Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 510.67:512.57

КАТЕГОРИЧНЫЕ ХОРНОВЫ ТЕОРИИ И МОДУЛИ

Е. А. Палютин

Аннотация. Изучается связь между структурами с категоричными хорновыми теориями и модулями. Показано, что любое функциональное обогащение любой абелевой группы до примитивно нормальной структуры примитивно эквивалентно некоторому модулю. Дано описание категоричных хорновых классов модулей. Предложены некоторые достаточные условия, когда категоричная хорнова теория примитивно эквивалентна некоторой теории модулей. В частности, такими теориями являются категоричные хорновы теории обогащений абелевых групп с условиями примитивного ранга ≤ 3 и отсутствия в языке предикатных символов местности ≥ 3.

Ключевые слова: категоричная теория, хорнов класс, модуль, примитивная формула, нормальная формула.

§ 1. Введение

С изучения категоричных аксиоматизируемых классов началась теория стабильности и классификации моделей, являющаяся основой современной общей теории моделей. Наиболее простым (по определению) случаем категоричных теорий является случай сильно минимальных теорий. Однако после известных результатов Хрушовского не осталось никакой надежды получить полное описание структуры моделей сильно минимальных теорий. Среди категоричных теорий наиболее изученное строение имеют категоричные квазимногообразия (универсальные хорновы классы) (см. [1]) и позитивные хорновы классы (см. [2]). Что касается теорий этих классов, можно считать, что получено полное описание строения их моделей. Для хорновых теорий на данный момент нет полного описания строения их моделей, однако их структурная теория достаточно глубоко развита (см. [3, 4]). Данная работа продолжает изучение строения моделей категоричных хорновых теорий. В ней исследуется случай, когда на моделях этих теорий примитивно задана групповая операция. Рассмотрение этого случая закономерно, так как интерпретация групп очень влияет на строение моделей категоричных хорновых теорий. Например, как показано в [4], если в моделях категоричной хорновой теории позитивно не интерпретируется никакая нетривиальная группа, то эта теория, по существу, является универсальной хорновой теорией и, как отмечено выше, имеет полностью изученную структуру ее моделей.

В § 2 даются необходимые определения и ссылки. Основной результат § 3 содержится в теореме 1, описывающей строение моделей категоричных хорновых теорий модулей. Как следствие получается описание абелевых групп с категоричной хорновой теорией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09–01–00336–а), а также Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ–3669.2010.1).

В § 4 изучаются обогащения абелевых групп, имеющих примитивно нормальные теории. Основными результатами этого параграфа являются теоремы 2 и 3 о том, что в случае, когда язык не содержит предикатных символов, такие структуры, по существу, являются модулями. То же самое верно, если такие структуры имеют минимальный примитивный ранг.

В § 5 доказаны достаточные условия на хорновы категоричные теории, которые влекут примитивную эквивалентность модулям с точностью до констант. К случаям из § 4 прибавляются случай примитивного ранга 3 и случай отсутствия в языке предикатных символов местности ≥ 3.

§ 2. Терминология и обозначения

Основные понятия, связанные с теорией моделей, можно найти в книге [5]. Отметим только, что там вместо термина «структура» используется термин «алгебраическая система», а вместо «язык» — «сигнатура».

Все используемые далее понятия, связанные с теорией моделей модулей, можно найти в статье [6], понятия, связанные с хорновыми теориями, — в [3, 4], однако для удобства читателя наиболее важные определения будут приведены в данной статье.

Под кольцом будем понимать ассоциативное кольцо с единицей. Под классом структур понимается класс структур одного языка. Для класса структур K через $\mathrm{Th}(K)$ обозначается элементарная теория класса K. Для языка L через $|L|$ обозначается мощность множества формул языка L.

