{\pi T^2n},$$

а предпоследнее не превосходит

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_T^\infty \frac{|f(t)|^n}{t}\,dt \le \frac{\alpha^{n-\nu}(T)}{\pi}\int\limits_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t}\,dt.$$

Для оценки первого слагаемого в правой части (9) заметим, что

$$f^n\biggl(\frac{t}{\sqrt{n}}\biggr) - g^n\biggl(\frac{t}{\sqrt{n}}\biggr) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1}\biggl(\frac{t}{\sqrt{n}}\biggr) g^j\biggl(\frac{t}{\sqrt{n}}\biggr)\biggl(f\biggl(\frac{t}{\sqrt{n}}\biggr) - g\biggl(\frac{t}{\sqrt{n}}\biggr)\biggr)$$

и по выбору числа T абсолютная величина правой части последнего равенства при $|t| \le T\sqrt{n}$ не превосходит $\bigl|f\bigl(\frac{t}{\sqrt{n}}\bigr) - g\bigl(\frac{t}{\sqrt{n}}\bigr)\bigr| n\mu^{n-1}\bigl(\frac{t}{\sqrt{n}}\bigr)$. Так как

$$g\biggl(\frac{t}{\sqrt{n}}\biggr) = e^{-\frac{t^2}{2n}} = 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\gamma}{2}\biggl(\frac{t^2}{2n}\biggr)^2,$$

используя равенства (3) и (4), видим, что для всех действительных t справедливы неравенства

$$\biggl|f\biggl(\frac{t}{\sqrt{n}}\biggr) - g\biggl(\frac{t}{\sqrt{n}}\biggr)\biggr| \le \frac{\beta_3}{6}\biggl|\frac{t}{\sqrt{n}}\biggr|^3 + \frac{1}{8}\frac{t^4}{n^2}$$

при $\beta_3 < \infty$ и

$$\biggl|f\biggl(\frac{t}{\sqrt{n}}\biggr) - g\biggl(\frac{t}{\sqrt{n}}\biggr)\biggr| \le \frac{|\alpha_3|}{6}\biggl|\frac{t}{\sqrt{n}}\biggr|^3 + \frac{\beta_4+3}{4!}\frac{t^4}{n^2}$$

при $\beta_4 < \infty$.

Завершение доказательства теоремы 1 почти очевидно. □

Нетрудно показать, что при конечности β_4 пару (μ, T) можно выбрать так, что $B_{k,n-1} = B_k + O\bigl(\frac{1}{n}\bigr)$ при $n \to \infty$ для любого $k = 1, 2, \dots$. Так как $B_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, второе неравенство теоремы 1 можно записать в виде

$$\rho(F_n, \Phi) \le \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi}\sqrt{n}} + O\biggl(\frac{1}{n}\biggr), \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Эта оценка неулучшаема в том смысле, что постоянную $\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}$ нельзя заменить меньшим числом. Отметим, что величина $\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}$ в этой верхней оценке $\rho(F_n, \Phi)$ в $3 + \sqrt{10}$ раз меньше величины c_*, которая является нижней оценкой постоянной c из (1).

Для того чтобы получить представление о численных значениях величин, входящих в верхние оценки, в качестве модельного будем использовать распределение случайной величины $X = \frac{Y_1 - 1 + Y_2 - 1}{\sqrt{2}}$, где Y_1 и Y_2 — независимые случайные величины с экспоненциальным распределением, плотность которого равна e^{-x} при $x \ge 0$ и нулю при $x < 0$. Нетрудно проверить, что для этой случайной величины X среднее равно нулю, дисперсия — единице, $\alpha_3 = \sqrt{2}$, $\beta_4 = \alpha_4 = 6$, абсолютная величина ее характеристической функции $|f(t)| = \frac{1}{1+t^2/2}$. Так как $e^{-\frac{t^2}{2}} \le \frac{1}{1+t^2/2}$ при всех действительных t, в качестве функции $\mu(t)$ можно взять $\mu(t) = \frac{1}{1+t^2/2}$ и в качестве T — любое положительное число.

Рассмотрим последовательность $X_1, X_2, \dots$ независимых случайных величин с тем же распределением, что у X. Воспользовавшись второй оценкой теоремы 1, в которой для $n \geq 4$ можно переходить к пределу при $T \to \infty$, получаем неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{n}} \overline{B}_{2,n-1} + \frac{9}{4!n} \overline{B}_{3,n-1},$$

где $\overline{B}_{2,n-1}$ и $\overline{B}_{3,n-1}$ — предельные (при $T \to \infty$) значения соответствующих величин из оценки теоремы 1. Нетрудно проверить (см., например, [1, гл. 4]), что

$$\overline{B}_{2,n-1} = B_2 \frac{n^{3/2}\Gamma(n-5/2)}{\Gamma(n-1)} \leq B_2 \frac{n^{3/2}\sqrt{n-3}\Gamma(n-3)}{\Gamma(n-1)} = B_2 \frac{n^{3/2}\sqrt{n-3}}{(n-2)(n-3)}$$

и

$$\overline{B}_{3,n-1} = B_3 \frac{n^2\Gamma(n-3)}{\Gamma(n-1)} = B_3 \frac{n^2}{(n-2)(n-3)}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\Gamma(k+1/2) \leq \sqrt{k}\Gamma(k)$, $k > 0$. Так как $B_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и $B_3 = \frac{2}{\pi}$, при $n \geq 5000$ имеем $\overline{B}_{2,n-1} \leq 0.4$ и $\overline{B}_{3,n-1} \leq 0.64$. Отсюда следует, что при указанных n

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{0.095}{\sqrt{n}} + \frac{0.24}{n},$$

что меньше 10^{-3} при $n \geq 9500$.

Отметим, что распределение введенной выше величины X является нормированным хи-квадрат распределением с четырьмя степенями свободы. Приближения нормированных хи-квадрат распределений исследовались в [5].

Выше мы отмечали, что, пользуясь оценкой теоремы Берри — Эссеена, неравенство $\rho(F_n, \Phi) \leq 10^{-3}$ можно надеяться получить лишь для $n > 160000$. Для нашего модельного распределения эту нижнюю оценку следует увеличить до 335760, поскольку для этого распределения

$$c_* \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} = \frac{3+\sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} > \frac{3+\sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} > 10^{-3}$$

при $n < 335760$.

Таким образом, для нашего модельного распределения нижняя оценка величин n таких, что $\rho(F_n, \Phi) \leq 10^{-3}$, которая следует из теоремы 1, уменьшается более, чем в 35 раз, по сравнению с оценкой n, которая вытекает из теоремы Берри — Эссеена.

Условия (6) и (7) не выполняются для функций распределения дискретных случайных величин, в частности, для очень важных в приложениях решетчатых распределений. Однако оценку близости $F_n(x)$ и $\Phi(x)$ с правой частью, отличающейся от правой части (10) на $O\big(\frac{1}{n}\big)$, $n \to \infty$, можно получить и для решетчатых распределений, правда, при этом необходимо изменить постановку задачи.

Пусть общая функция распределения F независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots$ с нулевым средним и единичной дисперсией является решетчатой с шагом $h > 0$, т. е. $F(x)$ изменяется только скачками и множество ее точек разрыва принадлежит некоторой решетке $D = \{a + kh : k = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$, где a — действительное число и величину h нельзя увеличить. Функция распределения F_n нормированной суммы $\frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}}$ также является решетчатой, ее шаг равен $\frac{h}{\sqrt{n}}$, и ее точки разрыва принадлежат решетке $D_n = \bigl\{a_n + k\frac{h}{\sqrt{n}} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\bigr\}$, где в качестве a_n можно взять, например, $a_n = a\sqrt{n}$.

