Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 512.545

СПЛЕТЕНИЯ ГРУПП МОНОТОННЫХ ПОДСТАНОВОК

А. В. Зенков

Аннотация. Вводится понятие сплетения m-групп подстановок и доказывается, что m-транзитивная группа подстановок, на которой задана m-конгруэнция, вложима в сплетение подходящих m-транзитивных m-групп подстановок. Как следствие установлено, что произвольная m-транзитивная группа из произведения двух многообразий m-групп вложима в сплетение подходящих m-транзитивных групп из этих многообразий.

Ключевые слова: m-группа, представление, m-конгруэнция, сплетение.

1. Введение

Напомним, что *m-группой* называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, {}_* \rangle$, где $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ является ℓ-группой и одноместная операция ${}_*$ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т. е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения

$$(xy)_* = x_* y_*, \quad (x_*)_* = x, \quad (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, \quad (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

В дальнейшем m-группу G с фиксированным автоморфизмом ${}_*$ записываем как пару $(G, {}_*)$. Будем говорить [1], что m-группа $(G, {}_*)$ *представима порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества* Ω, если $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ и $(g)_* = aga$ для любого $g \in G$, где a — реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω. Этот факт записываем в виде (G, Ω, a). Представление (G, Ω, a) назовем *m-транзитивным*, если для любых $w, w' \in \Omega$, быть может, за исключением точки o, существует такой $x \in G_* = \mathrm{gr}(G, a)$, что $(w)x = w'$ (здесь o — точка из Ω, неподвижная относительно действия a). Очевидно, что из транзитивности следует m-транзитивность, но обратное неверно. Например, группа (относительно суперпозиции) всех монотонно возрастающих непрерывных функций действительной прямой $\mathbb{R}$, проходящих через 0, m-транзитивна, но не транзитивна, если $(x)a = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Отметим, что m-транзитивная группа транзитивна тогда и только тогда, когда найдутся такие $w \neq o \in \Omega$ и $g \in G$, что $(w)g = wa$.

Если группа m-транзитивна, но не транзитивна, то такую группу будем называть *собственно m-транзитивной*. Стандартно отношение эквивалентности Θ, определенное на Ω, будем называть *отношением m-эквивалентности*, если оно выпукло и $w \Theta w' \Leftrightarrow (w)x \Theta (w')x$ для любого $x \in G_*$.

В работе вводится понятие сплетения m-групп подстановок и доказано (теорема 3.3), что m-транзитивная группа подстановок (G, Ω, a), на которой определено некоторое нетривиальное отношение m-эквивалентности, вложима в сплетение подходящих m-транзитивных групп подстановок. Как следствие установлено, что m-группа (G, Ω, a) из произведения $\mathscr{U} \cdot \mathscr{V}$ многообразий m-групп $\mathscr{U}, \mathscr{V}$

вложима в сплетение подходящих m-групп подстановок из этих многообразий (следствие 3.5).

Все необходимые сведения по теории групп и решеточно упорядоченных групп можно найти в книгах [1] и [2] соответственно.

2. Представления m-групп

Рассмотрим представление (G, Ω, a). Пусть $L = \{w \in \Omega \mid (w)a > w\}$, $R = \{(l)a \mid l \in L\}$. Заметим, что $L < R$. Действительно, если это не так, то существуют такие $l, l' \in L$, что $(l)a < l'$. Тогда $(l)a < l' < (l')a$ и поэтому $l > l'$. С другой стороны, $l' < (l')a < l$; противоречие. Покажем, что множество точек Ω, неподвижных относительно a, пусто либо состоит из одной точки. Действительно, если точки o_1, o_2 неподвижны относительно a, то неравенство $o_1 < o_2$ влечет $(o_1)a = o_1 > (o_2) = o_2$. В дальнейшем неподвижную точку будем обозначать через o. Отметим, что существуют представления, содержащие неподвижную точку, так и не содержащие таковой. К последним, например, относится правое регулярное представление аддитивной группы $\mathbb{Z}$ целых чисел $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, a)$, где $(z)a = -z + 1$. Таким образом, множество Ω представимо в виде $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^{\varepsilon} \overleftarrow{\cup} R$, где $\varepsilon = 1$, если неподвижная точка существует, и $\varepsilon = 0$ в противном случае.