Класс структур K называется *категоричным в мощности* λ, если все K-структуры мощности λ изоморфны. Класс K языка L называется *категоричным*, если он является категоричным в некоторой мощности $> |L|$. Отметим, что в статье [3] категоричным назывался класс, категоричный в некоторой мощности $\geq |L|$. Заметим, что по теореме Морли — Шелаха (см. [7]) категоричный аксиоматизируемый класс языка L категоричен во всех мощностях $> |L|$. Элементарную теорию T будем называть *категоричной*, если категоричным является класс ее моделей $\mathrm{Mod}(T)$.

Как правило, будем рассматривать полные теории T языка L, имеющие бесконечные модели. Мощность языка L не ограничиваем. Многие свойства теории T определяем через свойства ее моделей. Если модель теории T не зафиксирована, то в качестве такой модели будет выступать, как обычно, некоторая достаточно насыщенная модель C теории T и все рассматриваемые модели будут считаться ее элементарными подмоделями. Если не оговорено противное, то все рассматриваемые элементы и множества будут браться из C. Мы дадим определения некоторых понятий для структуры C, подразумевая соответствующие понятия также для любой другой структуры A.

Класс структур называется *хорновым*, если он аксиоматизируем и замкнут относительно взятия фильтрованных произведений.

Формулы вида
$$\exists x_1 \cdots \exists x_n (\Phi_0 \wedge \cdots \wedge \Phi_k),$$
где Φ_i, $i \leq k$, — атомарные формулы, называются *позитивно примитивными*. Для краткости будем их называть *примитивными*. При $n = k = 0$ получаем атомарную формулу. Таким образом, класс примитивных формул — это наименьший класс формул, содержащий атомарные формулы и замкнутый относительно конъюнкции и навешивания кванторов существования. Под примитивной формулой в структуре A, если не оговорено противное, понимается

примитивная формула с параметрами из A. В дальнейшем под примитивной определимостью операций и множеств будем понимать примитивную определимость с параметрами.

Кортежи (n-ки) элементов $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ и переменных $\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ будут обозначаться соответствующими жирными буквами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$. Если $\mathbf{s}$ — кортеж элементов или переменных, то через $l(\mathbf{s})$ обозначаем его длину.

Эквивалентность α на некотором множестве X n-ок элементов из структуры C, определенная в C с помощью некоторой примитивной формулы $\Phi(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$, называется *примитивной эквивалентностью.* Область определения X такой эквивалентности α определяется в C примитивной формулой $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ и обозначается через $\operatorname{dom}\alpha$. Эквивалентность α будем называть *тотальной*, если $\operatorname{dom}\alpha = C$.

Если $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — примитивная формула, A — структура, $\mathbf{a}$ — кортеж элементов из A, $l(\mathbf{a}) = l(\mathbf{y})$, то через $\Phi(A, \mathbf{a})$ обозначается множество всех кортежей элементов из A, которые выполняют в A формулу $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{a})$. Такие множества называются *примитивными множествами* (в A). Если при этом кортеж переменных $\mathbf{a}$ является пустым, то соответствующие множества называются *$\varnothing$-определимыми примитивными множествами.*

Если $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — примитивная формула, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — n-ки из C и $l(\mathbf{a}) = l(\mathbf{b}) = l(\mathbf{y})$, то множества $\Phi(C, \mathbf{a})$ и $\Phi(C, \mathbf{b})$ называются *примитивными копиями.*

Определение. Теория T называется *примитивно нормальной*, если для любых примитивных копий X, Y выполнено $X = Y$ или $X \cap Y = \varnothing$.

В случае модуля M над ассоциативным кольцом R примитивные копии являются классами смежности некоторой подгруппы, поэтому теории модулей примитивно нормальны. Примитивно нормальна также теория системы A, если теория ее декартовой степени A^ω стабильна (см. [3]).

Если $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — примитивная формула без параметров, то через $\mathbf{x}\Phi$ обозначаем формулу

$$\exists \mathbf{y}(\Phi(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}) \wedge \Phi(\mathbf{x}^2, \mathbf{y})).$$

Если теория T примитивно нормальна, то формула $(\mathbf{x}\Phi)(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ определяет в C эквивалентность, областью определения которой является множество $\exists\mathbf{y}\Phi(C, \mathbf{y})$, а ее классами будут все непустые множества вида $\Phi(C, \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ — набор элементов из C. Отсюда вытекает, что непустое примитивное множество X является классом некоторой $\varnothing$-определимой примитивной эквивалентности α, в частности, непустые примитивные множества X и Y тогда и только тогда будут примитивными копиями, когда они являются классами одной примитивной эквивалентности α.

