Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 512.5

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП. II

Д. В. Лыткина

Аннотация. Продолжено изучение периодических групп, насыщенных прямыми произведениями элементарных абелевых 2-групп и простых линейных групп размерности 2, начатое в [1].

Ключевые слова: периодическая группа; группа, насыщенная множеством групп; локальная конечность.

В работе продолжается изучение периодических групп, насыщенных прямыми произведениями элементарных абелевых 2-групп и простых групп $L_2(q)$, начатое в [1].

Теорема 1. *Пусть m — натуральное число, G — периодическая группа, каждая конечная подгруппа четного порядка которой содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению элементарной абелевой 2-группы порядка, не превосходящего 2^m, и группы $L_2(q)$ для некоторого $q \geq 4$. Если выполнено одно из следующих условий:*

(a) *G содержит элемент порядка 4;*

(b) *G содержит подгруппу, изоморфную знакопеременной группе A_4 степени 4,*

то $G = E \times L_2(Q)$, где E — элементарная абелева 2-группа, $|E| \leq 2^m$ и Q — локально конечное поле. В частности, G — локально конечная счетная группа.

Попытки отказаться от дополнительных условий (a), (b) в теореме 1 наталкиваются на трудности, связанные с нерешенным вопросом о существовании простых не локально конечных групп определенного вида.

Пусть P — локально конечное поле. *Группой типа* $\Lambda(P)$ назовем содержащую инволюцию простую периодическую группу, в которой все инволюции сопряжены и централизатор каждой из них изоморфен прямому произведению группы порядка 2 на группу, изоморфную $L_2(P)$.

Известными автору примерами групп типа $\Lambda(P)$ являются конечная спорадическая группа Янко J_1, для которой P — поле порядка 4, и локально конечные простые группы лиева типа ${}^2G_2(P)$, где P — поле характеристики 3, не содержащее подполей порядка 9.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00456), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–3669.2010.1), а также программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1.10726).

Теорема 2. *Пусть G — периодическая группа, содержащая инволюцию. Если в G любая конечная подгруппа четного порядка содержится в подгруппе вида $E \times R$, где $|E| \leq 2$, а $R \simeq L_2(q)$ для некоторого $q \geq 5$, то либо $G = Z \times L$, где $|Z| \leq 2$, а $L \simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q, либо $|Z| = 2$ и G — не локально конечная группа типа $\Lambda(P)$ для бесконечного локально конечного поля характеристики 2, не содержащего подполей порядка 4.*

Предварительные результаты

Лемма 1. *Пусть $L \simeq L_2(q)$, где q нечетно, V — нециклическая подгруппа порядка 4 группы L и B — подгруппа L, содержащая V и изоморфная A_4.*

(a) *Если $q \geq 11$, то $L = \langle B, C_L(u)\rangle$ для произвольной инволюции $u \in L$.*

(b) *Если $q = 7$ или 9, то $L = \langle N_L(V), C_L(u)\rangle$ для любой инволюции $u \in N_L(V) \setminus B$.*

(c) *Для любой инволюции $u \in L$ $C_L(u)$ — группа диэдра, содержащая силовскую 2-подгруппу группы L.*

(d) *Если A — максимальная элементарная абелева 2-подгруппа группы L, то $|A| = 4$ и либо A — силовская 2-подгруппа группы L и $N_L(A) \simeq A_4$, либо $N_L(A) \simeq S_4$.*

(e) *Централизатор в L любого нетривиального элемента нечетного порядка абелев.*

(f) *Если S — подгруппа из L, изоморфная S_3, то $|C_L(S)| \leq 2$.*

Доказательство следует из классификации подгрупп группы $L_2(q)$ (см. [2, II.8.27]).

Лемма 2. *Пусть каждая конечная подгруппа 2-группы T изоморфна подгруппе прямого произведения группы диэдра и элементарной абелевой группы. Тогда T изоморфна одной из следующих групп:*

(a) *элементарной абелевой 2-группе;*

(b) *прямому произведению элементарной абелевой 2-группы и циклической 2-группы;*

(c) *прямому произведению элементарной абелевой 2-группы и группы $C = \left\langle c_i,\ i = 1, 2, \dots \mid c_1^2 = 1,\ c_{i+1}^2 = c_i,\ i = 1, 2, \dots \right\rangle$;*

(d) *прямому произведению элементарной абелевой 2-группы и диэдральной 2-группы;*

(e) *прямому произведению элементарной абелевой 2-группы и группы $D = \left\langle C,\ d \mid d^2 = 1,\ c_i^d = c_i^{-1} \right\rangle$.*

В частности, T локально конечна, и любая циклическая подгруппа порядка 4 из T нормальна в T.

Доказательство см. в [1, теорема 3].

Лемма 3. *Пусть группа G совпадает с объединением возрастающей цепочки $L_1 < L_2 < \dots$ групп, каждая из которых изоморфна $L_2(q)$ для некоторого нечетного q. Тогда $G \simeq L_2(Q)$, где Q — локально конечное поле нечетной характеристики.*

Доказательство. Это частный случай результата А. В. Боровика [3] (доказан без использования классификации конечных простых групп).

Лемма 4. *Если G — периодическая группа, содержащая инволюцию, централизатор которой в G конечен, то G локально конечна.*

Доказательство см. в [4].

Следующий результат легко выводится из леммы 4 и хорошо известен. Мы приводим доказательство, поскольку затрудняемся указать точную ссылку.

Лемма 5. *В бесконечной 2-группе любая конечная подгруппа отлична от своего нормализатора.*

Доказательство. Пусть K — конечная подгруппа бесконечной 2-группы G. Индукцией по $|K|$ покажем, что $N_G(K) \neq K$. Это очевидно, если $|K| = 1$. Пусть $|K| > 1$ и t — инволюция из центра K. Если $C_G(t)$ — конечная подгруппа, то по лемме 4 G локально конечна и утверждение вытекает из справедливости нормализаторного условия в конечных нильпотентных группах. Если же $C_G(t)$ — бесконечная группа, то, не нарушая общности, можно считать, что $C_G(t) = G$, т. е. $\langle t\rangle \trianglelefteq G$. По предположению индукции $N_{\overline{G}}(\overline{K}) \neq \overline{K}$, где $\overline{G} = G/\langle t\rangle$, $\overline{K} = K/\langle t\rangle$, поэтому $N_G(K) \neq K$. Лемма доказана.

Следующая лемма обобщает известный результат В. П. Шункова о сопряженности силовских 2-подгрупп в периодической группе, обладающей хотя бы одной конечной силовской 2-подгруппой.

Лемма 6. *Пусть T — силовская 2-подгруппа периодической группы G. Если не все силовские 2-подгруппы из G сопряжены с T, то для любого натурального t в G найдется не сопряженная с T силовская 2-подгруппа S, для которой $|T \cap S| > t$.*

Доказательство. Предположим противное. Среди силовских 2-подгрупп из G, не сопряженных с T, выберем S так, чтобы порядок d подгруппы $D = T\cap S$ был наибольшим. Очевидно, $T \neq D \neq S$. Так как D — конечная группа, по лемме 5 $N_T(D) \neq D \neq N_S(D)$. Пусть aD и bD — инволюции в $N_T(D)/D$ и $N_S(D)/D$ соответственно. Тогда $K = \langle a, b, D\rangle$ — конечная группа.

Пусть $\langle a, D\rangle$ содержится в силовской 2-подгруппе U группы K, $\langle b, D\rangle$ — в силовской 2-подгруппе V группы K. Далее, пусть U содержится в силовской 2-подгруппе T_1 группы G, V — в силовской 2-подгруппе S_1 группы G. Так как $|\langle a, D\rangle| > d$ и $\langle a, D\rangle \leq T \cap U \leq T \cap T_1$, существует $g \in G$, для которого $T_1^g = T$. Поскольку K конечна, существует $h \in K$ такой, что $V^h = U$ и поэтому $S_1^h \cap T_1 \geq U$, $S_1^{hg} \cap T_1^g = S_1^{hg} \cap T \geq U^g$. Так как $|U| \geq |\langle a, D\rangle| > d$, то $S_1^{hgx} = T$ для некоторого $x \in G$. Поскольку $|S_1 \cap S| \geq |\langle b, D\rangle| > d$, то $|T \cap S^{hgx}| = S_1^{hgx} \cap S^{hgx} = |(S_1 \cap S)^{hgx}| > d$, поэтому T и S^{hgx} сопряжены, т. е. S сопряжена с T; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть G — периодическая группа с абелевой силовской 2-подгруппой A, и пусть порядки пересечений A с отличными от нее силовскими подгруппами ограничены в совокупности.*

(а) *Если $V \leq A$, то $N_G(V) = C_G(V)(N_G(A) \cap N_G(V))$.*

(б) *Если $X \subseteq A$, $g \in G$ и $X^g \subseteq A$, то $g \in C_G(X)N_G(A)$.*

Доказательство. (а) Очевидно, правая часть доказываемого равенства содержится в левой. Докажем противоположное включение. Положим $K = \langle A^n \mid n \in N_G(V)\rangle$. Тогда $A \leq K \leq C_G(V) \leq N_G(V)$ и по лемме 6 $N_G(V) = K(N_G(A) \cap N_G(V)) \leq C_G(V)(N_G(A) \cap N_G(V))$.