Областью m-транзитивности, содержащей $w \in \Omega$, будем называть множество $(w)G_* = \{(w)x \mid x \in G_*\}$. Пусть $G_w = \{g \in G \mid (w')g = w' \ \forall w' \in (w)G_*\}$. Очевидно, что G_w является m-идеалом G и $\bigcap G_w = \{e\}$. Поэтому (G, Ω, a) аппроксимируется m-транзитивными группами $(G/G_w, (w)G_*, \bar{a})$.

Непустое выпуклое подмножество $\triangle \subseteq \Omega$ будем называть *m-блоком*, если для любого $x \in G_*$ верно $(\triangle)x \cap \triangle = \varnothing$ либо $(\triangle)x = \triangle$. Следующие утверждения доказываются (см., например, [3]) по аналогии со случаем ℓ-эквивалентности: при этом следует рассматривать лишь группу $G_* = \mathrm{gr}(G, a)$.

Предложение 2.1. *Всякий класс m-эквивалентности является m-блоком. Обратно, если существует m-блок $\triangle$, то на Ω можно определить отношение m-эквивалентности, при котором $\triangle$ будет классом m-эквивалентности.*

Определим на Ω отношение m-эквивалентности ε по правилу $w\varepsilon w' \Leftrightarrow w = w'$ и отношение m-эквивалентности ϱ как $w\varrho w'$ для любых w, w'. Эти две эквивалентности будем называть *тривиальными.* Таким образом, множество $\mathscr{K}$ всех m-эквивалентностей Ω непусто, и, более того, на $\mathscr{K}$ можно ввести отношение частичного порядка $\preceq$, полагая $\Theta_1 \preceq \Theta_2 \Leftrightarrow w\Theta_1 w' \Leftrightarrow w\Theta_2 w'$.

Лемма 2.2. *Пусть (G, Ω, a) — m-транзитивная группа, $w \in \Omega$. Тогда множество m-блоков, содержащих w, линейно упорядочено по включению.*

Лемма 2.3. *Пусть (G, Ω, a) — m-транзитивная группа, $w \in \Omega$ и $\mathscr{K}$ — множество всех m-эквивалентностей Ω. Тогда отображение $\varphi : \Theta \to w\Theta$ множества $\mathscr{K}$ в множество m-блоков, содержащих w, взаимно однозначно и $\Theta_1 \preceq \Theta_2 \Leftrightarrow w\Theta_1 \leq w\Theta_2$.*

Из лемм 2.2 и 2.3 получаем

Предложение 2.4. *Если (G, Ω, a) — m-транзитивная группа, то множество $\mathscr{K}$ всех m-эквивалентностей Ω линейно упорядочено относительно ранее введенного порядка $\preceq$.*

3. Сплетения m-групп

Пусть (G,Ω,a), (H,T,b) — представления m-групп (G,φ) и (H,ψ) соответственно и $\Omega = L_1 \overleftarrow{\cup} \{o_1\}^{\varepsilon_1} \overleftarrow{\cup} R_1$, $T = L_2 \overleftarrow{\cup} \{o_2\}^{\varepsilon_2} \overleftarrow{\cup} R_2$. Рассмотрим стандартное (в смысле ℓ-групп) сплетение $G \wr H$. Всякий элемент $f \in G \wr H$ имеет вид $f = (\{g_\tau\}, h)$, где $g_\tau \in G$, $\tau \in T$, $h \in H$. В [4] на $G \wr H$ был определен реверсивный автоморфизм второго порядка $\varphi \wr \psi$ по правилу $(f)\varphi \wr \psi = (\{(g)\varphi_{(\tau)b}\}, (h)\psi)$, превращающий $G \wr H$ в m-группу. Пусть $\Sigma = \Omega \overleftarrow{\times} T$. Определим на Σ отображение d по правилу $(w,\tau)d = ((w)a, (\tau)b)$. Ясно, что d — реверсивный автоморфизм второго порядка Σ и $(o_1,o_2)d = (o_1,o_2)$. Определим действие элементов группы $G \wr H$ на Σ по принципу: «правая» часть действует на «левой» и наоборот, а именно