Определение. Бесконечное множество X называется *примитивно минимальным*, если для любого примитивного множества Y выполнено либо $X \subseteq Y$ либо $|X \cap Y| \leq 1$.

Отметим, что в [3, 4] предыдущее понятие называлось сильной примитивной минимальностью. В теории моделей минимальность отличается от сильной минимальности, однако для насыщенных структур эти понятия совпадают. Мы будем работать со структурами, теории которых категоричны в мощности этой структуры, а такие структуры насыщенны.

Определение. Примитивная эквивалентность $\Phi(x, y)$ называется *примитивно минимальной*, если ее классы являются примитивно минимальными.

Определение. *Примитивным рангом* $\mathrm{pr}^A(X)$ примитивного множества $X \subseteq A$ в структуре A называется верхняя граница длин строго убывающих по включению конечных цепей примитивных непустых подмножеств множества X в структуре A, если такая граница существует, либо символ ω, если такой границы нет. Для структуры A число $\mathrm{pr}^A(A)$ называется *примитивным рангом структуры* A и обозначается через $\mathrm{pr}(A)$. Для полной теории T число $\mathrm{pr}(M)$ для некоторой T-модели M называется *примитивным рангом теории* T и обозначается через $\mathrm{pr}(T)$. Это определение корректно, так как для элементарно эквивалентных структур A и B выполнено равенство $\mathrm{pr}(A) = \mathrm{pr}(B)$.

Конечность примитивного ранга для структур с категоричной хорновой теорией показана в [3, лемма 15]. Так как мы рассматриваем только полные теории T с бесконечными моделями, а одноэлементное множество примитивно, то $\mathrm{pr}(T) \geq 2$.

В [3] показано, что в структурах с категоричной хорновой теорией нет конечных непустых и неодноэлементных примитивных множеств. Поэтому для категоричной полной хорновой теории T примитивное множество X является примитивно минимальным тогда и только тогда, когда $\mathrm{pr}^C(X) = 2$.

Напомним, что структура B называется *обогащением структуры* A, если их носители совпадают, а язык структуры B содержит язык структуры A.

Определение. (1) Пусть структура B является обогащением структуры A. Структура B называется *примитивным обогащением структуры* A, если для любой атомной формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ вида $r(x_1, \dots, x_n)$ или $f(x_1, \dots, x_{(n-1)}) = x_n$, где r и f — символы языка структуры B, не входящие в язык структуры A, существует примитивная формула $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ без параметров языка структуры A, для которой выполняется условие $\Phi(B) = \Psi(A)$.

(2) Структуры A_1 и A_2 называются *примитивно эквивалентными*, если существуют примитивные обогащения B_1, B_2 соответственно структур A_1, A_2 и структура B_2 получается из структуры B_1 переобозначением символов языка.

(3) Полные теории T_1, T_2 называются *примитивно эквивалентными*, если существуют модели A_1, A_2 соответствующих теорий, которые являются примитивно эквивалентными.

Заметим, что у примитивно эквивалентных структур носители совпадают.

§ 3. Модули с категоричной хорновой теорией

Язык L_R модуля M над кольцом R состоит из символа двуместной операции $+$, символа константы 0 и символов одноместных операций r, где $r \in R$.

Если $\varphi(x), \psi(x)$ — позитивно примитивные формулы языка L_R, M — модуль над кольцом R, то через $\varphi/\psi(M)$ будем обозначать индекс $[H\colon K]$ по модулю ∞, где $H = \varphi(M)$, а $K = (\varphi \wedge \psi)(M)$.