Пусть выполнены условия п. (б). Тогда $X \subseteq A^{g^{-1}}$ и $\langle A, A^{g^{-1}}\rangle \leq C_G(X)$. По лемме 6 $A = A^{g^{-1}c}$ для некоторого $c \in C_G(X)$ и, таким образом, $g = cn^{-1} \in C_G(X)N_G(A)$. Лемма доказана.

Пусть m — целое неотрицательное число. Для произвольной группы G определим $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(G)$ как множество всех $F \leq G$ вида $F = E \times R$, где E —

элементарная абелева группа порядка, не превосходящего 2^m, и $R \simeq L_2(q)$ для некоторого q. Ясно, что E совпадает с центром F, а R — с коммутантом F, поэтому для $F \in \mathfrak{N}$ определены однозначно подгруппы $E(F) = E$ и $R(F) = R$. Для конечной подгруппы K группы G определим $\mathfrak{N}(K)$ как множество всех элементов множества $\mathfrak{N}$, содержащих K.

Всюду далее G будет означать содержащую инволюцию периодическую группу, любая конечная подгруппа четного порядка которой содержится в $\mathfrak{N}$. Будем считать, что 2^m совпадает с максимумом порядков $E(F)$ для $F \in \mathfrak{N}$. Пусть X — множество всех элементов порядка 4 из G.

Сопряженность силовских 2-подгрупп

Лемма 8. *Если E — элементарная абелева подгруппа из G и $N_G(E)$ содержит некоторый $x \in X$, то E конечна и $|E| \le 2^{m+2}$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть E_0 — подгруппа группы E порядка 2^{m+3}. Очевидно, $E_1 = \langle E_0, x\rangle$ конечна. Выберем $F \in \mathfrak{N}(E_1)$. Тогда $R(F) \simeq L_2(q)$, где q нечетно, и, следовательно, любая элементарная абелева подгруппа группы F имеет порядок не больше 2^{m+2}. Это противоречит выбору E_0. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $x \in X$ и $C = C_G(x)$. Тогда C — абелева группа, изоморфная прямому произведению элементарной абелевой группы порядка 2^m и (локально) циклической группы, $N_G(\langle x\rangle) = C\langle t\rangle$, где t — инволюция, инвертирующая каждый элемент из C при сопряжении, $N_G(\langle x\rangle)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы G и все силовские 2-подгруппы в $N_G(\langle x\rangle)$ сопряжены.*

Доказательство. Выберем две инволюции $a, b \in C$. Тогда $B = \langle a, b, x\rangle$ — конечная группа и $B \le F \in \mathfrak{N}(B)$. Ясно, что $x^2 \in R = R(F)$ и R содержит элемент порядка 4. По лемме 1(c) $R_0 = C_R(x^2)$ — диэдральная группа, $C_F(x^2) = E(F) \times R_0$ и $C_F(x) = E(F) \times U$, где U — циклическая группа индекса 2 в R_0.

В частности, $ab = ba$. Это означает, что подгруппа H, порожденная всеми инволюциями из C, является элементарной абелевой нормальной подгруппой группы C. Так как $x \in N_G(H)$, подгруппа H конечна по лемме 8.

По лемме 2 силовская 2-подгруппа S группы C совпадает с $H_0 \times Q$, где H_0 — подгруппа группы H индекса 2, Q содержит единственную инволюцию и каждая собственная подгруппа группы Q конечна. В частности, Q локально циклическая.

Докажем, что $S = O_2(C)$. Действительно, в противном случае $O_2(C)$ конечна и существует $n \ge 2$ такой, что $C \setminus O_2(C)$ содержит элемент y порядка 2^{n+1}, где $y^2 \in O_2(C)$. Для любого $c \in C$ элементы y и y^c являются инволюциями по модулю $O_2(C)$ и, значит, $K = \langle x, y, y^c, O_2(C)\rangle$ — конечная подгруппа. Если $F \in \mathfrak{N}(K)$, то K содержится в группе $C_F(x)$, которая коммутативна. Следовательно, $\langle y^c \mid c \in C\rangle$ — абелева 2-группа и $y \in O_2(C)$; противоречие.

Таким образом, $S \lhd C$ и C/S не содержит инволюций. Поскольку $x \in F \in \mathfrak{N}(K)$, существует инволюция t, для которой $x^t = x^{-1}$ и, стало быть, $N_G(\langle x\rangle) = C\langle t\rangle$.

Предположим, что для $c \in C$ подгруппа $S\langle c\rangle$ t-инвариантна. Поскольку S локально конечна, $K = \langle c, c^t, x, t\rangle$ конечна. Если $F \in \mathfrak{N}(K)$, то $c, c^t \in C_F(x)$ и из строения F следует, что $c^t = c^{-1}$. В частности, t действует без неподвижных точек на C/S сопряжением в G. Хорошо известно, что в этом случае C/S коммутативна, $S\langle c\rangle$ является t-инвариантной для любого $c \in C$ (см., например, лемму 2 в [5]) и, значит, $c^t = c^{-1}$. Отсюда следует, что C абелева, в частности, локально конечна.

Пусть P — подгруппа, состоящая из всех элементов нечетного порядка из C. Для доказательства леммы достаточно показать, что P локально циклическая. Пусть K — конечное множество элементов из P. Тогда $M = \langle K \rangle$ — конечная подгруппа нечетного порядка, а M — подгруппа централизатора $C_N(x)$, где $N \in \mathfrak{N}(\langle x, K \rangle)$. В силу леммы 1(c) K циклическая. Остальные утверждения леммы очевидны.

Лемма 10. *Пусть $x \in X$ и $z = x^2$. Тогда $C_G(z) = N_G(\langle x \rangle)$.*

Доказательство. Очевидно, $N_G(\langle x \rangle) \leq C_G(z)$. Предположим, что $c \in C_G(z) \backslash N_G(\langle x \rangle)$. Тогда $\langle x^c \rangle \neq \langle x \rangle$. Поскольку x^c и x — инволюции по модулю $\langle z \rangle$, подгруппа $\langle x^c, x \rangle$ конечна и, следовательно, содержится в элементе множества $\mathfrak{N}$. По лемме 1(c) x^c и x перестановочны. Это означает, что $K = \langle x^r \mid r \in \langle c \rangle \rangle$ — абелева c-инвариантная подгруппа и, значит, $M = \langle K, c \rangle = \langle x, c \rangle$ — конечная подгруппа в $C_G(z)$. Как и выше, по лемме 1(c) $\langle x \rangle \trianglelefteq M$, стало быть, $\langle x^c \rangle = \langle x \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Если E — элементарная абелева 2-подгруппа из G порядка 2^{m+2}, то $C_G(E)$ элементарная абелева.*

Доказательство. Пусть $a \in C_G(E)$ и $F \in \mathfrak{N}(\langle a, E \rangle)$. Тогда $EE(F)/E(F)$ изоморфна элементарной 2-подгруппе из $R(F)$ порядка, не меньшего 4.

Если $R(F) \simeq L_2(q)$, где q нечетно, то $\langle a, E \rangle / E(F)$ — элементарная абелева подгруппа по лемме 1(d), а если q четно, то $\langle a, E \rangle$ — элементарная 2-группа. В любом случае $a^2 \in E(F)$, откуда $a = 1$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Силовские 2-подгруппы в G сопряжены.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть S — силовская 2-подгруппа в G. По лемме 6 существует не сопряженная с S силовская 2-подгруппа S_1 такая, что $|S \cap S_1| > 2^{m+2}$. Если $S \cap S_1$ элементарная абелева, то S и S_1 — элементарные абелевы группы и по лемме 11 $\langle S, S_1 \rangle$ — элементарная абелева 2-группа, что невозможно. Поэтому $S \cap S_1$ содержит элемент x порядка 4. По лемме 2 S и S_1 — силовские 2-подгруппы в $N_G(\langle x \rangle)$. По лемме 9 S и S_1 сопряжены. Это противоречие доказывает лемму.