$$(w,t)(\{g_\tau\},h) = \begin{cases} ((w)g_t, (t)h), & \text{если } w \le o_1,\ t \ge o_2, \\ ((w)g_{(t)b}, (t)h), & \text{если } w \le o_1,\ t < o_2, \\ ((w)g_t, (t)h), & \text{если } w > o_1,\ t < o_2, \\ ((w)g_{(t)b}, (t)h), & \text{если } w > o_1,\ t \ge o_2. \end{cases}$$

Заметим, что так определенное действие является точным и порядковым, т. е. $G \wr H \subseteq \mathrm{Aut}(\Sigma)$. Проверим, что $(f)\varphi \wr \psi = dfd$. Так как проверка однотипна, то рассмотрим лишь один случай, например, $w < o_1$, $t > o_2$. Тогда $(w,t)(f)\varphi \wr \psi = ((w)ag_t a, (t)bhb)$. Далее, $(w,t)d = ((w)a,(t)b)$ и $(w)a > o_1$, $(t)b > o_2$. Поэтому

$$((w)a,(t)b)fd = ((w)ag_{((t)b)b}, (t)bh)d = ((w)ag_t, (t)bh)d = ((w)ag_t a, (t)bhb),$$

что и доказывает утверждение. Таким образом, имеем представление $(G \wr H, \Sigma, d)$ группы $(G \wr H, \varphi \wr \psi)$, которое будем называть *сплетением* m-групп подстановок (G,Ω,a), (H,T,b).

Лемма 3.1. *Пусть (G,Ω,a) — m-группа, и предположим, что существуют такие m-блоки $\triangle, \triangle'$ и $g \in G$, что $(\triangle)g = \triangle'$. Тогда найдется такой $c \in G$, что $(\triangle)c = \triangle'$ и $c_* = aca = c^{-1}$.*

Доказательство. Рассмотрим действие g_*^{-1} на $\triangle$. Возможны две ситуации: (1) $(\triangle)g_*^{-1} \le \triangle'$; (2)$(\triangle)g_*^{-1} > \triangle'$. В первом случае полагаем $c = g \vee g_*^{-1}$, а во втором — $c = g \wedge g_*^{-1}$. Ясно, что $(\triangle)c = \triangle'$ и $c_* = aca = c^{-1}$. $\square$

Здесь и далее будем рассматривать m-транзитивную группу (G,Ω,a), $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^{\varepsilon} \overleftarrow{\cup} R$. Будем также предполагать, что на Ω задано отношение m-эквивалентности Θ. Пусть $\triangle \subset L$ — произвольный m-блок, и предположим, что существует такой $h \in G$, что $(\triangle)h = (\triangle)a$. В силу леммы 3.1 можно считать $h_* = h^{-1}$. Пусть $\ell \in L$. Найдется $c_\ell \in G$ такой, что $(\triangle_\ell)c_\ell = \triangle$ и $(c_\ell)_* = (c_\ell)^{-1}$. Тогда $(\triangle_\ell a)ac_\ell a = (\triangle)a = (\triangle)h$ и полагаем $c_{(\ell)a} = (c_\ell)^{-1}h^{-1}$. Центральный блок, т. е. такой блок $\triangle'$, что $(\triangle')a = \triangle'$, если он существует, относим к «левой» части. Таким образом, для любого $w \in \Omega$ существует такой $c_w \in G$, что $(\triangle_w)c_w = \triangle$. Координатная функция $c_\triangle$ равна e.