В силу ЦПТ $\mathbf{P}\bigl(-1 < \frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}} < 1\bigr) \to \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.68\dots$, поэтому указанная вероятность больше 0.6 начиная с некоторого n. Число скачков $F_n(x)$ на интервале $(-1, 1)$ не превосходит $2/\bigl(\frac{h}{\sqrt{n}}\bigr) = \frac{2\sqrt{n}}{h}$, поэтому максимальный скачок F_n не меньше $0.6/\bigl(\frac{2\sqrt{n}}{h}\bigr) = \frac{0.3\cdot h}{\sqrt{n}}$.

Так как равномерное расстояние между $F_n(x)$ и любой непрерывной функцией не меньше половины максимального скачка F_n, то $\rho(F_n, \Phi) \ge \frac{0.15\cdot h}{\sqrt{n}}$ при любых (сколь угодно жестких) ограничениях на значения моментов F. Поэтому формальный аналог второго утверждения теоремы 1 для решетчатых распределений с нулевым третьим моментом неверен.

Следует сказать, что существует довольно распространенное мнение о том, что в задаче об оценке скорости сходимости в ЦПТ самыми плохими распределениями являются решетчатые, а среди решетчатых — распределения с двумя точками роста. Это подкрепляется и некоторыми хорошо известными фактами. Например, для симметричного относительно нуля распределения F с двумя точками разрыва 1 и -1 величина $\rho(F_n, \Phi)$ асимптотически равна $\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{0.3989\dots}{\sqrt{n}}$. Постоянная $0.3989\dots$ довольно близка к нижней оценке постоянной из (1), т. е. к величине $0.4097\dots$, которая была получена Эссееном при помощи распределения, также имеющего две точки разрыва. Приведенное выше мнение безусловно правильно, если мы рассматриваем задачу об оценке точности аппроксимации в ЦПТ в равномерной метрике. Однако если мы изменим постановку задачи и будем рассматривать разность $F_n(x) - \Phi(x)$ лишь в точках $x \in D_n + \frac{h}{2\sqrt{n}}$, т. е. на множестве D_n, сдвинутом на $\frac{h}{2\sqrt{n}}$ (грубо говоря, в серединах интервалов постоянства функции $F_n(x)$), то можно получать результаты, которые (асимптотически) не хуже, чем для гладких распределений. При этом ясно, что, зная решетчатую функцию распределения $F_n(x)$ только в указанных точках, мы знаем ее значения на всей действительной оси. (Близкая постановка задачи рассматривалась в [6].)

Теорема 2. *Если функция распределения F решетчата с шагом h и ее четвертый момент конечен, то*

$$\max_{x \in D_n + \frac{h}{2\sqrt{n}}} |F_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{n}} B_{2,n-1} + O\biggl(\frac{1}{n}\biggr), \quad n \to \infty.$$

Мы не приводим здесь явной оценки величины $O\bigl(\frac{1}{n}\bigr)$, такую оценку нетрудно получить, основываясь на рассуждениях, приведенных ниже.

Доказательство теоремы 2 можно получить с помощью формулы обращения

$$F_n(x) - \Phi(x) = \frac{i}{2\pi}\frac{h}{2\sqrt{n}} \int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{f^n\bigl(\frac{t}{\sqrt{n}}\bigr) - e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sin\bigl(\frac{th}{2\sqrt{n}}\bigr)}\, dt + \frac{i}{2\pi}\frac{h}{2\sqrt{n}} \int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}} \Biggl(\frac{1}{\sin\bigl(\frac{th}{2\sqrt{n}}\bigr)} - \frac{1}{\frac{th}{2\sqrt{n}}}\Biggr)\, dt$$

$$+\frac{i}{2\pi}\frac{h}{2\sqrt{n}}\int\limits_{T\sqrt{n}<|t|\le\frac{\pi\sqrt{n}}{h}} e^{-itx}\frac{f^n\big(\frac{t}{\sqrt{n}}\big)}{\sin\big(\frac{th}{2\sqrt{n}}\big)}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|>T\sqrt{n}} e^{-itx}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{it}\,dt, \tag{11}$$

которая справедлива для всех $x\in D_n+\frac{h}{2\sqrt{n}}$ и любого $0<T\le\frac{\pi}{h}$. Эта формула является простым следствием формулы обращения из [1, гл. 5].

Возьмем в качестве T в (11) значение T из (5), если оно меньше $\frac{\pi}{h}$, и положим $T=\frac{\pi}{h}$ в противном случае. Очевидно, что абсолютная величина последнего слагаемого в правой части (11) не превосходит $\frac{1}{\pi T^2 n}e^{-T^2n/2}$.

Для оценки предпоследнего слагаемого в (11) в случае $T<\pi/h$ введем

$$\alpha(T)=\max\{|f(t)| : T\le t\le\pi/h\}. \tag{12}$$

Для любого положительного $T<\pi/h$ значение $\alpha(T)$ строго меньше 1. Совпадение обозначения $\alpha(T)$ с аналогичным для гладких распределений не приведет к недоразумениям.

Так как на области интегрирования в третьем слагаемом правой части (11) имеем $0<\frac{\frac{th}{2\sqrt{n}}}{\sin(\frac{th}{2\sqrt{n}})}\le\frac{\pi}{2}$, модуль этого слагаемого не превосходит

$$\frac{1}{2\pi}\frac{h}{2\sqrt{n}}\frac{\pi}{2}\int\limits_{T\sqrt{n}\le|t|\le\pi\sqrt{n}/h}\frac{\big|f\big(\frac{t}{\sqrt{n}}\big)\big|^n}{(|t|h)/(2\sqrt{n})}\,dt\le\frac{\alpha^n(T)}{2}\int\limits_{T\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}/h}\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\alpha^n(T)\log\bigg(\frac{\pi}{hT}\bigg),$$

а эти величины при росте n убывают экспоненциально быстро.

Поскольку $\sin u=u-\gamma\frac{u^3}{6}$, $|\gamma|\le 1$, и $\frac{1}{(1-v)}=1+\frac{v}{(1-v)}$ для любого $v\ne 1$, то

$$\frac{1}{\sin\big(\frac{th}{2\sqrt{n}}\big)}=\frac{1}{\frac{th}{2\sqrt{n}}}+\frac{\gamma}{6}\frac{\frac{th}{2\sqrt{n}}}{1-\frac{\gamma}{6}\big(\frac{th}{2\sqrt{n}}\big)^2}$$

и почти очевидно, что модуль второго слагаемого в правой части (11) оценивается величиной, асимптотически равной $\frac{1}{6}\big(\frac{h}{2\sqrt{n}}\big)^2B_1$.

Наконец, нетрудно понять, что первое слагаемое в правой части (11) является суммой

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx}\frac{f^n\big(\frac{t}{\sqrt{n}}\big)-e^{-\frac{t^2}{2}}}{-it}\,dt \tag{13}$$

и величины, которая есть $O\big(\frac{1}{n^{3/2}}\big)$ при $n\to\infty$ и для которой нетрудно получить явную оценку. Ясно, что модуль (13) оценивается первым слагаемым в правой части (9), и утверждение теоремы 2 становится очевидным. $\square$

Легко понять, что аппроксимация функции распределения $F_n(x)$ для $x\in D_n+\frac{h}{2\sqrt{n}}$ дает аппроксимацию $F_n(x)$ для всех действительных x, поскольку

$$\max_{x\in D_n+\frac{h}{2\sqrt{n}}}|F_n(x)-\Phi(x)|=\sup_{-\infty<x<\infty}|F_n(x)-\Phi(y(x;D_n))|,$$

где $y(x;D_n)$ — ближайшая к x точка решетки $D_n+\frac{h}{2\sqrt{n}}$, если $x\notin D_n$, и $y=x-\frac{h}{2\sqrt{n}}$, если $x\in D_n$. Из теоремы 2 следует, что для решетчатых распределений F с нулевым третьим моментом и конечным четвертым моментом разность $F_n(x)-$

$\Phi(x)$ для $x \in D_n + \frac{h}{2\sqrt{n}}$ есть $O\big(\frac{1}{n}\big)$ при $n \to \infty$, в то время как из сказанного выше следует, что равномерное расстояние $\rho(F_n, \Phi)$ при росте n убывает не быстрее, чем $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Утверждения теорем 1 и 2 полезно сравнить с результатами из недавней работы [7].