Коммутативность силовских 2-подгрупп

До конца раздела будем предполагать, что множество X элементов порядка 4 из G непусто. Цель раздела — доказать для этого случая справедливость теоремы 1.

Пусть $\mathscr{A}$ — множество всех максимальных элементарных абелевых 2-подгрупп из G.

Лемма 13. *Порядок любого элемента V из $\mathscr{A}$ равен 2^{m+2}.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $F \in \mathfrak{N}(\langle x \rangle)$. Тогда F содержит неабелеву 2-подгруппу и G обладает неабелевой силовской 2-подгруппой. Пусть T — силовская 2-подгруппа из G, содержащая V. По лемме 12 T неабелева. По лемме 2 $T = U \times D$, где U элементарна, а D — локально конечная группа диэдра. Очевидно, $V = U \times V_0$, где V_0 — подгруппа порядка 4 из D. Так как $N_D(V_0)$ содержит элемент из X, то $|V| \leq 2^{m+2}$. С другой стороны, если $H \leq G$ и $H \simeq L_2(q) \times E$, где E — элементарная абелева подгруппа порядка 2^m, то в H есть элементарная абелева подгруппа порядка 2^{m+2}. Так как порядки всех максимальных элементарных абелевых 2-подгрупп из G совпадают, лемма доказана.

Лемма 14. *Если L — подгруппа из G, изоморфная $L_2(2^s)$, то $s \leq 2$.*

Доказательство. Пусть $L \simeq L_2(2^s)$, где $s \geq 3$, U — силовская 2-подгруппа из L и $N_L = N_L(U)$. Тогда U — элементарная абелева подгруппа порядка 2^s и $N_L = UH$ — группа Фробениуса с дополнением H порядка $2^s - 1$.

Заметим вначале, что в $C = C_G(U)$ силовские 2-подгруппы сопряжены. Действительно, в противном случае по леммам 13 и 6 в C существуют несопряженные силовские 2-подгруппы S, S_1, пересечение которых содержит элемент x порядка 4, и по леммам 2 и 9 S и S_1, являясь силовскими 2-подгруппами в $N_C(\langle x\rangle)$, сопряжены.

По замечанию Фраттини в $N_G(S)$, где S — одна из силовских 2-подгрупп группы C, есть циклическая подгруппа H_1 нечетного порядка, действующая транзитивно при сопряжении на множестве нетривиальных элементов U.

Если S — элементарная подгруппа, то по лемме 13 $|S| = 2^{m+2}$, а по лемме 11 $C_G(S) = S$, поэтому $N_G(S)$ — конечная подгруппа, содержащая H_1 и некоторый элемент порядка 4. По условию $N_G(S) \leq F \simeq E \times L_2(q)$, где E — элементарная абелева 2-подгруппа, а q нечетно. Очевидно, $UH_1 \leq [F, F]$, что невозможно при $s \geq 3$.

Если S содержит элемент x порядка 4, то подгруппа $\langle x, U, H_1\rangle$ конечна и по тем же причинам не может содержаться в $F \in \mathfrak{N}$. Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть $A \in \mathscr{A}$. Тогда $N_G(A) = E \times S$, где E — элементарная абелева подгруппа из A порядка 2^m, а $S \simeq S_4$.*

Доказательство. По лемме 13 $|A| = 2^{m+2}$. По лемме 11 $C_G(A)$ — элементарная абелева 2-подгруппа и $C_G(A) = A$ в силу максимальности A. Таким образом, $N_G(A)$ — конечная подгруппа. Поскольку все силовские 2-подгруппы группы G сопряжены и $N_S(A) \neq A$ для силовской 2-подгруппы S, содержащей A, то $N_G(A)$ содержит элемент порядка 4. По условию $N_G(A) \leq E \times R$, где E — элементарная абелева подгруппа, $|E| \leq 2^m$ и $R \simeq L_2(q)$ для некоторого q. По лемме 14 q нечетно, поэтому $|E| = 2^m$. Далее $A \geq E$ и $|R \cap A| = 4$. Так как $N_G(A)$ содержит элемент порядка 4, то $N_R(A) \simeq S_4$. Лемма доказана.

По лемме 15 для $A \in \mathscr{A}$ однозначно определены ее подгруппа $E(A) = Z(N_G(A))$ и $V(A) = A \cap [N_G(A), N_G(A)]$. Эти обозначения будем использовать до конца работы.

Лемма 16. *Пусть $F \in \mathfrak{N}$, $F = E(F) \times R(F)$. Если V — элементарная подгруппа порядка 4 из $R = R(F)$, то $N_G(V) = E \times S$, где E — элементарная абелева 2-подгруппа порядка 2^m, а $S \simeq S_4$. При этом коммутант S содержит V и содержится в $R(F)$.*

Доказательство. По лемме 14 $R(F) \simeq L_2(q)$, где q нечетно, поэтому $N_{R(F)}(V)$ изоморфна A_4 или S_4 и в любом случае содержит элемент r порядка 3, действующий на V без неподвижных точек.

Пусть $C = C_G(V)$, T — силовская 2-подгруппа в C. Покажем, что в C любая силовская 2-подгруппа сопряжена с T. Действительно, в противном случае по лемме 6 в C содержится не сопряженная с T силовская подгруппа S, для которой $|T \cap S| > 2^{m+2}$. По лемме 13 $T \cap S$ содержит элемент x порядка 4. По лемме 2 $\langle T,S\rangle \le N_G(\langle x\rangle)$ и, очевидно, T и S являются силовскими подгруппами в $\langle T,S\rangle$. По лемме 9 $N_G(\langle x\rangle)$ содержит нормальную абелеву 2-подгруппу, фактор-группа по которой не содержит подгрупп порядка 4, поэтому в $\langle T,S\rangle$ силовские 2-подгруппы сопряжены вопреки выбору S.

По замечанию Фраттини $N_G(V) = C_G(V)(N_G(T) \cap N_G(V))$, в частности, $N_G(T)$ содержит 3-элемент r, нормализующий, но не централизующий V.

Покажем, что T — элементарная абелева группа. Действительно, в противном случае T содержит элемент x порядка 4 и по лемме 2 инволюция x^2 равна квадрату любого элемента порядка 4 из T. В частности, r централизует x^2. По леммам 9 и 10 $\langle V,r\rangle$ является расширением абелевой группы посредством группы порядка 2, что, очевидно, неверно.

Таким образом, T — максимальная элементарная абелева подгруппа из G. По лемме 15 $N_G(T) = E\times S$, где E — элементарная абелева подгруппа порядка 2^m, а $S \simeq S_4$. Очевидно, $\langle r,V\rangle \le S$, в частности, любой нетривиальный элемент из V является квадратом некоторого элемента порядка 4 из S.

Покажем, что $C = T$, т. е. C является 2-группой. Действительно, предположим противное. Пусть c — нетривиальный элемент нечетного порядка из C. По условию $\langle c,V\rangle$ содержится в подгруппе $K = B\times L$, где B — элементарная абелева 2-группа, а $L \simeq L_2(q)$ для некоторого q. Поскольку $c \in L$ и централизатор любой нециклической подгруппы порядка 4 из L является 2-группой, то $|BV| < |B||V|$, т. е. $|B\cap V| > 1$.

Пусть $1 \ne v \in B\cap V$. Тогда $L \le C_G(v)$ и, следовательно, $C_G(v)$ — неразрешимая группа. С другой стороны, v — квадрат некоторого элемента из X, поэтому в силу лемм 9 и 10 $C_G(v)$ — разрешимая группа. Полученное противоречие показывает, что $C = T$.

Итак, $N_G(V) \le N_G(T) = B\times S$, где B — элементарная абелева 2-группа порядка 2^m, а $S \simeq S_4$. При этом $U = O^{2'}(N_R(V)) = O^{2'}(N_G(T)) \simeq A_4$ (здесь $O^{2'}(K)$ для периодической группы K означает подгруппу, порожденную всеми элементами нечетного порядка из K), а $B = C_G(U)$. Лемма доказана.