Предложение 1. *Пусть T — некоторая теория модулей над кольцом R. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *теория T является полной и хорновой;*

(2) *для любой пары примитивных формул $\varphi(x), \psi(x)$ теория T содержит либо множество предложений, выражающих тот факт, что индекс φ/ψ бесконечен, либо предложение, выражающее, что этот индекс равен* 1.

Доказательство. (1)⇒(2). Из хорновости и полноты теории T вытекает $M \equiv M \oplus M$. Ясно, что имеет место равенство

$$\varphi/\psi(M \oplus M) = (\varphi/\psi(M))^2. \tag{1}$$

Так как индекс выражается на языке первого порядка, то $\varphi/\psi(M \oplus M) = (\varphi/\psi(M))$ и равенство (1) возможно только при условии $\varphi/\psi(M) \in \{1, \infty\}$.

(2)⇒(1). Условие (2) влечет полноту теории T, поскольку индексы $\varphi/\psi(M)$ определяют элементарный тип модуля M (см. [6]). Хорновость теории T получается из того, что фильтрованные произведения сохраняют индекс ∞ и индекс 1. $\square$

Замечание 1. Пусть T — полная хорнова теория модулей. Из теоремы об элиминации кванторов для полных теорий модулей до примитивных формул вытекает, что тотальная трансцендентность (суперстабильность) теории T равносильна условию обрыва убывающих цепей примитивных множеств (убывающих цепей примитивных множеств, каждый член которых имеет бесконечный индекс в предыдущем члене). Из предыдущего предложения получаем, что для полных хорновых теорий свойства суперстабильности и тотальной трансцендентности совпадают.

Для модуля M и кардинала $\varkappa$ через $M^{<\varkappa}$ будем обозначать прямую сумму $\varkappa$ экземпляров модуля M.

Предложение 2. *Пусть T — некоторая хорнова теория модулей над кольцом R. Тогда существует модель M теории T, имеющая вид*

$$M = \bigoplus_{i \in I} U_i^{<\omega},$$

где U_i, $i \in I$, — попарно не изоморфные неразложимые компактные модули.

Доказательство. Пусть M — неодноэлементная модель теории T. Пусть M^F — фильтрованная степень модуля M по фильтру Фреше. Теория $T_1 = \mathrm{Th}(M^F)$ будет полным хорновым расширением теории T. По теореме 6.9 из [6] существует модель N теории T_1 вида

$$N = \bigoplus_{i \in I} U_i^{<\lambda_i},$$

где U_i, $i \in I$, — попарно не изоморфные неразложимые компактные модули и λ_i, $i \in I$, — некоторые кардиналы. Отметим, что хорнов класс модулей замкнут относительно прямых сумм. Так как теория T_1 полна и хорнова, то $N \equiv N^{<\omega}$, поэтому можно считать, что все λ_i, $i \in I$, бесконечны. Ясно, что для любого модуля S и любых бесконечных кардиналов λ_1, λ_2 у модулей $S^{<\lambda_1}$ и $S^{<\lambda_2}$ индексы φ/ψ для примитивных формул $\varphi(x)$, $\psi(x)$ будут либо бесконечными, либо единичными. Следовательно, эти модули элементарно эквивалентны. Так как взятие прямой суммы сохраняет элементарную эквивалентность, в качестве искомого модуля можно взять модуль

$$M = \bigoplus_{i \in I} U_i^{<\omega}. \qquad \square$$

Теорема 1. *Пусть T — полная хорнова теория модулей над кольцом R, $\varrho = |R \cup \omega|$. Следующие условия равносильны:*

(1) *теория T категорична в мощностях $> \varrho$;*

(2) *существует неразложимый компактный R-модуль U такой, что любая T-модель мощности $\lambda > \varrho$ имеет вид $U^{<\lambda}$;*

(3) *теория T тотально трансцендентна и все неразложимые компактные модули, являющиеся прямыми слагаемыми в T-моделях, изоморфны.*

Доказательство. Утверждение (2)⇒(1) тривиально.