Говоря о поисках классов распределений, для которых точность аппроксимации в ЦПТ выше, чем в общем случае, необходимо упомянуть одну теорему И. А. Ибрагимова (см., например, [8]), в которой рассматривался вопрос о связи между скоростью стремления к нулю величин $\rho(F_n, \Phi)$ и значениями моментов функции распределения F исходных случайных величин $X_1, X_2, \dots$. Для наших целей достаточно одного следствия этой теоремы.

Если $\beta_{m+2} < \infty$, где $m \geq 2$ — натуральное число, моменты α_j, $j = 3, \dots, m+1$, совпадают с соответствующими моментами нормального закона Φ и выполнено условие Крамера, то $\rho(F_n, \Phi) = O\big(\frac{1}{n^{m/2}}\big)$, $n \to \infty$; обратно, если $\rho(F_n, \Phi) = O\big(\frac{1}{n^{m/2}}\big)$, то необходимо, чтобы моменты α_j, $j = 3, \dots, m+1$, совпадали с соответствующими моментами нормального закона Φ и для четных m необходимо существование момента β_{m+2}, а для нечетных m — выполнение условий

$$\int\limits_{|x|>z} |x|^{m+1}\, dF(x) = O\bigg(\frac{1}{z}\bigg), \quad \int\limits_{-z}^{z} x^{m+2}\, dF(x) = O(1), \quad z \to \infty.$$

При выполнении приведенных достаточных условий теоремы Ибрагимова нетрудно получить оценки величин $\rho(F_n, \Phi)$, стремящиеся при росте n к нулю как $\frac{1}{n^{m/2}}$. Примером такой оценки является вторая оценка теоремы 1. Таких оценок уже при не очень больших m хватило бы для большинства практических расчетов, однако их применению препятствует необходимое условие на совпадение моментов α_j распределения F с соответствующими моментами закона Φ. Это препятствие преодолевается в асимптотических разложениях за счет того, что функции распределения $F_n(x)$ аппроксимируются суммой $\Phi(x)$ и слагаемых, которые связаны с моментами α_j, $j = 3, \dots, m+1$, и стремятся к нулю при росте n как $\frac{1}{\sqrt{n}}$ и быстрее.

Прежде чем рассматривать асимптотические разложения, кратко остановимся на локальных формах ЦПТ. Существуют две локальные формы ЦПТ: одна из них — для плотностей функций распределения F_n, другая — для величин скачков F_n, если F — решетчатая функция распределения. В первой из них необходимо налагать ограничения, обеспечивающие существование плотности распределения F_n и справедливость самой локальной теоремы. В качестве такого ограничения будем использовать условие

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{\nu}\, dt < \infty \tag{14}$$

для некоторого $\nu > 0$, где f — характеристическая функция распределения F.

При выполнении этого условия у функции распределения F_n для $n \geq \nu$ существует непрерывная плотность $p_n(x) = F_n'(x)$, которую можно вычислять по формуле обращения

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f^n\bigg(\frac{t}{\sqrt{n}}\bigg)\, dt, \quad -\infty < x < \infty. \tag{15}$$

Поэтому при $n \geq \nu$

$$p_n(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left[f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \left[f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right] dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|x|>T\sqrt{n}} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt$$
$$- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|x|>T\sqrt{n}} e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \quad (16)$$

где значение T то же, что в (5). Очевидно, что абсолютная величина последнего слагаемого не превосходит $\frac{1}{\pi T\sqrt{n}} e^{-\frac{T^2 n}{2}}$. Из существования плотности $p_n(x)$ следует, что $f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \to 0$, поэтому и $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$, откуда вытекает выполнение условия Крамера и строгое неравенство $\alpha(T) < 1$ для любого $T > 0$, где величина $\alpha(T)$ та же, что в теореме 1. Теперь очевидно, что модуль второго слагаемого в правой части (16) не превосходит $\frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int\limits_T^\infty |f(t)|^\nu\, dt$, а эти величины при росте n стремятся к нулю экспоненциально быстро. Первое слагаемое в правой части (16) рассматривается так же, как в теореме 1. Теперь очевидна справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Если для распределения F выполнено условие* (14) *и его четвертый момент конечен, то при $n \geq \nu$ для всех действительных x*

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{n}} B_{3,n-1} + \frac{\beta_4 + 3}{4!n} B_{4,n-1}$$
$$+ \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int\limits_T^\infty |f(t)|^\nu\, dt + \frac{1}{\pi T\sqrt{n}} e^{-\frac{T^2 n}{2}}, \quad (17)$$

где значение T то же, что в (5).

Обратимся теперь к локальной форме ЦПТ для решетчатых распределений. Обозначим через $p_n(x)$, $x \in D_n$, скачок функции распределения F_n в точке x решетки D_n, определенной выше. Совпадение этого обозначения с аналогичным для плотности $p_n(x)$, $-\infty < x < \infty$, не приведет к недоразумениям. Из одной хорошо известной формулы обращения следует, что для решетчатых распределений F

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{\sqrt{n}} \int\limits_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt, \quad x \in D_n,$$

или

$$\frac{\sqrt{n}}{h} p_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt, \quad x \in D_n,$$

и очевидно, что правая часть последней формулы обращения отличается от правой части (15) лишь областью интегрирования. Определив число T так же, как в теореме 2, видим, что

$$\frac{\sqrt{n}}{h}p_n(x)-\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}}e^{-itx}\left[f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]dt$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T\sqrt{n}<|x|\le\pi\sqrt{n}/h}e^{-itx}f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x|>T\sqrt{n}}e^{-itx}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,\quad x\in D_n.$$

Легко понять, что *для решетчатых распределений модуль разности* $\frac{\sqrt{n}}{h}p_n(x)-\varphi(x)$, $x\in D_n$, *оценивается правой частью* (17), *в которой третье слагаемое следует заменить на* $\frac{\sqrt{n}}{\pi}\alpha^n(T)\left(\frac{\pi}{h}-T\right)$, *где величина* $\alpha(T)$ *определена равенством* (12).

Асимптотические разложения в ЦПТ были известны еще в начале 20-го века. В 1920-х гг. существенный вклад в их развитие внес Г. Крамер. Он и его последователи получили важные результаты (с некоторыми из них можно познакомиться по монографии [9]), которые, однако, обладали существенным недостатком: оценки точности аппроксимации, которую гарантируют асимптотические разложения, нельзя было доводить до численных значений. Первые результаты, свободные от этого недостатка, получены в [10, 11], они позволяли получать для функций распределения $F_n(x)$ аппроксимацию точности $O\left(\frac{1}{n}\right)$, причем для величин $O\left(\frac{1}{n}\right)$ были указаны явные оценки.