Определим $\Sigma = \triangle \overleftarrow{\times} \Omega/\Theta$. Отображение $\mu : \Omega \to \Sigma$, задаваемое по правилу $(w)\mu = ((w)c_w, w\Theta)$, является порядковым и взаимно однозначным отображением Ω на Σ. Элемент ah^{-1} является реверсивным автоморфизмом 2-го порядка, действующим на $\triangle$. Определим $d : \Sigma \to \Sigma$ по правилу $(\delta, w\Theta)d = ((\delta)ah^{-1}, wa\Theta)$, где $(\delta, w\Theta) \in \Sigma$. Отображение d есть реверсивный автоморфизм 2-го порядка Σ.

Рассмотрим m-группу $(\mathrm{St}_\triangle, \triangle, ah^{-1})$, где $\mathrm{St}_\triangle$ — стабилизатор $\triangle$ в G. Пусть $\delta, \delta' \in \triangle$. Найдется $g \in G$ такой, что $(\delta)g = (\delta')a^\varepsilon$, где $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$. Если

$\varepsilon = 0$, то $g \in \mathrm{St}_{\triangle}$. Если $\varepsilon = 1$, то $(\delta)gh^{-1} = (\delta')ah^{-1} \in \triangle$. Следовательно, $s = gh^{-1} \in \mathrm{St}_{\triangle}$. Поэтому $(\delta)sah^{-1} = \delta'$. Таким образом, $\mathrm{St}_{\triangle}$ действует m-транзитивно на $\triangle$. Далее, пусть $\mathrm{St}_{(\triangle)} = \{g \in G \mid (\delta)g = \delta \ \forall \delta \in \triangle\}$. Несложно заметить, что $\mathrm{St}_{(\triangle)}$ является m-идеалом $\mathrm{St}_{\triangle}$. Стало быть, m-группа $G_{\triangle} = \mathrm{St}_{\triangle} / \mathrm{St}_{(\triangle)}$ действует точно и m-транзитивно на $\triangle$. Через L_Θ обозначим множество всех элементов G, оставляющих все классы эквивалентности на месте. Множество L_Θ является m-идеалом G, и m-группа $\overline{G} = G/L_\Theta$ действует точно и m-транзитивно на линейно упорядоченном множестве Ω/Θ.

Пусть $g \in G$ и $\ell \in L$. Определим следующие элементы:

$$g_{\ell\Theta} = (c_{(\ell)a})^{-1} agc_{(\ell)g} ah^{-1}, \quad g_{(\ell)a\Theta} = (c_\ell)^{-1} agac_{(\ell)aga}.$$

Оба элемента принадлежат $\mathrm{St}_{\triangle}$. Зададим $\tau : G \to G_{\triangle} \wr \overline{G}$ по правилу $(g)\tau = (\{g_{w\Theta}\}, gL_\Theta)$. Отображение τ взаимно однозначно. Проверим, что τ — гомоморфизм.

Пусть $x, y \in G$ и $\ell \in L$. Тогда

$$(xy)\tau = (\{xy_{\ell\Theta}\}, xyL_\Theta),$$

где $xy_{\ell\Theta} = (c_{(\ell)a})^{-1} axyc_{(\ell)xy} ah^{-1}$. Возможны две ситуации: (1) $(\ell)x \in L$, 2) $(\ell)x \in R$. В первом случае

$$y_{(\ell)x\Theta} = (c_{(\ell)xa})^{-1} ayc_{(\ell)xy} ah^{-1}.$$

Так как $(\ell)x \in L$, то $c_{(\ell)xa} = c^{-1}_{(\ell)x} h^{-1}$. Поэтому

$$x_{\ell\Theta} y_{(\ell)x\Theta} = c^{-1}_{(\ell)a} axc_{(\ell)x} ah^{-1} c^{-1}_{(\ell)xa} ayc_{(\ell)xy} ah^{-1},$$