Лемма 17. *Пусть $x,y \in X$ и $x^2y^2 = y^2x^2$. Тогда либо $x^2 = y^2$, либо $\langle x,y\rangle \simeq S_4\times E$, где E — элементарная абелева группа порядка $n \le 4$.*

Доказательство. Положим $K = \langle x^2,y^2\rangle$ и предположим, что $x^2 \ne y^2$. По лемме 10 $C_G(K) \le N_G(\langle x\rangle) \cap N_G(\langle y\rangle)$. В частности, y^2 нормализует $\langle x\rangle$, и, следовательно, x нормализует K. Аналогично y нормализует K. Поскольку x и y — инволюции по модулю K, то $U = \langle x,y\rangle$ — конечная разрешимая группа. Пусть $F \in \mathfrak{N}(U)$. Тогда $F = A\times R$, где A — элементарная абелева подгруппа порядка, не превосходящего 2^m, а $R \simeq L_2(q)$, где q нечетно. Ясно, что $x^2,y^2 \in R$ и $K = \langle x^2,y^2\rangle$ — элементарная абелева подгруппа порядка 4 из R. По лемме 16 $N_G(K) = U\times S$, где U — элементарная абелева подгруппа порядка 2^m, а $S \simeq S_4$. Поскольку $x,y \in N_G(K)$, то $x = u_1s_1$, $y = u_2s_2$, где $u_1,u_2 \in U$, $s_1,s_2 \in S$ и $\langle s_1,s_2\rangle = S$. Лемма доказана.

Лемма 18. *Пусть $A \in \mathscr{A}$, u,v — инволюции группы A, $u \ne v$ и существуют элементы $x,y \in X$ такие, что $x^2 = u$, $y^2 = v$. Тогда $\langle u,v\rangle = V$, где $V = V(A)$, $C_G(V) = A$ и $N_G(V) = N_G(A)$.*

Доказательство. По лемме 17 V содержится в $R(F)$, где $F \in \mathfrak{N}(\langle x,y\rangle)$. По лемме 16 $N_G(V) = N_G(A)$ и $C_G(V) = A$. Очевидно, что $V = V(A)$. Лемма доказана.

Лемма 19. *Пусть $V \leq A \in \mathscr{A}$ и $N_G(V)$ содержит циклическую подгруппу Y, действующую транзитивно при сопряжении на множестве неединичных элементов V. Если $|V| > 2$, то $V = V(A)$.*

Доказательство. Пусть $F \in \mathfrak{N}(\langle V, Y\rangle)$. Тогда $V \leq R(F) \simeq L_2(q)$, где q нечетно и $|V| = 4$. По лемме 16 V удовлетворяет условиям леммы 18. Лемма доказана.

Пусть $A \in \mathscr{A}$ и u — инволюция из $V(A)$. Определим $\mathscr{F} = \mathscr{F}(A)$ как множество всех подгрупп $F \leq G$, удовлетворяющих следующим условиям: $F = E \times L$, где E — элементарная абелева группа порядка 2^m, $L \simeq L_2(q)$ для некоторого нечетного $q \geq 11$ F содержит A и элемент порядка 4, квадрат которого равен u.

Лемма 20. *Если $F, F_1 \in \mathscr{F}$, то $F_1 \leq F$ тогда и только тогда, когда $|C_{F_1}(u)|$ делит $|C_F(u)|$.*

Доказательство. Если $F_1 \leq F$, то, очевидно, $|C_{F_1}(u)|$ делит $|C_F(u)|$. Предположим, что $|C_{F_1}(u)|$ делит $|C_F(u)|$. Из лемм 10 и 9 следует, что $C_{F_1}(u) \leq C_F(u)$. По лемме 15 $V(A) \leq F_1 \cap F_2$. В силу леммы 1(a) $F = \langle V(A), C_F(u)\rangle \geq \langle B(A), C_{F_1}(u)\rangle = F_1$. Лемма доказана.

Лемма 21. *$\mathscr{F}(A)$ непусто для любого $A \in \mathscr{A}$.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть u — инволюция из $V(A)$. По леммам 10 и 9 $C_G(u) = AU$, где U — локально циклическая группа, содержащая элемент порядка 4. Если U порядка 4, то в силу леммы 4 G локально конечна и, более того, конечна, что противоречит предположению теоремы. Пусть U_0 — подгруппа группы U такая, что $|U_0| > 4$ и $F \in \mathfrak{N}(AU_0)$. Тогда $u \in R(F)$ и $C_R(u)$ содержит подгруппу, изоморфную U_0. Таким образом, $R(F) \simeq L_2(q)$, где $q \geq 11$. Отсюда $F \in \mathscr{F}(A)$. Лемма доказана.

Лемма 22. *Пусть $U = \langle F \mid F \in \mathscr{F}(A)\rangle$. Тогда $U = Z \times L$, где $L \simeq L_2(Q)$, Q — локально конечное поле нечетной характеристики, централизатор каждой инволюции из L содержится в U и $C_G(L) = Z$.*

Доказательство. В силу лемм 10 и 9 $C = C_G(u)$ — произведение A и нормальной локально циклической группы, которая является объединением возрастающей цепочки конечных циклических подгрупп. Поскольку $|C_{R(F)}(u)| > 8$ для любого $F \in \mathscr{F}(A)$, существует конечная подгруппа C_0 группы C, содержащая A, такая, что $|C_0 : A| > 4$. Пусть $C_0 < C_1 < \dots$ — цепочка подгрупп, объединение которых равно C, и $F_0 \in \mathfrak{N}(C_0)$. Тогда $F \in \mathscr{F}$ и $C_{F_0}(u) \geq C_0$. Предположим, что определены $F_i \in \mathscr{F}$ такие, что $C_{F_i}(u) \geq C_i$. Пусть $F_{i+1} \in \mathfrak{N}(\langle C_{F_i}(u), C_{i+1}\rangle)$. Тогда $F_{i+1} \in \mathscr{F}$ и по лемме 20 $F_i \leq F_{i+1}$. Если $R_i = [F_i, F_i]$, $i = 0, 1, \dots$, то $R_0 \leq R_1 \leq \dots$ — возрастающая цепочка подгрупп, каждая из которых изоморфна $L_2(q)$ для некоторого нечетного q. По лемме 3 $L = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R_i$ изоморфна $L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля нечетной характеристики.

Очевидно, что $U_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ совпадает с $Z \times L$. Если теперь $F \in \mathscr{F}$, то $|C_F(u)|$ делит $|C_{F_i}(u)|$ для некоторого $i = 0, 1, \dots$ и в силу леммы 20 $F \leq F_i \leq U_1$. Следовательно, $U \leq U_1$, значит, $U = U_1$.

Поскольку все инволюции из L сопряжены с u в L, то U содержит все централизаторы инволюций из L.

Последнее утверждение леммы следует из лемм 18 и 16.

Зафиксируем до конца доказательства некоторую $A \in \mathscr{A}$.

Лемма 23. *Если $U \cap L^g$, где $g \in G$, содержит инволюцию, то $L^g = L$.*

Доказательство. Предположим, что v — инволюция из $U \cap L^g$. Если $v \in L$, то $v^{g^{-1}} \in L$. Так как все инволюции из L сопряжены, существует $l \in L$ такой, что $v^{g^{-1}l} = v$ и, следовательно, $l^{-1}g \in C_G(v)$. Таким образом, по лемме 22 $l^{-1}g \in U \leq N_G(L)$ и $g \in N_G(L)$.

Пусть $v \notin L$. По определению U существует $x \in L^g$, для которого $x^2 = v$. Кроме того, существует такой $y \in L$, что $u = y^2$ — инволюция и $uv = vu$. Ясно, что $u \neq v$. По леммам 18 и 17 $\langle u, v\rangle = V(A) \leq L$, что противоречит выбору v.

До конца доказательства сохраним обозначения из леммы 22.

Лемма 24. *Если $F \in \mathfrak{N}(A)$, то $F \leq U$.*

Доказательство. Пусть $F = E \times R$, где E — элементарная абелева 2-группа и $R \simeq L_2(q)$ для некоторого q. По лемме 14 q нечетно и $E = Z(N_F(A)) \leq Z(N_G(A)) = Z \leq U$. Из $|E| = |Z|$ следует, что $E = Z$. Если $q \neq 5$, то в силу леммы 1 $R = \langle C_R(t) \mid t$ — инволюция из $N_R(A)\rangle \leq L$, откуда $F \leq U$. Итак, $q = 5$ и $N_R(A) \simeq A_4$. Пусть r — элемент порядка 3 в $N_R(A)$, t — инволюция из R такая, что $r^t = r^{-1}$, и s — инволюция из $N_L(A)$ такая, что $r^s = r^{-1}$. Ясно, что $t \neq s$, $ts \in C_G(r)$ и $\langle ts\rangle \neq \langle r\rangle$. Подгруппа $\langle r, t, s, Z\rangle$ конечна, т. е. содержится в подгруппе $F_1 = E_1 \times R_1$, где E_1 — элементарная абелева группа порядка, не превосходящего 2^m, и $R_1 \simeq L_2(q_1)$ для некоторого нечетного q_1. Заметим, что $\langle r, t, Z\rangle \leq F$ и $r, s \in L$.