Первые разложения с явными оценками, дающие большую точность, появились в последние годы 20-го века, их построение было основано на использовании сопровождающих зарядов. Основная идея состояла в следующем. Попробуем для данного гладкого распределения F независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots$ подобрать гладкое распределение G, многократные свертки которого легко вычисляются, и такое, что нормированные n-кратные свертки $G_n(x)=G^{*n}(\sqrt{n}x)$ при росте n сближаются с функциями распределения $F_n(x)=F^{*n}(\sqrt{n}x)$ нормированных сумм быстрее, чем F_n (и G_n) приближаются к нормальному закону Φ. Если мы сумеем это сделать, то в качестве аппроксимаций для распределений F_n можно взять распределения G_n или асимптотические разложения для G_n. Такие распределения G_n можно назвать сопровождающими для F_n. Упоминавшаяся выше теорема Ибрагимова подсказывает, что в качестве распределений G (их выбор не единствен) следует брать распределения, несколько первых моментов которых совпадают с соответствующими моментами F. При реализации этого подхода основным является вопрос о том, для каких распределений G легко вычисляются многократные нормированные свертки.

Далее нам понадобятся многочлены Чебышёва — Эрмита, которые определяются равенствами $H_k(x)=(-1)^k\frac{\varphi^{(k)}(x)}{\varphi(x)}$, $k=0,1,\dots$, где $\varphi(x)$ — плотность стандартного нормального закона. Легко проверить, что первые пять многочленов Чебышёва — Эрмита суть $H_0(x)\equiv 1$, $H_1(x)=x$, $H_2(x)=x^2-1$, $H_3(x)=x^3-3x$, $H_4(x)=x^4-6x^2+3$. Многочлены Чебышёва — Эрмита ортогональны с весом $\varphi(x)$, точнее,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_k(x)H_l(x)\varphi(x)\,dx=\delta_{kl}l!,\quad k,l=0,1,2,\dots,\tag{18}$$

где δ_{kl} — символ Кронекера, $\delta_{kl}=0$ при $k\ne l$ и $\delta_{kl}=1$, $k=l$. Хорошо известно,

что
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} H_k(x)\varphi(x)\,dx = (it)^k e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad -\infty < t < \infty,\ k = 0,1,2,\dots, \tag{19}$$
и
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}(it)^k e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = H_k(x)\varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,\ k = 0,1,2,\dots. \tag{20}$$

Будет удобно вначале рассмотреть асимптотические разложения для плотностей распределений нормированных сумм, а затем получать разложения для функций распределения. Рассмотрим распределения G с плотностями
$$q(x) = \sum_{s\ge 0}\frac{\theta_s}{s!}H_s(x)\varphi(x), \tag{21}$$
где $\theta_s,\ s = 0,1,2,\dots,$ — некоторые числа и сумма содержит конечное число слагаемых. С помощью равенств (18) легко проверить, что
$$\theta_s = \theta_s(G) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_s(x)\,dG(x), \quad s = 0,1,2,\dots.$$

Числа θ_s, $s = 0,1,2,\dots$, будем называть *моментами Чебышёва — Эрмита распределения* G, их можно вычислять по формуле
$$\frac{\theta_s}{s!} = \sum_{j=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}\frac{\alpha_{s-2j}}{(s-2j)!}\frac{(-1)^j}{2^j j!}, \quad s = 0,1,2,\dots, \tag{22}$$
где $\alpha_{s-2j},\ j = 0,1,\dots,\left[\frac{s}{2}\right],$ — (степенные) моменты распределения G. Легко проверить, что $\theta_0 = 1$ для любого распределения и для распределений с нулевым средним и единичной дисперсией $\theta_1 = \theta_2 = 0,\ \theta_3 = \alpha_3,\ \theta_4 = \alpha_4 - 3$. Моменты θ_3 и θ_4 давно используются в математической статистике и называются *асимметрией* и *эксцессом.*

Для распределений с нулевым средним и единичной дисперсией равенство (21) принимает вид
$$q(x) = \varphi(x) + \sum_{s\ge 3}\frac{\theta_s}{s!}H_s(x)\varphi(x). \tag{23}$$
Оказывается, что множество распределений с плотностями (23) замкнуто относительно перехода к нормированным сверткам, т. е. если G имеет плотность (23), то нормированная свертка G_n имеет плотность
$$q_n(x) = \varphi(x) + \sum_{l\ge 3}\frac{\theta_l(G_n)}{l!}H_l(x)\varphi(x). \tag{24}$$

Для того чтобы проверить это, нужно вычислить с помощью равенств (19) характеристическую функцию $g(t)$ распределения G, воспользоваться тем, что характеристическая функция G_n есть $g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}M(t,n,G)$, где $M(t,n,G)$ — некоторый многочлен от переменной it, а затем применить формулы обращения (20). Из полиномиальной формулы (обобщения бинома Ньютона) легко получить связь между моментами Чебышёва — Эрмита распределения G_n и моментами Чебышёва — Эрмита распределения G:

$$\frac{\theta_l(G_n)}{l!} = \sum \frac{n!}{(n-(k_3+\dots+k_l))!k_3!\dots k_l!}\left(\frac{\theta_3}{3!n^{3/2}}\right)^{k_3}\dots\left(\frac{\theta_l}{l!n^{l/2}}\right)^{k_l}. \qquad (25)$$

Здесь $\frac{l}{3} \le n$ и суммирование проводится по всем наборам $k_3, k_4, \dots, k_l$ неотрицательных целых чисел таким, что $3k_3 + \dots + lk_l = l$.

Таким образом, вычисление многократных нормированных сверток распределений с плотностями (23) сводится лишь к алгебраическим операциям.

Если мы захотим в качестве сопровождающих для распределений F_n взять распределения G_n с плотностями (24), то в (23) следует положить $\theta_s = \theta_s(F)$ для всех s, участвующих в сумме в правой части (23), при этом может оказаться, что функция $q(x)$, а вместе с ней и $q_n(x)$ будут знакопеременными, т. е. вместо сопровождающих распределений нам придется иметь дело с сопровождающими зарядами (знакопеременными мерами). Для зарядов с плотностями (23) замкнутость относительно перехода к нормированным сверткам сохраняется, но может случиться, что заряды G_n не сходятся к Φ при $n \to \infty$, поэтому при использовании сопровождающих зарядов иногда приходится налагать ограничения на значения моментов F. Мы не будем на этом останавливаться, так как в настоящее время известны (см., например, [1, гл. 4, § 14; 12]) асимптотические разложения, при построении которых сопровождающие заряды не используются и которые свободны от ограничений на моменты.

В качестве сопровождающих зарядов можно использовать и заряды, отличающиеся от тех, что рассматривались выше. Например, можно использовать заряды, являющиеся нормированными свертками заряда с характеристической функцией $g_3(t) = e^{-\frac{t}{2}^2} e^{\frac{\theta_3}{3!}(it)^3}$, $-\infty < t < \infty$, где $\theta_3 = \alpha_3$ — третий момент распределения F. С помощью этих зарядов можно получить следующее утверждение.

Теорема 4. *Если для распределения F выполнено условие* (14) *и его четвертый момент конечен, то для $n \ge \nu$ плотности $p_n(x)$ допускают представление*

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}} H_3(x)\varphi(x) + R, \quad -\infty < x < \infty,$$

где

$$|R| \le \frac{\beta_4+3}{4!}\frac{B_{4,n-1}}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{B_6}{n} + \frac{|\alpha_3|}{12}\frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{\sqrt{n}}{\pi}\alpha^{n-\nu}(T)\int_T^\infty |f(t)|^\nu\,dt + \frac{1}{\pi T\sqrt{n}} e^{-\frac{T^2 n}{2}},$$

и

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}} H_3(x)\varphi(x) + \frac{1}{2n}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 H_6(x)\varphi(x) + R, \quad -\infty < x < \infty,$$

где оценка последней величины R отличается от предыдущей лишь заменой $\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{B_6}{n}$ на $\frac{1}{3!}\left(\frac{|\theta_3|}{3!}\right)^3\frac{B_9}{n^{3/2}}$. Здесь T то же, что в (5).