$$x_{\ell\Theta} y_{(\ell)x\Theta} = c^{-1}_{(\ell)a} axc_{(\ell)x} ah^{-1} hc_{(\ell)x} ayc_{(\ell)xy} ah^{-1},$$

$$x_{\ell\Theta} y_{(\ell)x\Theta} = c^{-1}_{(\ell)a} axc_{(\ell)x} ac_{(\ell)x} ayc_{(\ell)xy} ah^{-1},$$

$$x_{\ell\Theta} y_{(\ell)x\Theta} = c^{-1}_{(\ell)a} axc_{(\ell)x} c^{-1}_{(\ell)x} yc_{(\ell)xy} ah^{-1},$$

$$x_{\ell\Theta} y_{(\ell)x\Theta} = c^{-1}_{(\ell)a} axyc_{(\ell)xy} ah^{-1} = xy_{\ell\Theta}.$$

Таким образом, в этом случае доказано, что τ есть гомоморфизм.

Пусть $(\ell)x \in R$. Тогда $y_{(\ell)x\Theta} = (c_{(\ell)xa})^{-1} ayac_{(\ell)xya}$. Так как $(\ell)x \in R$, то $c_{(\ell)x} = c^{-1}_{(\ell)xa} h^{-1}$. Следовательно,

$$x_{\ell\Theta} y_{(\ell)x\Theta} = c^{-1}_{(\ell)a} axc_{(\ell)x} ah^{-1} c^{-1}_{(\ell)xa} ayac_{(\ell)xya},$$

$$x_{\ell\Theta} y_{(\ell)x\Theta} = c^{-1}_{(\ell)a} axc^{-1}_{(\ell)xa} h^{-1} ah^{-1} c^{-1}_{(\ell)xa} ayac_{(\ell)xya},$$

$$x_{\ell\Theta} y_{(\ell)x\Theta} = c^{-1}_{(\ell)a} axyac_{(\ell)xya}.$$

Если $(\ell)xy \in L$, то $c_{(\ell)xya} = c^{-1}_{(\ell)xy} h^{-1}$. Тогда $ac_{(\ell)xya} = ac^{-1}_{(\ell)xy} aah^{-1} = c_{(\ell)xy} ah^{-1}$, т. е. $x_{\ell\Theta} y_{\ell x\Theta} = xy_{\ell\Theta}$.

Если $(\ell)xy \in R$, то $c_{(\ell)xy} = c^{-1}_{(\ell)xya} h^{-1}$. Поэтому

$$c_{(\ell)xy} ah^{-1} = aac^{-1}_{(\ell)xya} h^{-1} ah^{-1} = ac_{(\ell)xya},$$

т. е. $x_{\ell\Theta} y_{\ell x\Theta} = xy_{\ell\Theta}$. Таким образом, и в этом случае доказано, что τ есть гомоморфизм.

Случай $(\ell)a \in R$ проверяется аналогично.

Покажем, что $(aga)\tau = d(g)\tau d$, $g \in G$. Пусть $\ell \in L$. Тогда

$$((\ell)\mu)d(g)\tau d = ((\ell)c_\ell, \ell\Theta)d(g)\tau d = ((\ell)c_\ell a h^{-1}, (\ell)a\Theta)(\{g_{(\ell)\Theta}\}, gL_\Theta)d$$
$$= ((\ell)c_\ell a h^{-1} c^{-1}_{(\ell)a} agc_{(\ell)g} ah^{-1}, ag\Theta)d = ((\ell)gc_{(\ell)g}, aga\Theta).$$

С другой стороны, $((\ell)\mu)(aga)\tau = ((\ell)c_\ell, \ell\Theta)(\{aga_{(\ell)a\Theta}\}, agaL_\Theta) = ((\ell)gc_{(\ell)g}, aga\Theta)$. Тем самым доказано необходимое равенство, если $\ell \in L$. Случай $(\ell)a \in R$ разбирается аналогично.