Пусть A_1 — максимальная элементарная абелева 2-подгруппа группы F_1, содержащая $\langle Z, s\rangle$. Так как $A_1 \leq C_G(s) \leq U$, порядок A_1 равен $|A|$ или $|A|/2$.

Предположим вначале, что $|A_1| = |A|/2$. Тогда $C_G(A_1) \leq C_G(s)$ и по леммам 10 и 9 s — единственный элемент, являющийся квадратом некоторого элемента из G. В частности, если $C_G(A_1)$ содержит элемент порядка 4, то его квадрат совпадает с s и $N_G(A_1)$ централизует s, что невозможно. Поэтому силовская 2-подгруппа A_0 из $C_G(A_1)$ элементарная абелева. Поскольку все силовские 2-подгруппы в $C_G(A_1)$ сопряжены, то $N_G(A_1) \leq C_G(A_1)N_G(A_0)$, откуда $V(A) = O_2([N_G(A_1), N_G(A_1)]) \leq R_1$, $A \leq F_1$ и $|A_1| = |A|$; противоречие.

Пусть $x \in L$ и $x^2 = s$. Тогда $\langle A_1, x\rangle \leq C_G(s)$, откуда $A_1 \leq N_G(x)$, $[A_1, x] \leq \langle s\rangle \leq A_1$ и $x \in N_G(A_1)$. По лемме 16 $C_G(A_1) = A_1$ и $N_G(A_1) \simeq Z_1 \times B$, где Z_1 — элементарная абелева 2-группа, $B \simeq S_4$. Очевидно, что $s = x^2 \in [B, B] \leq [F_1, F_1] = [R_1, R_1] = R_1$. Если $V_1 = A_1 \cap R_1$, то $V_1 \leq L$, $N_G(A_1) \leq F$, и значит, $E_1 \leq U$.

Пусть $K = L \cap R_1$. Тогда $K \geq \langle N_{R_1}(U_1), r\rangle$, откуда $K \not\simeq A_4$. Предположим, что $K \neq R_1$. Если $x \in R_1 \setminus K$, то $K \cap K^x = L \cap L^x \cap R_1$. Поскольку $L^x \neq L$, то $K \cap K^x$ не содержит инволюции для любого $x \in R_1 \setminus K$ и, следовательно, K сильно вложена в R_1. Это невозможно, поэтому $R_1 \leq L$. Но тогда $t \in U$ и $R = \langle C_R(V), t\rangle \leq U$. Лемма доказана.

Лемма 25. *Если v — инволюция в группе L и F — конечная подгруппа, содержащая $\langle Z, v\rangle$, то $F \leq U$.*

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $v \in A$, $F \in \mathfrak{N}(\langle Z, v\rangle)$. Пусть $E = E(F)$, $R = R(F)$ и $A_1 = E \times V_1$, где $V_1 = A_1 \cap R$ — максимальная элементарная абелева подгруппа группы F. Если $|E| = 2^m$, то $v \in L \cap R$, $V_1 \leq L$, $E = Z(N_F(A_1)) = Z(N_G(A_1)) = Z$, и по лемме 24 $F \leq U$.

Если $|E| < 2^m$, то $\langle Z, v\rangle$ — максимальная элементарная абелева подгруппа из F, $Z \cap R \neq 1$ и поэтому в Z есть инволюция, равная квадрату некоторого элемента из G. По лемме 18 это невозможно. Лемма доказана.

Лемма 26. *Пусть $Z = E(A)$. Тогда $N_G(Z) = Z \times L$.*

Доказательство. В силу леммы 22 достаточно доказать, что $L \triangleleft N_G(Z)$. Предположим противное. Пусть $g \in N_G(Z) \setminus N_G(L)$. Тогда $L^g \cap L$ не содержит инволюций. Значит, $\langle Z, u, u^g\rangle$ — конечная подгруппа, содержащая $\langle Z, u\rangle$. По лемме 25 $u^g \in U$, значит, $u^g \in L$. Это противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 27. *$L \trianglelefteq G$, $G = U$.*

Доказательство. В противном случае существует $g \in G$ такой, что $u^g \notin U$ и $\langle u, u^g\rangle$ — конечная подгруппа, лежащая в $F \in \mathfrak{N}(\langle u, u^g\rangle)$.

Пусть $F = E \times R$, где $E = E(F)$, $R = R(F)$ и A_1 — максимальная абелева подгруппа группы F, содержащая u. Тогда $A_1 \leq C_G(u) \leq U$, $[N_G(A_1), N_G(A_1)] = [N_F(A_1), N_F(A_1)] \leq F \cap L$ и $E = Z(N_F(A_1)) \leq Z(N_G(A_1)) \leq Z(U)$. По лемме 14 $R \simeq L_2(q)$, где q нечетно. Если $q \geq 11$, то по лемме 1(a) $F \leq \langle N_G(A_1), C_G(u)\rangle \leq U$, что противоречит выбору g. Поэтому $q < 11$ и, следовательно, R содержит инволюцию t, инвертирующую элемент r порядка 3 из $N_R(A_1)$. Понятно, что $r \in L$.

Если $q > 5$, то инволюцию t можно выбрать в $N_R(A_1)$ и в R найдется элемент x порядка 4, для которого $t = x^2$. Поскольку t сопряжен с элементом из $N_R(A_1) \leq L$ и $t \in N_R(A_1) \leq U$, по лемме 23 $t \in L$. Отсюда $C_G(t) \leq N_G(L) = U$.

Итак, $q = 5$ и $t \neq N_R(A_1)$. По определению L в $N_L(A_1)$ содержится инволюция t_1, инвертирующая r. Очевидно, tt_1 — нетривиальный элемент из $C = C_G(r)$.

Покажем, что $C \cap C_G(t)$ — элементарная абелева 2-подгруппа. Предположим противное. Пусть x — элемент из $C(t) \cap C$, порядок которого больше двух. Тогда $K = \langle x, t, r\rangle$ — конечная подгруппа, содержащаяся в некоторой подгруппе F из $\mathfrak{N}(K)$, но в F таких подгрупп нет по лемме 1(f). По лемме 13 $C_G(t) \cap C$ — конечная подгруппа. Так как $C^t = C$, по лемме 4 $C\langle t\rangle$ — локально конечная группа.

Покажем, что C коммутативна. В противном случае в C найдется конечная некоммутативная подгруппа C_0 и $K = \langle C_0, r, t\rangle$ также конечна. Так как $K \leq F \in \mathfrak{N}(K)$, это противоречит лемме 1(e). Итак, C коммутативна, поэтому $C \leq C_G(Z) = U$.

Теперь $tt_1 \in U$, $t \in U$, и $F \leq \langle N_U(A_1), t\rangle \leq U$. Лемма доказана.

Таким образом, в случае (a) заключение теоремы 1 справедливо.

Группы, содержащие A_4

Пусть выполнены условия п. (б) теоремы 1.

Предположим, что заключение теоремы неверно и G — противоречащий пример. Среди элементов $\mathfrak{N}$ выберем F с центром наибольшего порядка. Можно считать, что $|Z(F)| = 2^m$ и, в частности, F содержит элементарную абелеву 2-подгруппу порядка 2^{m+2}.

Лемма 28. *Силовские 2-подгруппы любой подгруппы группы G сопряжены и являются элементарными абелевыми группами. Централизатор любой* *подгруппы порядка 2^{m+2} в G является 2-группой. В частности, порядок пересечения любых двух различных силовских 2-подгрупп не превосходит 2^{m+1}.*

Доказательство. По уже доказанному п. (a) теоремы 1 в G нет элементов порядка 4, поэтому любая 2-подгруппа из G элементарна. Если c — элемент нечетного порядка из $C_G(A)$, где A — любая подгруппа порядка 2^{m+2} из G, то $\langle A, c\rangle$ содержится в элементе множества $\mathfrak{N}$ и поэтому $c = 1$.

Если H — подгруппа из G, S, S_1 — ее различные силовские подгруппы, то $|S \cap S_1| \leq 2^{m+1}$ и по лемме 6 S и S_1 сопряжены в H. Лемма доказана.