Можно сказать, что второе разложение этой теоремы отличается от первого тем, что слагаемое $\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{B_{6,n}}{n^2}$ из оценки остаточной части первого разложения «перешло» (в виде $\frac{1}{2n}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 H_6(x)\varphi(x)$) в главную часть второго, и вместо него в оценке остаточной части (второго разложения) появилось слагаемое $\frac{1}{3!}\left(\frac{|\theta_3|}{3!}\right)^3\frac{B_9}{n^{3/2}}$.

Для доказательства этой и следующих теорем используется

Лемма. *Если момент β_{m+2}, $m \geq 2$ целое, распределения F конечен, то функция $e^{\frac{t^2}{2}} f(t)$, где f — характеристическая функция F, допускает представление*

$$e^{\frac{t^2}{2}} f(t) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{\theta_k}{k!}(it)^k + \gamma e^{\frac{t^2}{2}} \frac{\|\theta_{m+2}\|}{(m+2)!} t^{m+2} + \gamma e^{\frac{t^2}{2}} \frac{\|\theta_{m+3}^{(m+1)}\|}{(m+3)!} t^{m+3}, \qquad (26)$$

где θ_k, $k = 0, 1, \ldots, m+1$, — моменты Чебышёва — Эрмита распределения F, γ — комплекснозначные функции такие, что $|\gamma| \leq 1$, величина $\|\theta_{m+2}\|$ вычисляется по формуле (22), в которой следует положить $s = m+2$, заменить $(-1)^j$ на 1, кроме того, для нечетных m заменить моменты их абсолютными значениями и вместо α_{m+2} использовать β_{m+2}. Величины $\|\theta_{m+3}^{(m+1)}\|$ вычисляются аналогично, но при этом момент α_{m+3} порядка $m+3$ (который не обязан существовать) не используется.

Замечание. При $m = 2$ последнее слагаемое в правой части (26) равно $\gamma e^{\frac{t^2}{2}} \frac{\alpha_3}{12} t^5$, а вместо предпоследнего слагаемого можно использовать величину $\gamma e^{\frac{t^2}{2}} \frac{\beta_4 + 3}{4!} t^4$.

Доказательство этой леммы содержится в [1].

При использовании сопровождающих зарядов построение асимптотических разложений с явными оценками остаточных частей обычно осуществляется в два этапа. Вначале оценивается близость $p_n(x)$ и $q_n(x)$, а затем строятся разложения для $q_n(x)$ с явными оценками остаточных частей.

Доказательство теоремы 4. Для оценки близости $p_n(x)$ и $q_n(x)$ в теореме 4, которую докажем, используя заряд с характеристической функцией g_3, заметим, что при выполнении условия (14) разность $p_n(x) - q_n(x)$, $n \geq \nu$, можно вычислять по формуле обращения

$$p_n(x) - q_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left[f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g_3^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right] dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Рассуждения, аналогичные тем, что привели к утверждениям теоремы 1, приводят к равенству

$$p_n(x) - q_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} f^{n-j-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \times g_3^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \left[f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g_3\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right] dt + R, \qquad (27)$$

где

$$|R| \leq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^{\infty} |f(t)|^\nu \, dt + \frac{1}{\pi T \sqrt{n}} e^{-\frac{T^2 n}{2}}. \qquad (28)$$

С помощью замечания к лемме разность $f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g_3\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ можно записать в виде

$$g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\left(e^{\frac{t^2}{2n}} f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{\frac{\theta_3}{3!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3} \right)$$

$$= g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{\theta_3}{3!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3+\gamma e^{\frac{t^2}{2n}}\frac{\beta_4+3}{4!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4+\gamma e^{\frac{t^2}{2n}}\frac{\alpha_3}{12}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^5\right.$$
$$\left.-\left(1+\frac{\theta_3}{3!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6\right)\right)$$
$$= \gamma\frac{\beta_4+3}{4!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4+\gamma\frac{\alpha_3}{12}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^5-\frac{\gamma}{2}g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6,$$

где $g(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Так как при $|t|\le T\sqrt{n}$ верны неравенства $\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|\le \mu\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ и $\left|g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|\le \mu\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$, абсолютная величина суммы по j в правой части (27) не превосходит

$$\frac{n}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}}\left(\frac{\beta_4+3}{4!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4+\frac{|\alpha_3|}{12}\left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^5\right)\mu^{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt$$
$$+\frac{n}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}}\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6\mu^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt$$
$$=\frac{\beta_4+3}{4!}\frac{B_{4,n-1}}{n}+\frac{|\alpha_3|}{12}\frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{B_{6,n}}{n^2}. \qquad (29)$$

Сумма правых частей (28) и (29) дает оценку величины $|p_n(x)-q_n(x)|$.

Построение асимптотического разложения плотности $q_n(x)$ труда не представляет, так как

$$q_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}g_3^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{\frac{\theta_3}{3!}\frac{(it)^3}{\sqrt{n}}}\,dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\frac{\theta_3}{3!}\frac{(it)^3}{\sqrt{n}}+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{t^6}{n}\right)dt=\phi(x)+\frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}}H_3(x)\phi(x)+R,$$

где $|R|\le\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{B_6}{n}$. Здесь использована формула обращения (20) для $k=0,3$. Последнее равенство и полученные оценки дают первое утверждение теоремы 4. Для доказательства второго утверждения при построении разложения для $q_n(x)$ нужно воспользоваться равенством

$$e^{\frac{\theta_3}{3!}\frac{(it)^3}{\sqrt{n}}}=1+\frac{\theta_3}{3!}\frac{(it)^3}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{(it)^6}{n}+\frac{\gamma}{3!}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^3\frac{t^9}{n^{3/2}}$$

и формулой обращения (20) для $k=0,3,6$. □

Для распределений F, у которых существуют моменты порядка, большего четырех, можно получать асимптотические разложения большей точности.

Теорема 5. *Если для распределения F выполнено условие (14) и его пятый момент конечен, то для $n\ge\max(\nu,2)$ плотности $p_n(x)$ допускают представление*

$$p_n(x)=\varphi(x)+\frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}}H_3(x)\varphi(x)+\frac{\theta_4}{4!n}H_4(x)\varphi(x)+\frac{1}{2n}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2H_6(x)\varphi(x)$$
$$+\frac{n-1}{n}\frac{\theta_3}{3!}\frac{\theta_4}{4!}\frac{1}{n^{3/2}}H_7(x)\varphi(x)+\frac{1}{3!n^{3/2}}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^3H_9(x)\varphi(x)+R,\quad -\infty<x<\infty,$$

где

$$
\begin{aligned}
|R| \le \frac{\|\theta_5\|}{5!}\frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} &+ \frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!}\frac{B_{6,n-1}}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^2\frac{B_{8,n}}{n^2} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{\|\theta_5\|}{5!}\frac{B_{9,n-1}}{n^{5/2}} + \frac{|\theta_4|}{4!}\frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!}\frac{B_{10,n-1}}{n^3} + \frac{1}{4}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{B_{10,n}}{n^3} \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{B_{10}}{n^2} + \frac{1}{4!}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^4\frac{B_{12}}{n^2} + \frac{\sqrt{n}}{\pi}\alpha^{n-\nu}(T)\int_T^\infty |f(t)|^\nu\,dt + \frac{1}{\pi T\sqrt{n}}e^{-\frac{T^2 n}{2}} \\
&+ \frac{|\theta_4|}{4!\pi n}\int_{T\sqrt{n}}^\infty t^4 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{|\theta_3||\theta_4|}{3!4!\pi n}\int_{T\sqrt{n}}^\infty t^7 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,
\end{aligned}
$$

а величина T та же, что в (5).