Итак, при сделанных предположениях m-группа (G, Ω, a) m-вложима в $(G_\triangle \wr \overline{G}, \Sigma, d)$.

Пусть теперь для любого m-блока $\triangle \subseteq L$ и $g \in G$ такого, что $(\triangle)g \subset R$ выполнено $(\triangle)g \neq (\triangle)a$. Можно считать, что $g > e$. Рассмотрим $h = g \vee ag^{-1}a$. Заметим, что $aha = h^{-1}$. Так как $h \geq g$, то $(\triangle)h \subset R$ и поэтому найдется такой m-блок $\triangle_1 \subset L$, что $(\triangle_1)a = (\triangle)h$ и $\triangle_1 \neq \triangle$. Будем считать, что $\triangle < \triangle_1$. В этом случае не существует $f \in G : (\triangle)f = \triangle_1$.

Отметим, что $(\triangle_1)ah^{-1}a = (\triangle)a$, т. е. $(\triangle_1)h = (\triangle)a$. Рассмотрим множество классов m-эквивалентности $\triangle_w$ такое, что существует $c_w \in G$, для которого $(\triangle_w)c_w = \triangle$. Полагаем $c_\triangle = e$. Можно считать $ac_wa = c_w^{-1}$. Отметим, что $(w)c_w \in \triangle \Leftrightarrow (wa)c_{wa} \in (\triangle)a$. Поэтому $\triangle_{(w)a}ac_wa = (\triangle)a = \triangle_1 h$ и полагаем $c_{(w)a} = c_w^{-1}h^{-1}$. Рассмотрим $\nabla = \triangle \overleftarrow{\cup} \triangle_1$ и $\Sigma = \nabla \overleftarrow{\times} \Omega/\Theta$. Отображение $\mu : \Omega \to \Sigma$, определяемое по правилу $(w)\mu = ((w)c_w, w\Theta)$, является порядковым и взаимно однозначным отображением Ω на Σ. Элемент ah^{-1} является реверсивным автоморфизмом 2-го порядка, действующим на ∇, при этом $(\triangle)ah^{-1} = \triangle_1$ и $(\triangle_1)ah^{-1} = \triangle$. Определим отображение $d : \Sigma \to \Sigma$ по правилу $(\delta, w\Theta)d = ((\delta)ah^{-1}, wa\Theta)$, где $(\delta, w\Theta) \in \Sigma$. Отображение d — реверсивный автоморфизм 2-го порядка Σ. Имеем $G_{(\nabla)} = \mathrm{St}_\triangle \cap \mathrm{St}_{\triangle_1}$, $\overline{G} = G/L_\Theta$. Несложно заметить, что m-группа $(G_{(\nabla)}, ah^{-1})$ собственно m-транзитивна на ∇. Факторизуя $G_{(\nabla)}$ по m-идеалу, оставляющему все точки ∇ на месте, получим m-группу (G_∇, ah^{-1}), действующую точно и собственно m-транзитивно на ∇.

Лемма 3.2. *Пусть $h \in G$, $aha = h^{-1}$ и $s \in \mathrm{St}_\triangle$. Тогда существует такой $t(s) \in \mathrm{St}_\triangle \cap \mathrm{St}_{\triangle ah}$, что $s = t(s)$ на $\triangle$.*

Доказательство. Если $s \in \mathrm{St}_{\triangle ah}$, то $t(s) = s$, и все доказано. Пусть $s \notin \mathrm{St}_{\triangle ah}$. Тогда $(s^{-1})^{ah} \notin \mathrm{St}_\triangle$ и, следовательно, $\triangle \neq (\triangle)(s^{-1})^{ah}$. Если $(\triangle)(s^{-1})^{ah} < \triangle$, то $(\triangle)ahs < (\triangle)ah$ и тогда $t(s) = s \vee (s^{-1})^{ah}$. Если же $\triangle < (\triangle)(s^{-1})^{ah}$, то $t(s) = s \wedge (s^{-1})^{ah}$. Отметим, что в обоих случаях действие $t(s)$ на $(\triangle)ah$ совпадает с действием $(s^{-1})^{ah}$, т. е. $t(s) \in \mathrm{St}_\triangle \cap \mathrm{St}_{\triangle ah}$. □