Лемма 29. *Если B — подгруппа порядка 2^{m+1} из G, то $C = C_G(B)/B$ является либо 2-группой, либо расширением локально циклической группы без инволюций посредством группы порядка 2.*

Доказательство. По лемме 28 централизатор любой инволюции в C — элементарная абелева группа. По [5] для C есть только три возможности: (a) $C \simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2, (b) C обладает нормальной силовской 2-подгруппой, (c) C — расширение абелевой группы без инволюций посредством группы порядка 2.

Если реализуется (a), то пусть H — полный прообраз в G подгруппы из C, изоморфной $L_2(q)$, где $q = 2^s$ для некоторого s. Несложно убедиться в том, что H не вложима ни в один элемент из $\mathfrak{N}$.

Если выполнен случай (b) и в C есть нетривиальный элемент r нечетного порядка, то r нормализует, но не централизует некоторую нетривиальную 2-подгруппу T. Теперь полный прообраз $\langle T, r\rangle$ в G является конечной группой, лежащей в некотором элементе из $\mathfrak{N}$, однако в прямом произведении $L_2(q)$ на элементарную 2-группу групп такого типа нет.

Подобным же образом доказывается, что в случае, когда C — расширение абелевой группы посредством группы порядка 2, эта абелева группа не может содержать конечных нециклических подгрупп. Лемма доказана.

В леммах 30–33 предполагается, что централизатор любой подгруппы порядка 2^{m+1} является 2-группой.

Лемма 30. *В G существует нетривиальная подгруппа A порядка $2^m \geq 2$, централизатор которой в G равен $A \times R$, где $R \simeq L_2(P)$ для некоторого локально конечного поля P характеристики 2 и, в частности, $m \geq 1$. Если B — произвольная 2-подгруппа порядка 2^m из G, то либо $C_G(B) = B \times L$, где $L \simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2, либо $C_G(B)$ является 2-группой.*

Доказательство. Если $m = 0$, то централизатор любой инволюции из G — элементарная абелева группа. Поскольку силовская 2-подгруппа группы G не инвариантна в G и ее порядок не равен двум, согласно [5] $G \simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2, т. е. G не противоречит заключению теоремы.

Поэтому $m \geq 1$ и существует подгруппа A порядка 2^m, централизатор которой в G не является 2-группой. Пусть $H = C_G(A)$.

Предположим вначале, что в H силовская 2-подгруппа не инвариантна.

Так как в H есть элементарная подгруппа порядка 2^{m+2}, ввиду [5] $H/A \simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2. Покажем, что A — прямой сомножитель в H, т. е. A тривиально пересекается с коммутантом H. Предположим противное. Тогда Q бесконечно и, следовательно, бесконечна силовская 2-подгруппа из H. Далее, $t = [x_1, x_2] \dots [x_{2s-1}, x_{2s}]$ для нетривиального элемента t из A и некоторых $x_1, \dots, x_{2s} \in H$. Пусть D — 2-подгруппа порядка 2^{m+3} из H. Так как H локально конечна, $M = \langle x_1, \dots, x_{2s}, D\rangle$ — конечная подгруппа из H, лежащая по условию в подгруппе $K = E \times T$, где $|E| \leq 2^m$, а $L \simeq L_2(q)$ для некоторого q. Поскольку в H есть подгруппа порядка 2^{m+3}, то $q = 2^r \geq 8$.

Так как t принадлежит коммутанту F, то $t \notin E$ и $C_K(t)$ — элементарная абелева группа, откуда M — элементарная абелева группа, что невозможно.

Если для подгруппы B порядка 2^m в $C_G(B)$ силовская 2-подгруппа нормальна и в $C_G(B)$ есть нетривиальный элемент c нечетного порядка, то в $C_G(B)$ найдется конечная подгруппа F, содержащая c и B, порядок которой делится на 2^{m+1}. Если $F \leq E \times R \in \mathfrak{N}$, где $|E| \leq 2^m$, а $R \simeq L_2(q)$, то, очевидно, $B \leq E$ и в $C_G(B)$ силовская 2-подгруппа не инвариантна. Это противоречие показывает, что $C_G(B)$ является 2-группой. По условию теоремы найдется подгруппа A порядка 2^m, централизатор которой не является 2-группой. Лемма доказана.

Пусть A — подгруппа порядка 2^m из G, централизатор которой равен $A \times R$, где $R \simeq L_2(P)$ для некоторого локально конечного поля P характеристики 2. Существование такой A гарантировано леммой 30.

Пусть S — силовская 2-подгруппа из $C_G(A)$. Тогда S — силовская 2-подгруппа в G и $N_0 = N_G(S) \cap C_G(A) = \langle A\rangle \times U$, где U изоморфна аффинной группе поля P, т. е. полупрямому произведению аддитивной группы P^+ поля P на его мультипликативную группу P^*, действующую на P^+ умножением в поле P. В частности, все инволюции из $V = U \cap S$ сопряжены в U.

Пусть $N = N_G(S)$.

Лемма 31. *Любая конечная подгруппа из N/S является циклической.*

Доказательство. Пусть $S \leq K \leq N$ и K/S — конечная группа. Тогда $|K : S|$ — нечетное число и в силу локальной конечности K существует подгруппа $K_1 \leq K$, для которой $SK_1 = K$ и $K \cap S = 1$. Если S_1 — конечная подгруппа порядка 8 из S, то $F = \langle K_1, S_1\rangle$ — конечная подгруппа с нормальной силовской 2-подгруппой порядка, не меньшего 8, содержащаяся в некотором элементе из $\mathfrak{N}$, поэтому K_1, а следовательно, и K/S — циклические группы. Лемма доказана.

Лемма 32. $N_0 = N$.

Доказательство. По условию G содержит подгруппу K, изоморфную A_4. Пусть $V = O_2(K)$. Можно считать, что $V \leq S$. По лемме 7 N содержит элемент r порядка 3. Поскольку централизатор любой подгруппы порядка 2^{m+1} из S является 2-группой, $C_S(r)$ — конечная группа. Пусть $n \in N$ и $H = \langle r, r^n\rangle$. По [6] H индуцирует при сопряжении в S конечную группу автоморфизмов. Так как $C_G(S) = S$, по лемме 31 $H = \langle r\rangle S$. Отсюда следует, что $\langle rS\rangle \lhd N/S$.

Так как в N/S нет элементов четного порядка, то rS лежит в центре N/S. Поэтому rS нормализует в S подгруппу $A = C_S(U)$.

Покажем, что $N_G(A) = C_G(A)$. Действительно, поскольку A конечна, а $C_G(A)$ локально конечна, $N_G(A)$ — локально конечная подгруппа. Если теперь $n \in N_G(A) \setminus C_G(A)$, x — нетривиальный элемент нечетного порядка из U, S_0 — подгруппа порядка 8 из U, то $\langle A \times S_0, n, x\rangle$ — конечная подгруппа, лежащая в некотором элементе из $\mathfrak{N}$, где ей нет места. В частности, r централизует A, поэтому $C_S(r) = A$. Так как rS лежит в центре N/S, то $A \lhd N(S)$. Тем самым $N(S) \leq N_G(A) = C_G(A)$. Лемма доказана.

Лемма 33. *Подгруппа A лежит в центре G.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют $a \in A$ и $g \in G$, для которых $a^g \neq a$. Если $[a^g, a] = 1$, то $\langle a^g, a\rangle$ содержится в некоторой силовской 2-подгруппе T из G. По лемме 28 $T = S^h$ для некоторого $h \in G$. Поскольку $a \in T$, то $a^{h^{-1}} \in S$. По леммам 7 и 32 a и $a^{h^{-1}}$ сопряжены в $N_G(S) \leq C_G(A)$. Поэтому $a = a^h$. Так как $\langle a^{gh^{-1}}, a^{h^{-1}}\rangle \leq S$, то $a = a^{h^{-1}}$ сопряжен с $a^{gh^{-1}}$ в $N_G(S)$ и снова $a^{gh^{-1}} = a = a^{h^{-1}}$, откуда $a^g = a$ вопреки выбору g.

Поэтому $\langle a^g, a\rangle$ неабелева. Будучи конечной подгруппой, она содержится в $F \in \mathfrak{N}$. Пусть $F = E \times L$, где E — элементарная абелева группа, а $L \simeq L_2(q)$ для некоторого q. Пусть S_0 — силовская 2-подгруппа из F, содержащая a. Очевидно, $E \leq S_0$ и $a \notin E$. Это означает, в частности, что в $N_F(S_0)$ есть элемент h, для которого $a^h \neq a$. Поскольку $[a^h, a] = 1$, мы возвращаемся к ситуации, рассмотренной в предыдущем абзаце. Лемма доказана.