Если у распределения F конечен шестой момент, то

$$
\begin{aligned}
p_n(x) = \phi(x) &+ \frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}}H_3(x)\phi(x) + \frac{\theta_4}{4!n}H_4(x)\phi(x) + \frac{1}{2n}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 H_6(x)\phi(x) \\
&+ \frac{n-1}{n}\frac{\theta_3}{3!}\frac{\theta_4}{4!}\frac{1}{n^{3/2}}H_7(x)\varphi(x) + \frac{1}{3!n^{3/2}}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^3 H_9(x)\phi(x) \\
&+ \frac{\theta_3}{3!}\frac{\theta_5}{5!}\frac{1}{n^2}H_8(x)\varphi(x) + \frac{1}{4!n^2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^4 H_{12}(x)\phi(x) + R,
\end{aligned}
$$

а оценку величины R можно получить из предыдущей, исключив из нее два первых слагаемых, а также слагаемое $\frac{1}{4!}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^4\frac{B_{12}}{n^2}$, и добавив $\frac{\|\theta_6\|}{6!}\frac{B_{6,n-1}}{n^2}$, $\frac{\|\theta_7^{(5)}\|}{7!}\frac{B_{7,n-1}}{n^{5/2}}$, $\frac{|\theta_3|}{3!}\frac{\|\theta_5\|}{5!}\frac{B_{8,n}}{n^3}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_5}{5!}\right)^2\frac{B_{10,n}}{n^4}$, $\frac{1}{2}\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{\|\theta_5\|}{5!}\frac{B_{9,n}}{n^{5/2}}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_5}{5!}\right)^2\frac{B_{10}}{n^3}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{|\theta_5|}{5!}\frac{B_{11}}{n^3}$ и $\frac{1}{5!}\left|\frac{\theta_3}{3!}\right|^5\frac{B_{15}}{n^{5/2}}$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения теоремы 5 можно воспользоваться вновь зарядом с характеристической функцией $g_3(t)$. Напишем равенство (27) с оценкой (28). Утверждение леммы и разложение $e^{\frac{\theta_3}{3!}(it)^3} = 1 + \frac{\theta_3}{3!}(it)^3 + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 t^6$ приводят к равенству

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g_3\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = e^{-\frac{t^2}{2n}}\frac{\theta_4}{4!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4 &+ \gamma\frac{\|\theta_5\|}{5!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^5 \\
&+ \gamma\frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6 + \frac{\gamma}{2}e^{-\frac{t^2}{2n}}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6.
\end{aligned}
$$

Поэтому сумму по j в правой части (27) можно записать в виде

$$
\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} f^{n-j-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g_3^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\frac{\theta_4}{4!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4 dt + R, \tag{30}
$$

где

$$
|R| \le \frac{\|\theta_5\|}{5!}\frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!}\frac{B_{6,n-1}}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{B_{6,n}}{n^2}.
$$

Сумму по j в (30) можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx}\left[f^{n-j-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-g^{n-j-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]g_3^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\frac{\theta_4}{4!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4 dt$$

$$+\frac{n}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx}g_3^{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\frac{\theta_4}{4!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4 dt. \quad (31)$$

Последняя сумма по j равна

$$\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{n-j-2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx}f^{n-j-l-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)g_3^{j+l}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\times\left[f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-g_3\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\frac{\theta_4}{4!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4 dt.$$

С помощью только что использовавшегося представления разности $f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-g_3\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ можно модуль этой суммы оценить величиной

$$\frac{n^2}{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}}\mu^{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\left[\frac{\|\theta_5\|}{5!}\left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^5+\frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6\right]\frac{|\theta_4|}{4!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 dt$$

$$+\frac{n^2}{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}}\mu^{n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\left[\frac{|\theta_4|}{4!}\left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^4+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6\right]\frac{|\theta_4|}{4!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 dt$$

$$\le\frac{1}{2}\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{\|\theta_5\|}{5!}\frac{B_{9,n-1}}{n^{5/2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^2\frac{B_{8,n}}{n^2}+\frac{1}{2}\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!}\frac{B_{10,n-1}}{n^3}+\frac{1}{4}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{B_{10,n}}{n^3}.$$

Последнее слагаемое в (31) равно

$$\frac{n}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx}e^{-t^2/2}e^{\frac{n-1}{n}\frac{\theta_3}{3!}\frac{(it)^3}{\sqrt{n}}}\frac{\theta_4}{4!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4 dt$$

$$=\frac{n}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx}e^{-t^2/2}\left(1+\frac{n-1}{n}\frac{\theta_3}{3!}\frac{(it)^3}{\sqrt{n}}\right)\frac{\theta_4}{4!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4 dt+R, \quad (32)$$

где

$$|R|\le\frac{n}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-t^2/2}\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{t^6}{n}\frac{|\theta_4|}{4!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 dt\le\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{B_{10}}{n^3}.$$

Первое слагаемое в правой части (32) равно

$$\frac{\theta_4}{4!n}H_4(x)\phi(x)+\frac{n-1}{n}\frac{\theta_3}{3!}\frac{\theta_4}{4!}\frac{1}{n^{3/2}}H_7(x)\varphi(x)+R,$$

где

$$|R| \le \frac{1}{\pi n}\frac{|\theta_4|}{4!}\int\limits_{T\sqrt{n}}^{\infty} t^4 e^{-t^2/2}\,dt + \frac{1}{\pi n^{3/2}}\frac{|\theta_3|}{3!}\frac{|\theta_4|}{4!}\int\limits_{T\sqrt{n}}^{\infty} t^7 e^{-t^2/2}\,dt.$$

Эта величина R при росте n убывает экспоненциально быстро.

Таким образом,

$$p_n(x) - q_n(x) = \frac{\theta_4}{4!n}H_4(x)\phi(x) + \frac{n-1}{n}\frac{\theta_3}{3!}\frac{\theta_4}{4!}\frac{1}{n^{3/2}}H_7(x)\varphi(x) + R,$$

где абсолютная величина R не превосходит суммы оценок, полученных выше.

Асимптотическое разложение плотности q_n можно записать в виде

$$q_n(x) = \phi(x) + \frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}}H_3(x)\phi(x) + \frac{1}{2n}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 H_6(x)\phi(x) + \frac{1}{3!n^{3/2}}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^3 H_9(x)\phi(x) + R,$$

где $|R| \le \frac{1}{4!}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^4\frac{B_{12}}{n^2}$.

Этим первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения нам понадобится заряд с характеристической функцией

$$g_5(t) = e^{-\frac{t}{2}^2} e^{\frac{\theta_3}{3!}(it)^3} e^{\frac{\theta_5}{5!}(it)^5}.$$

Впервые заряды, построенные с помощью только нечетных моментов, использовались в [13].