Пусть $g \in G$ и $w \in \Omega$. Определим $g_{w\Theta} = ah^{-1}c_w^{-1}gc_{(w)g}ah^{-1}$. В силу леммы 3.2 можно считать, что $g_{w\Theta} \in G_{(\nabla)}$. Зададим $\tau : G \to G_\nabla \wr \overline{G}$ по правилу $(g)\tau = (\{g_{w\Theta}\}, gL_\Theta)$. Проверка того, что пара (μ, τ) определяет m-вложение (G, Ω, a) в $(G_\nabla \wr \overline{G}, \Sigma, d)$, проводится по аналогии с рассмотренным выше случаем.

Пусть теперь для любой $\ell \in L$ и любого $g \in G$ верно $(\ell)g \in L$. Тогда G действует транзитивно на L и R. Зафиксируем $\triangle \subseteq L$. Для любого класса m-эквивалентности $\triangle_\ell \subseteq L$ существует $c_\ell \in G$ такой, что $(\triangle_\ell)c_\ell = \triangle$ и $(c_\ell)_* = ac_\ell a = c_\ell^{-1}$. Отметим, что $((\triangle_\ell)a)ac_l a = (\triangle)a$, и полагаем $c_{(\ell)a} = ac_\ell a = c_\ell^{-1}$. Как обычно, $c_\triangle = e$.

Определим $\nabla = \triangle \overleftarrow{\cup} (\triangle)a$, и тогда $\Sigma = \nabla \overleftarrow{\times} \Omega/\Theta$. Отображение $\mu : \Omega \to \Sigma$, определяемое по правилу $(w)\mu = ((w)c_w, w\Theta)$, является порядковым отображением Ω на Σ. На Σ естественным образом определяется реверсивный автоморфизм 2-го порядка d, а именно $(\delta, w\Theta)d = ((\delta)a, (w)a\Theta)$.

Пусть $g \in G$ и $\triangle_\ell \subset L$ — произвольный m-блок. Тогда $(\triangle_\ell)c_\ell = \triangle$. Значит, $(\triangle)c_\ell^{-1}gc_{(\ell)g} = \triangle$. По лемме 3.2 $c_\ell^{-1}gc_{(\ell)g} \in G_{(\nabla)}$, где $G_{(\nabla)} = \mathrm{St}_\triangle \cap \mathrm{St}_{\triangle a}$. Для $\triangle_{(\ell)a} \subseteq R$ соответствующий g элемент $G_{(\nabla)}$ имеет вид $c_{(\ell)a}^{-1}gc_{(\ell)ag} = c_\ell gc_{(\ell)ag}$. Отметим, что m-группа $(G_{(\nabla)}, a)$ собственно m-транзитивна на ∇. Факторизуя $G_{(\nabla)}$ по m-идеалу, оставляющему все точки ∇ на месте, получим m-группу (G_∇, a), действующую точно и собственно m-транзитивно на ∇. Дальнейшие рассуждения аналогичны проведенным в рассмотренном выше случае. Тем самым доказана

Теорема 3.3. *Пусть представление (G, Ω, a) m-транзитивно и на Ω определена нетривиальная m-конгруэнция Θ. Тогда (G, Ω, a) изоморфно вложима в сплетение $(G_\nabla \wr \overline{G}, \Sigma, d)$, где группы G_∇ и $\overline{G}$ действуют точно и m-транзитивно на множествах ∇ и Ω/Θ соответственно.*

Напомним [3], что ℓ-подгруппа H ℓ-группы G называется *замкнутой*, если для любого подмножества элементов H, у которого в G существует точная верхняя грань, она принадлежит H. m-Подгруппу H m-группы G будем называть замкнутой, если она замкнута как ℓ-подгруппа. Отметим, что $\big(\bigvee_{i \in I} h_i\big)_* = \bigwedge_{i \in I}(h_i)_*$, $h_i \in H$.