Лемма 34. *В G существует подгруппа B порядка 2^{m+1}, для которой $C_G(B)$ — расширение нетривиальной локально циклической группы B посредством группы порядка 2. В частности, силовская 2-подгруппа S из G — элементарная абелева группа порядка 2^{m+2}, нормализующая, но не централизующая некоторую локально циклическую подгруппу C без инволюций.*

Доказательство. Если централизатор любой подгруппы порядка 2^{m+1} является 2- группой, то по леммам 30 и 33 G не противоречит заключению теоремы. Поэтому в G существует подгруппа B порядка 2^{m+1}, для которой $C_G(B)$ не является 2-группой. По лемме 29 B удовлетворяет заключению леммы.

Зафиксируем B, S и C до конца доказательства теоремы и определим $\mathscr{F}$ как множество всех элементов из $\mathfrak{N}(S)$, содержащих нетривиальный элемент из C. Очевидно, $\mathscr{F}$ непусто.

Лемма 35. *$N_G(S) = E \times A$, где E — элементарная абелева группа порядка 2^m, $A \simeq A_4$, и для любого элемента H множества $\mathfrak{N}$ справедливо $R(H) \simeq L_2(q)$, где $q \geq 5$ нечетно. При этом все элементы из S, сопряженные в G с элементами из $E(H)$, содержатся в E, а все элементы из S, сопряженные с инволюциями из $R(H)$, содержатся в A.*

Доказательство. Очевидно, $N_F(S) \simeq E \times A_4$, где E — элементарная абелева группа порядка 2^m для любой $F \in \mathscr{F}$. Так как $C_G(S) = S$, то $N_G(S)$ — конечная группа, содержащаяся в некоторой подгруппе $H \in \mathfrak{N}$. Поскольку $N_G(S) = N_H(S)$ содержит $N_F(S)$, определение $\mathfrak{N}$ показывает, что $N_G(S) = N_F(S)$. Если теперь в $\mathfrak{N}$ содержится подгруппа K, изоморфная $L_2(q)$, где $q = 2^r > 4$, то K содержит подгруппу S_1, сопряженную с S, и $N_K(S_1)$ не изоморфна подгруппе группы $E \times A_4$, где $|E| \leq 2^m$.

Остальные утверждения леммы вытекают из леммы 7.

Лемма 36. *Если $F, F_1 \in \mathscr{F}$ и $|C_{F_1}(B)|$ делит $|C_F(B)|$, то $F_1 \leq F$.*

Доказательство. Пусть $|C_{F_1}(B)|$ делит $|C_F(B)|$. Тогда $C_{F_1}(B) \cap C \leq C_F(B) \cap C$ и поэтому $C_{F_1}(B) \leq C_F(B)$. Так как по лемме 35 $N_G(S) = N_F(S) = N_{F_1}(S)$, по лемме 1 $F_1 = \langle N_G(S), C_{F_1}(B)\rangle \leq \langle N_G(S), C_F(B)\rangle = F$. Лемма доказана.

Следующая лемма доказывается так же, как лемма 22.

Лемма 37. *Пусть* $U = \langle F \mid F \in \mathscr{F} \rangle$. *Тогда* $U = Z \times L$, *где* $L \simeq L_2(Q)$, Q *— локально конечное поле нечетной характеристики, централизатор каждой инволюции из* L *содержится в* U *и* $|Z| \leq 2^m$.

Зафиксируем обозначения из леммы 37 до конца доказательства теоремы.

Лемма 38. $Z = C_G(L)$.

Доказательство. Пусть $C_G(L) = Y$. Если найдутся две неперестановочные инволюции $v, w \in Y$, то группа $\langle v, w \rangle \times (N_G(S) \cap L)$ не вложима ни в один элемент из $\mathfrak{N}$, поэтому силовская 2-подгруппа из Y нормальна в Y и $Y \leq N_G(S) \leq U$, откуда $Y = Z$. Лемма доказана.

Лемма 39. *Если* $U \cap L^g$, *где* $g \in G$, *содержит инволюцию* v^g, *то* $L^g = L$.

Доказательство. Так как все силовские 2-подгруппы из L сопряжены в L, для доказательства можно считать, что $v, v^g \in S$. Но тогда v и v^g сопряжены в $N_G(S) \leq U$, откуда $v^g \in L$.

Лемма 40. *Если* $F \in \mathfrak{N}(S)$, *то* $F \leq U$.

Доказательство. Пусть $F = E \times R$, где E — элементарная 2-группа, а $R \simeq L_2(q)$ для некоторого q. По лемме 35 q нечетно и $N_G(S) = N_G(F) \simeq E \times A_4$. Если централизатор инволюции из R в F не является 2-группой, то $F \in \mathscr{F}$ и поэтому $F \leq U$. Отсюда следует, что $q = 5$. Пусть r — элемент порядка 3 из $N_F(S)$ и t — инволюция из F, инвертирующая r. Если $t \in L$, то $F = \langle N_F(S), t \rangle \leq L$. Пусть $t \notin L$. Очевидно, в L есть инволюция v, инвертирующая r, и $x = tv \in C_G(r)$.

Пусть $C_0 = C_G(r) \cap C_G(v)$. Предположим, что в C_0 есть нетривиальный элемент x нечетного порядка. Тогда $K = \langle x, v, r \rangle$ — конечная подгруппа, содержащаяся в некотором элементе из $\mathfrak{N}$, но в $\mathfrak{N}$ нет элементов, содержащих подгруппу, изоморфную K. Поэтому C_0 — элементарная абелева 2-группа и, в частности, она конечна. По лемме 4 $C_G(r)\langle v \rangle$ локально конечна.

Заметим, что $C_G(r)$ коммутативна, иначе в $C_G(r)$ есть конечная некоммутативная v-инвариантная подгруппа K и подгруппа $\langle K, c, v \rangle$ не может содержаться ни в одном элементе из $\mathfrak{N}$ вопреки условию. Отсюда следует, что $Z \triangleleft C_G(r)$.

Поскольку $K = \langle t, Z, v, r \rangle$ — конечная подгруппа из $C_G(r)\langle v \rangle$, она содержится в некотором элементе H множества $\mathfrak{N}$. Пусть $H = E(H) \times F(H)$, S_1 — силовская 2-подгруппа из H, содержащая v, и S_2 — содержащая S_1 силовская 2-подгруппа из G. По лемме 35 $|N_G(S_2) : N_H(S_1)| \leq 2$, поэтому $v \in F(H)$ и, следовательно, $Z \leq E(H)$, т. е. $S_1 = S_2$, откуда вытекает, что $H \leq U^g$, где $S^g = S_2$, а $t, v \in L^g$. По лемме 38 $L^g = L$, т. е. $t \in L$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 41. $Z \leq Z(G)$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $z \in Z$, $g \in G$ и $z^g \neq z$.

Если $[z, z^g] = 1$, то $\langle z, z^g \rangle$ содержится в некоторой силовской 2-подгруппе T из G. По лемме 6 $T = S^h$ для некоторого $h \in G$ и $z^{h^{-1}} \in S$. По леммам 7 и 35 z и $z^{h^{-1}}$ сопряжены в $N_G(S) \leq C_G(Z)$. Поэтому $z = z^h$. Так как $\langle z^{gh^{-1}}, z^{h^{-1}} \rangle \leq S$, то $z = z^{h^{-1}}$ сопряжен с $z^{gh^{-1}}$ в $N_G(S) \leq C_G(Z)$, т. е. $z^{gh^{-1}} = z = z^{h^{-1}}$, откуда $z^g = z$ вопреки выбору.

Поэтому $\langle z^g, z \rangle$ неабелева. Будучи конечной подгруппой, она содержится в $F \in \mathfrak{N}$. Пусть $F = E \times K$, где E — элементарная абелева группа, а $L \simeq L_2(q)$ для некоторого q. Пусть S_0 — силовская 2-подгруппа из F, содержащая z.

Очевидно, $E \leq S_0$ и $z \in E$. Это означает, в частности, что в $N_F(S_0)$ есть элемент h, для которого $z^h \neq z$. Поскольку $[z^h, z] = 1$, мы возвращаемся к невозможному случаю, рассмотренному в предыдущем абзаце.

Лемма 42. *Если v — инволюция из L и F — конечная подгруппа, содержащая $\langle Z, v\rangle$, то $F \leq U$.*

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $v \in A$ и $F \in \mathfrak{N}(\langle Z, v\rangle)$. По лемме 41 $F = Z \times R$, где $R \simeq L_2(q)$ для некоторого нечетного числа q. По лемме 35 $v \in R$. По лемме 39 $R \leq L$ и поэтому $F \in \mathfrak{N}(S)$. По лемме 40 $F \leq U$.