Очевидно, что справедлив аналог равенства (27), в котором $g_3(t)$ заменяется на $g_5(t)$. Используя утверждение леммы при $m = 4$ и разложение

$$e^{\frac{\theta_3}{3!}(it)^3} e^{\frac{\theta_5}{5!}(it)^5} = e^{\frac{\theta_3}{3!}(it)^3} + \frac{\theta_5}{5!}(it)^5 e^{\frac{\theta_3}{3!}(it)^3} + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\theta_5}{5!}\right)^2 t^{10}$$
$$= 1 + \frac{\theta_3}{3!}(it)^3 + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 t^6 + \frac{\theta_5}{5!}(it)^5 + \gamma\frac{\theta_3}{3!}\frac{\theta_5}{5!}t^8 + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\theta_5}{5!}\right)^2 t^{10},$$

видим, что сумма по j в аналоге (27) равна

$$\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} f^{n-j-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g_5^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\frac{\theta_4}{4!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4 dt + R, \tag{33}$$

где

$$|R| \le \frac{\|\theta_6\|}{6!}\frac{B_{6,n-1}}{n^2} + \frac{\left\|\theta_7^{(5)}\right\|}{7!}\frac{B_{7,n-1}}{n^{5/2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{|\theta_3|}{3!}\frac{|\theta_5|}{5!}\frac{B_{8,n}}{n^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_5}{5!}\right)^2\frac{B_{10,n}}{n^2}.$$

Сумма по j в (33) равна

$$\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} g_3^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{j\frac{\theta_5}{5!}(\frac{it}{\sqrt{n}})^5} g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\frac{\theta_4}{4!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4 dt$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} g_3^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\frac{\theta_4}{4!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4 dt + R, \tag{34}$$

где

$$|R| \le \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} \mu^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) j \frac{|\theta_5|}{5!}\left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^5 \frac{|\theta_4|}{4!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 dt \le \frac{1}{2}\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{|\theta_5|}{5!}\frac{B_{9,n}}{n^{5/2}}.$$

Сумма по j в правой части (34) рассматривается так же, как при доказательстве первого утверждения теоремы.

Асимптотическое разложение плотности $q_n(x)$ получается без труда. Действительно,

$$q_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g_5^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{t}{2}^2} e^{\frac{\theta_3}{3!}\frac{(it)^3}{\sqrt{n}}} e^{\frac{\theta_5}{5!}\frac{(it)^5}{n^{3/2}}} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{t}{2}^2} e^{\frac{\theta_3}{3!}\frac{(it)^3}{\sqrt{n}}}\left(1 + \frac{\theta_5}{5!}\frac{(it)^5}{n^{3/2}}\right) dt + R, \qquad (35)$$

где $|R| \le \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_5}{5!}\right)^2 \frac{B_{10}}{n^3}$.

Первое слагаемое в правой части (35) есть

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{t}{2}^2} e^{\frac{\theta_3}{3!}\frac{(it)^3}{\sqrt{n}}} dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{t}{2}^2} \frac{\theta_5}{5!}\frac{(it)^5}{n^{3/2}}\left(1 + \frac{\theta_3}{3!}\frac{(it)^3}{\sqrt{n}}\right) dt + R,$$

где $|R| \le \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 \frac{|\theta_5|}{5!}\frac{B_{11}}{n^{5/2}}$.

Дальнейшее очевидно. $\square$

Обратимся к вопросу об асимптотических разложениях для функций распределения F_n в случае, когда исходное распределение F является гладким в том смысле, что для него выполнены условия (6) и (7). Из условия (7) следует, что при $n \ge \nu$ справедлива формула обращения

$$F_n(x) - G_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g_s^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{-it} dt, \quad -\infty < x < \infty,$$

где $G_n(x)$ — нормированная n-кратная свертка заряда G_s с характеристической функцией g_s, использовавшейся в теореме 4 или в теореме 5.

Правую часть последнего равенства можно записать в виде суммы величин

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g_s^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{-it} dt$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x|>T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{-it} dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x|>T\sqrt{n}} e^{-itx} \frac{g_s^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{-it} dt,$$

где T то же, что в (5). Последние слагаемые оцениваются точно так же, как в теореме 1.

Для зарядов, использовавшихся в теоремах 4 и 5, справедлива формула обращения

$$G_n(x) - \Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{g_s^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}}{-it}\, dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Мы можем использовать ту же самую технику работы с характеристическими функциями, которая применялась ранее. Это приводит к следующему утверждению.

При выполнении условий теорем 4 *и* 5, *в которых выполнение* (14) *заменяется выполнением* (6) *и* (7), *справедливы асимптотические разложения для функций распределения* $F_n(x)$, *которые отличаются от разложений для плотностей* $p_n(x)$ *тем, что* $p_n(x)$ *заменяется на* $F_n(x)$, *плотность* $\varphi(x)$ *в первых слагаемых главных частей разложений заменяется функцией распределения* $\Phi(x)$, *а в остальных слагаемых главных частей разложений меняются знаки и функции* $H_k(x)$ *заменяются на* $H_{k-1}(x)$, $k \geq 3$. *При этом в оценках остаточных частей разложений числа* $B_{k,n-1}$, $B_{k,n}$ *и* B_k, $k \geq 4$, *заменяются на* $B_{k-1,n-1}$, $B_{k-1,n}$ *и* B_{k-1}, *слагаемое* $\frac{\sqrt{n}}{\pi}\alpha^{n-\nu}(T)\int\limits_T^\infty |f(t)|^\nu\, dt$ *заменяется на* $\frac{\alpha^{n-\nu}(T)}{\pi}\int\limits_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t}\, dt$, *слагаемое* $\frac{1}{\pi T\sqrt{n}}e^{-\frac{T^2 n}{2}}$ *заменяется на* $\frac{1}{\pi T^2 n}e^{-\frac{T^2 n}{2}}$ *и в интегралах* $\int\limits_{T\sqrt{n}}^\infty t^k e^{-t^2/2}\, dt$, $k = 4, 7$, *числа* k *заменяются на* $k-1$.

Отметим, что главные части разложений для $F_n(x)$ получаются формальным интегрированием главных частей разложений для плотностей $p_n(x)$, при этом существование самих плотностей не требуется.

Из изложенного следует, что при выполнении условий (6) и (7) для $n \geq \max(2, \nu)$ в случае $\beta_4 < \infty$ для всех действительных x

$$F_n(x) = \Phi(x) - \frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}} H_2(x)\varphi(x) + R,$$

где

$$|R| \leq \frac{\beta_4 + 3}{4!}\frac{B_{3,n-1}}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 \frac{B_5}{n} + \frac{|\alpha_3|}{12}\frac{B_{4,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{B_{5,n}}{n^2} + \frac{\alpha^{n-\nu}(T)}{\pi}\int\limits_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t}\, dt + \frac{1}{\pi T^2 n} e^{-\frac{T^2 n}{2}}, \quad (36)$$

и

$$F_n(x) = \Phi(x) - \frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}} H_2(x)\varphi(x) - \frac{1}{2n}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 H_5(x)\varphi(x) + R,$$

где

$$|R| \leq \frac{\beta_4 + 3}{4!}\frac{B_{3,n-1}}{n} + \frac{1}{3!}\left|\frac{\theta_3}{3!}\right|^3 \frac{B_8}{n^{3/2}} + \frac{|\alpha_3|}{12}\frac{B_{4,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{B_{5,n}}{n^2} + \frac{\alpha^{n-\nu}(T)}{\pi}\int\limits_T^\infty \frac{|f(t)|^\nu}{t}\, dt + \frac{1}{\pi T^2 n} e^{-\frac{T^2 n}{2}}. \quad (37)$$

Главные части разложений для функций распределения, которые можно получить из теоремы 5, выписывать не будем, а ограничимся лишь оценками остаточных частей, в которых опустим слагаемые, которые при росте n убывают экспоненциально быстро. Эти оценки суть

$$\frac{\|\theta_5\|}{5!}\frac{B_{4,n-1}}{n^{3/2}}+\frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!}\frac{B_{5,n-1}}{n^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{B_{5,n}}{n^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^2\frac{B_7}{n^2}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{B_9}{n^2}+\frac{1}{4!}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^4\frac{B_{11}}{n^2}+\frac{1}{2}\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{\|\theta_5\|}{5!}\frac{B_{8,n-1}}{n^{5/2}}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!}\frac{B_{9,n-1}}{n^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{B_{9,n}}{n^3} \qquad (38)$$