(1)⇒(2) Предположим, что выполнено свойство (1). Теория T суперстабильна (см. [7]). По замечанию 1 T тотально трансцендентна, и по следствию 3.11(2) из [6] мощности неразложимых компактных модулей не превосходят ϱ. По предложению 2 существует T-модель $M = \bigoplus_{i\in I} U_i^{<\omega}$, где U_i, $i \in I$, — попарно не изоморфные неразложимые компактные модули. Покажем, что $|I| = 1$. Предположим, что существуют различные $i_1, i_2 \in I$. Возьмем кардинал $\varkappa > \max\{\varrho, |I|\}$. Рассмотрим модули $M_j = M \oplus U_{i_j}^{<\varkappa}$, $j \in \{1, 2\}$. По выбору кардинала $\varkappa$ и условию $|U_{i_j}| \leq \varrho$ получаем $|M_1| = |M_2| = \varkappa$. Так как $M_1 \equiv M_2 \equiv M$, в силу категоричности теории T в мощности $\varkappa$ модули M_1 и M_2 изоморфны. Это противоречит теореме Круля — Ремака — Шмидта о единственности разложения модуля на неразложимые компактные слагаемые.

Таким образом, существует некоторый неразложимый компактный модуль U такой, что $U^{<\omega}$ — модель теории T. Так как для любого кардинала $\lambda > \varrho$ имеем $U^{<\lambda} \equiv U^{<\omega}$ и $|U^{<\lambda}| = \lambda$, из категоричности T в мощностях $> \varrho$ получаем свойство (2).

(2)⇒(3) Пусть выполнено условие (2) и U — неразложимый компактный модуль из условия (2). Предположим, что существует неразложимый компактный модуль V, не изоморфный модулю U и являющийся прямыми слагаемыми некоторого T-модуля. В силу условия (2) это противоречит теореме Круля — Ремака — Шмидта. Тотальная трансцендентность теории T следует из суперстабильности категоричных теорий, утверждения (2)⇒(1) и замечания 1.

Осталось показать (3)⇒(2). Эта импликация сразу получается из следствия 7.3(2) из [6], которое утверждает, что любой тотально трансцендентный модуль является прямой суммой компактных неразложимых модулей. □

В качестве следствия доказанной теоремы получаем описание абелевых групп с категоричной хорновой теорией. Отметим, что в статье [4] также получено описание таких групп.

Следствие 1. *Для того чтобы абелева группа имела категоричную хорнову теорию, необходимо и достаточно, чтобы она имела один из следующих видов:*

(1) $C_{p^n}^{<\lambda}$, *где* C_{p^n} — *циклическая группа порядка* p^n *для простого числа* p *и натурального числа* $n > 0$, λ — *бесконечный кардинал;*

(2) Q^{λ}, *где* Q — *группа рациональных чисел по сложению,* λ — *любой ненулевой кардинал.*

Доказательство получается из теоремы 1 и предложения 8.4.12 в [5]. □

§ 4. Глобально аддитивные структуры

Определение. 1. Класс K структур языка L назовем *глобально аффинным*, если существует примитивная формула $\varphi(x, y, z, w)$, определяющая на каждой K-структуре A аффинное сложение. Аффинное сложение получается, если вместо двух операций $x + y$ и $-x$ абелевой группы взять одну трехместную операцию $x + y - z$. Вместо $\varphi(x, y, z, w)$ будем писать $w = x + y - z$.

2. Класс K структур языка L назовем *глобально аддитивным*, если существуют примитивная формула $\varphi(x, y, z)$ и константа c, определяющие на каждой K-структуре A структуру абелевой группы с нулем c. Вместо $\varphi(x, y, z)$ будем писать $z = x + y$ и 0 — вместо c. Указанную выше группу для K-структуры A будем называть *базисной* и обозначать через A_+.

3. Структуру A будем называть *глобально аддитивной* (*аффинной*), если таковым является класс $\{A\}$.

4. Одноместная операция $f(x)$, примитивно определенная в глобально аддитивной структуре A, называется *приведенной на* A, если в A выполнено $f(0) = 0$.