Лемма 43. *$L \lhd G$, $G = U$.*

Доказательство. Предположим, что L не инвариантна в G. По лемме 39 найдутся $g \in G$ и инволюция $v \in L$ такие, что $v^g \notin U$. По лемме 41 подгруппа $\langle Z, v, v^g\rangle$ конечна. По лемме 42 $v^g \in U$; противоречие.

Если $h \in G$, v — инволюция из L, то по лемме 41 и в силу локальной конечности L подгруппа $\langle Z, v, h\rangle$ конечна. По лемме 42 $h \in U$. Лемма доказана. Вместе с ней доказана и теорема 1.

Группы типа $\Lambda(P)$

Предположим, что группа G удовлетворяет условиям теоремы 2, но не ее заключению.

Лемма 44. *Силовские 2-подгруппы из G элементарные абелевы и каждый элемент $\mathfrak{N}$ изоморфен $E \times L_2(2^n)$, где $|E| \leq 2$ и $n \geq 3$.*

Доказательство вытекает из теоремы 1.

Выберем $H \in \mathfrak{N}$ так, чтобы порядок $Z(H)$ был наибольшим.

Лемма 45. *$Z(H) = \langle t\rangle$, где t — инволюция и $C_G(t) = \langle t\rangle \times L$, где $L \simeq L_2(Q)$ для локально конечного поля Q характеристики 2.*

Доказательство. Из выбора H и леммы 44 следует, что в группе $\overline{C} = C_G(Z(H))/Z(H)$ централизатор любой инволюции является элементарной абелевой 2-группой. По [5] $\overline{C} \simeq L_2(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 2. Если $Z(H) = 1$, то $G \simeq \overline{C}$ и вопреки выбору G заключение теоремы 2 для нее выполнено. Поэтому $|Z(H)| = 2$ и $Z(H)$ порождается некоторой инволюцией t. Оставшееся утверждение леммы доказывается так же, как лемма 30.

Пусть $C = C_G(t)$ и S — силовская 2-подгруппа из C.

Лемма 46. *Если u — инволюция из S, то либо $C_G(u) = S$, либо $C_G(u) = \langle u\rangle \times L_u$, где $L_u \simeq L_2(Q_u)$ для некоторого локально конечного поля Q_u характеристики 2.*

Доказательство. Если $C_G(u)$ — 2-группа, то $C_G(u) = S$. Если же в $C_G(u)$ есть элемент x нечетного порядка и $\langle x, u\rangle \leq H_1 \in \mathfrak{N}$, то по лемме 1 $u \in Z(H_1)$, т. е. H_1 можно взять в качестве H, и утверждение вытекает из леммы 45.

Лемма 47. *Любая силовская 2-подгруппа из G сопряжена с S.*

Доказательство. Если T — силовская 2-подгруппа из G и $T \neq S$, то по лемме 1 $|T \cap S| \leq 2$. По лемме 6 все силовские 2-подгруппы в G сопряжены. Лемма доказана.

Пусть $N = N_G(S)$, $N_0 = N \cap L$ и $S_0 = N_0 \cap S$.

Лемма 48. *$N_C(S) = \langle t\rangle \times N_0$, и все инволюции из S_0 сопряжены в N_0.*

Доказательство вытекает из леммы 45.

Лемма 49. *Подгруппа S бесконечна, и $N \neq N_0$.*

Доказательство. Предположим, что $N = N_0$. По выбору G из леммы 45 вытекает, что $C \neq G$ и, следовательно, в G есть элемент g, для которого $t^g \neq t$. Пусть $\langle t^g, t\rangle \leq K \in \mathfrak{N}$, T_0 — силовская 2-подгруппа из K, содержащая t, и T — силовская 2-подгруппа из G, содержащая T_0. Из леммы 45 вытекает, что t не содержится в $Z(N_G(T))$. С другой стороны, по лемме 47 существует $h \in G$, для которого $T^h = S$. По лемме 7 t^h и t сопряжены в $N_G(S) \leq C$, поэтому $t^h = t$, т. е. $h \in C_G(t)$, $T \leq C_G(t)$, тем самым $t \in Z(N_G(T))$. Полученное противоречие показывает, что $N \neq N_0$.

Если теперь S конечна, то N — конечная подгруппа, содержащаяся в некоторой подгруппе из $\mathfrak{N}$, что невозможно, поскольку $N \neq N_0$ и N_0 не является 2-группой. Лемма доказана.

Лемма 50. *Все инволюции из G сопряжены.*

Доказательство. Так как $\langle t\rangle \ntriangleleft N$, то t сопряжен с некоторой инволюцией из $S \setminus \langle t\rangle$.

Пусть a — инволюция из S_0. Поскольку $N_0 \neq N$ и N_0 действует транзитивно на множестве инволюций из S_0, то в N найдется нетривиальный элемент нечетного порядка, централизующий a. По лемме 46 $C_G(a) = \langle a\rangle \times L_a$, где $L_a \simeq L_2(Q_a)$ для некоторого локально конечного поля Q_a характеристики 2. Пусть $S_1 = S \cap L_a$. Так как S_0 и S_1 — подгруппы индекса 2 в S и $S_0 \neq S_1$, то $S_1 \setminus S_0$ содержит по лемме 49 бесконечно много элементов и поэтому $(S_1 \setminus S_0) \cap S_0 t$ содержит хотя бы один элемент, отличный от t. Поскольку все инволюции из S_0 сопряжены в $N_0 \leq N$, все инволюции из S_1 сопряжены в N и все отличные от t инволюции из $S_0 t$ сопряжены в N, все инволюции из S между собой сопряжены в N.

Так как по лемме 47 все силовские 2-подгруппы из G сопряжены, лемма доказана.

Лемма 51. *G — простая не локально конечная группа.*

Доказательство. Предположим, что G не является простой и M — ее собственная нетривиальная нормальная подгруппа.

Предположим, что M содержит инволюцию. По лемме 50 M содержит все инволюции и, в частности, содержит силовскую 2-подгруппу S. Так же, как в лемме 47, доказывается, что все силовские 2-подгруппы из M сопряжены в M. По замечанию Фраттини $G = MN_G(S)$. Если c — элемент из $N_G(S)$ и t — инволюция из S, то $\langle c, t\rangle$ — конечная подгруппа, содержащаяся в некоторой подгруппе $K \in \mathfrak{N}$. Так как K порождается инволюциями, то $K \leq M$, откуда $c \in M$ и $N_G(S) \leq M$, т. е. $G = M$.

Поэтому в M нет инволюций. Пусть t — инволюция из G, $1 \neq x \in M$. Если $xt = tx$, то $x \in C_G(t) \cap M \triangleleft C_G(t)$. Так как по леммам 50 и 45 любая нетривиальная нормальная подгруппа из $C_G(t)$ порождается инволюциями, этот случай невозможен, t действует на M при сопряжении без неподвижных точек и поэтому $y = xtx^{-1} \neq 1$. Поскольку $yt = y^{-1}$, то $\langle t, y\rangle$ — конечная подгруппа, содержащаяся в $K \in \mathfrak{N}$ и $y \in K \cap N \triangleleft K$. Так как любая нормальная подгруппа из K порождается инволюциями, $K \cap N$ содержит инволюцию; противоречие.

Итак, G проста.

Предположим, что G локально конечна. Пусть $g \in N$ и $t^g \neq t$. Пусть, далее, h — нетривиальный элемент нечетного порядка из $C_N(t)$. Тогда $\langle t, g, h\rangle$ — конечная подгруппа, содержащаяся в некоторой подгруппе K из $\mathfrak{N}$. Очевидно, $t \notin Z(K)$, и по лемме 45 $C_K(t)$ — 2-группа, что противоречит выбору h. Лемма и вместе с ней теорема 2 доказаны.

Вопрос о существовании не локально конечных групп, удовлетворяющих условиям теоремы 2, остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лыткина Д. В.* Периодические группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых групп // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 340–349.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979.
3. *Боровик А. В.* Вложения конечных групп Шевалле и периодические линейные группы // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 6. С. 26–35.
4. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–493.
5. *Мазуров В. Д.* О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 1. С. 74–86.
6. *Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.* О периодических группах, порожденных парой почти квадратичных автоморфизмов абелевой группы // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 599–603.

Статья поступила 25 марта 2011 г.

Лыткина Дарья Викторовна
Сибирский гос. университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com