и

$$\frac{\|\theta_6\|}{6!}\frac{B_{5,n-1}}{n^2}+\frac{\|\theta_7^{(5)}\|}{7!}\frac{B_{6,n-1}}{n^{5/2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{B_{5,n}}{n^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^2\frac{B_7}{n^2}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{B_9}{n^2}+\frac{1}{2}\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{|\theta_5|}{5!}\frac{B_{8,n-1}}{n^{5/2}}+\frac{1}{2}\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{\|\theta_5\|}{5!}\frac{B_{8,n}}{n^{5/2}}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{|\theta_5|}{5!}\frac{B_{10}}{n^{5/2}}+\frac{1}{5!}\left|\frac{\theta_3}{3!}\right|^5\frac{B_{14}}{n^{5/2}}+\frac{1}{2}\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!}\frac{B_{9,n-1}}{n^3}$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{|\theta_4|}{4!}\frac{B_{9,n}}{n^3}+\frac{|\theta_3|}{3!}\frac{|\theta_5|}{5!}\frac{B_{7,n}}{n^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_5}{5!}\right)^2\frac{B_9}{n^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_5}{5!}\right)^2\frac{B_{9,n}}{n^4}. \qquad (39)$$

В этих оценках величин R числа ν те же, что в условии (7), T те же, что в условии (5), а величины $\alpha(T)$ те же, что в теореме 1.

Вновь рассмотрим модельное распределение, которое использовалось после доказательства теоремы 1.

В оценке (36) при $n\geq 5$ можем перейти к пределу по $T\to\infty$, а затем заменить получившиеся величины $\overline{B}_{3,n-1}$, $\overline{B}_{4,n-1}$ и $\overline{B}_{5,n}$ их оценками, аналогичными тем, что использовались ранее. Так, вместо правой части (36) получим ее оценку

$$\frac{\beta_4+3}{4!n}B_3\frac{n^2}{(n-2)(n-3)}+\frac{1}{2n}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2B_5+\frac{|\alpha_3|}{12n^{3/2}}B_4\frac{n^{5/2}\sqrt{n-4}}{(n-2)(n-3)(n-4)}$$
$$+\frac{1}{2n^2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2B_5\frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)}. \qquad (40)$$

Для нашего модельного распределения $\theta_3=\alpha_3=\sqrt{2}$ и $\beta_4=6$. Наименьшее значение n, для которого величина (40) меньше 10^{-3}, равна 391. Если заменить величины $\overline{B}_{3,n-1}$, $\overline{B}_{4,n-1}$ и $\overline{B}_{5,n}$ их предельными значениями, то получим сумму

$$\frac{\beta_4+3}{4!n}\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2n}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{8}{\pi}+\frac{|\alpha_3|}{12n^{3/2}}\frac{3}{\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{2n^2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2\frac{8}{\pi}.$$

Для этой величины наименьшее значение n, при котором она меньше 10^{-3}, есть 318. Различие в этих значениях n не очень велико, а нас, по существу, интересуют лишь порядки наименьших чисел n, при которых правая часть (37) и выражения (38) и (39) меньше 10^{-3}. Поэтому мы в этих выражениях заменим $B_{k,n}$ и $B_{k,n-1}$ их асимптотическими значениями. При этом вместо правой части (37) получим величину

$$\frac{3}{4\pi n}+\left(\frac{2\sqrt{2}}{6^4}\frac{105}{\sqrt{2\pi}}+\frac{\sqrt{2}}{12}\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{n^{3/2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3!}\right)^2\frac{8}{\pi}\frac{1}{n^2}\leq\frac{0.24}{n}+\frac{0.24}{n^{3/2}}+\frac{0.071}{n^2},$$

что меньше 10^{-3} при $n \geq 256$.

Для вычисления величин (38) и (39) нужно воспользоваться оценками

$$\frac{|\theta_5|}{5!} \leq 0.08, \ \frac{\|\theta_5\|}{5!} \leq 0.32, \ \frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!} \leq 0.28, \ \frac{\|\theta_6\|}{6!} \leq 0.43, \ \frac{\|\theta_7^{(5)}\|}{7!} \leq 0.22$$

для нашего модельного распределения. С их помощью вместо (38) получим величину, не превосходящую $\frac{0.384}{n^{3/2}} + \frac{1.96}{n^2} + \frac{0.84}{n^{5/2}} + \frac{2.36}{n^3}$, что меньше 10^{-3} при $n \geq 74$, наконец, вместо (38) получим величину, не превосходящую $\frac{1.71}{n^2} + \frac{0.24}{n^{5/2}} + \frac{2.77}{n^3} + \frac{0.4}{n^4}$, что меньше 10^{-3} при $n \geq 43$.

Асимптотические разложения для плотностей можно использовать и в локальной форме ЦПТ для решетчатых распределений. Нетрудно понять, что главные части разложений для величин $(\sqrt{n}/h)p_n(x)$ имеют тот же вид, что для плотностей гладких распределений, а изменения остаточных частей были оговорены выше.

Следует сказать, что одним из первых исследователей, уделявшим большое внимание «реальным» оценкам в ЦПТ, является В. М. Золотарев, и внимательный читатель, конечно, заметил, что название этой статьи скопировано с названия его известной работы [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сенатов В. В.* Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом «Либроком», 2009.

2. *Шевцова И. Г.* Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри — Эссеена — Каца // Теория вероятностей и ее применения. 2010. Т. 55, № 2. С. 271–304.

3. *Тюрин И. С.* Уточнение верхних оценок констант в теореме Ляпунова // Успехи мат. наук. 2009. Т. 65, № 3. С. 201–202.

4. *Esseen C.-G.* A moment inequality with an application to the central limit theorem // Skand. Aktuarrietidskr. 1956. V. 39. P. 160–170.

5. *Кристоф Г., Ульянов В. В.* О точности приближения нормированных хи-квадрат распределений асимптотическими разложениями Эджворта — Чебышева // Информатика и ее применения. 2011. Т. 5, № 1. С. 25–30.

6. *Uspensky J.* Introduction to mathematical probability. New York: McGrow_Hill Book Co, 1937.

7. *Adel J. A., Lekuona A.* Shortening the distance between Edgeworth and Berry–Esseen in the classical case // J. Stat. Plann. Inference. 2008. V. 138. P. 1167–1178.

8. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.

9. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.

10. *Shimizu R.* On the remainder term for the central limit theorem // Ann. Inst. Stat. Math. 1974. V. 26. P. 195–201.

11. *Dobric V., Ghosh B. K.* Some analogs of Berry–Esseen bound for first order Chebychev–Edgeworth expansions // Stat. Decis. 1996. V. 14, N 4. P. 383–404.

12. *Сенатов В. В., Соболев В. Н.* О новых формах асимптотических разложений в ЦПТ // Теория вероятностей и ее применения. (В печати).

13. *Соболев В. Н.* Об асимптотических разложениях в центральной предельной теореме // Теория вероятностей и ее применения. 2007. Т. 54, № 3. С. 490–505.

14. *Золотарев В. М.* О реальных уточнениях предельных теорем теории вероятностей // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1988. Т. 182. С. 24–48.

Статья поступила 6 января 2011 г.

Сенатов Владимир Васильевич
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей,
Ленинские горы, Москва 119992
`v.senatov@yandex.ru`