Предложение 3.4. *Пусть (G, Ω, a) — m-группа подстановок и H — замкнутый идеал. Тогда существует такая m-конгруэнция Θ, что $L_\Theta = H$.*

Доказательство. Пусть $w \in \Omega$. Рассмотрим $\triangle_w = \mathrm{Conv}_\Omega((w)H)$ — выпуклое замыкание в Ω орбиты $(w)H$. Далее, пусть $w' \notin \triangle_w$. Покажем, что $\triangle_w \cap \triangle_{w'} = \varnothing$. Если это не так, то существуют такие $w'' \in \Omega$, $h_1, h_2, h_3, h_4 \in H$, что $(w)h_1 \le w'' \le (w)h_2$, $(w')h_3 \le w'' \le (w')h_4$. Но тогда

$$(w)h_1h_4^{-1} \le (w'')h_4^{-1} \le w' \le (w'')h_3^{-1} \le (w)h_2h_3^{-1},$$

что невозможно. Аналогично можно показать, что $(\triangle_w)x = \triangle_{(w)x}$, $x \in G_* = gr(G, a)$. Таким образом построенные множества можно рассматривать как классы m-эквивалентности Θ. Ясно, что $H \subseteq L_\Theta$. Пусть $g \ge e \in L_\Theta$. Тогда для любого $w \in \Omega$ существует такой $h_w \ge e \in H$, что $w \le (w)g \le (w)h_w$. Следовательно, $g \wedge h_w \in H$. Тогда получаем [3, с. 5], что $\bigvee_w (g \wedge h_w) = g \wedge \big(\bigvee_w h_w\big) = g \in H$, т. е. $L_\Theta \subseteq H$. $\square$

Рассмотрим m-транзитивную группа подстановок (G, Ω, a) из произведения $\mathscr{U} \cdot \mathscr{V}$ многообразий m-групп $\mathscr{U}, \mathscr{V}$. Через $\mathscr{U}(G)$ обозначим $\mathscr{U}$-радикал группы G. В [5], в частности, доказано, что $\mathscr{U}(G)$ является замкнутой подгруппой G. Тогда $\mathscr{U}(G)$ определяет на Ω выпуклую m-конгруэнцию. Следовательно, (G, Ω, a) изоморфна вложима в сплетение $(G_\nabla \wr G/\mathscr{U}(G), \Sigma, d)$, где группа G_∇ действует m-транзитивно на подходящем множестве ∇. Так как ∇ строится из классов m-эквивалентности, определяемых $\mathscr{U}(G)$, то $\mathscr{U}(G) \subseteq G_{(\nabla)}$. Поэтому замыкание образа $\mathscr{U}(G)$ в фактор-группе G_∇ совпадает с ней самой. Таким образом, доказано

Следствие 3.5. *Пусть (G, Ω, a) — m-транзитивная группа подстановок из произведения $\mathscr{U} \cdot \mathscr{V}$ многообразий m-групп $\mathscr{U}, \mathscr{V}$. Тогда (G, Ω, a) изоморфно вложима в сплетение подходящих m-транзитивных групп подстановок этих многообразий.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
2. *Kopytov V. M., Medvedev N. Ya.* The theory of lattice-ordered groups. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994.
3. *Медведев Н. Я.* Сплетения и многообразия решеточно упорядоченных групп. Барнаул: Изд-во Алтайского ун-та, 1990.
4. *Giraudet M., Rachunek J.* Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. 1999. V. 49, N 124. P. 743–766.
5. *Исаева О. В.* Многообразия и классы кручения m-групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 6. С. 683–691.

Статья поступила 13 мая 2010 г.

Зенков Алексей Владимирович
Алтайский гос. аграрный университет, кафедра математики,
Красноармейский пр., 98, Барнаул 656049
alexey_zenkov@yahoo.com