Ясно, что свойство глобальной аддитивности влечет свойство глобальной аффинности. Отметим также, что любое обогащение глобально аффинной структуры A на одну константу c будет глобально аддитивной структурой со сложением $x + y - c$ и нулем c.

Замечание 2. Приведенная операция f на примитивно нормальной глобально аддитивной структуре A определяется в структуре A примитивной формулой без параметров. В самом деле, пусть операция f определяется в структуре A примитивной формулой $\Phi(x, y; \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ — набор параметров из A. Из примитивной нормальности структуры A и условия $f(0) = 0$ получаем, что формула

$$\exists \mathbf{z}(\Phi(x, y; \mathbf{z}) \wedge \Phi(0, 0; \mathbf{z}))$$

будет определять ту же операцию $f(x) = y$.

Предложение 3. *Пусть A — примитивно нормальная глобально аддитивная структура и h — приведенная операция на A. Тогда h является эндоморфизмом базисной группы A_+.*

Доказательство. Рассмотрим примитивную формулу $\Phi(x, y)$, выражающую свойство

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Так как $f(0) = 0$, имеем $\Phi(0, A) = A$ и $\Phi(A, 0) = A$. В частности, для любого $a \in A$ выполнено $0 \in (\Phi(0, A) \cap \Phi(a, A))$. Из примитивной нормальности получаем равенство $\Phi(a, A) = A$. Таким образом, условие $f(a+b) = f(a)+f(b)$ выполнено для любой пары элементов a, b из A. $\square$

Определение. Пусть A — примитивно нормальная глобально аддитивная структура языка L. Пусть R_A — множество всех приведенных операций структуры A. Это множество замкнуто относительно произведения (как взятие суперпозиции), сложения (как сложение значений операций) и содержит единицу (тождественную операцию). Ясно, что множество R_A с этими операциями образует ассоциативное кольцо с единицей. По предложению 3 каждый элемент кольца R_A является эндоморфизмом базисной группы A_+ структуры A. Таким образом, группа A_+ вместе с действием на ней кольца R_A образует модуль, который будем называть *базисным модулем структуры* A и обозначать через M_A.

Отметим, что в силу замечания 2 мощность кольца R_A из предыдущего определения не превосходит мощности $|L|$.

Пусть A — структура языка L. Пусть $B \subseteq A$. Добавим к языку L новые константы c_b, $b \in B$, и пусть структура $A(B)$ является обогащением структуры A до нового языка, при этом константа c_b интерпретируется элементом b. Структура $A(B)$ называется *несущественным обогащением структуры* A. Если $B = \{a_1, \dots, a_n\}$, то вместо $A(B)$ пишем $A(a_1, \dots, a_n)$.

Заметим, что если теория $\mathrm{Th}(A)$ категорична в мощностях $> \lambda$, то теория $\mathrm{Th}(A(B))$ категорична во всех мощностях $> \max\{\lambda, |B|\}$. Это следует из того, что все модели теории $\mathrm{Th}(A)$ мощности $> \lambda$ насыщенны. Заметим также, что если теория $\mathrm{Th}(A)$ категорична и хорнова, то $\mathrm{Th}(A(B))$ также категорична и хорнова. Это следует из элиминации кванторов до примитивных формул для таких теорий (см. [4]) и фильтруемости примитивных формул.

Лемма 1. *Пусть A — примитивно нормальная глобально аддитивная структура. Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — примитивно определенная операция на A и $f(0,\dots,0) = 0$. Тогда f совпадает на A с операцией*

$$g(x_1,\dots,x_n) = \alpha_1(x_1) + \dots + \alpha_n(x_n),$$

где α_i получается из $f(x_1,\dots,x_n)$ заменой каждого x_j, $j \neq i$, нулем 0.

Доказательство. Рассмотрим примитивную формулу $\Phi(x_1,\dots,x_n)$, выражающую в A свойство

$$f(x_1,\dots,x_n) - g(x_1,\dots,x_n) = 0.$$

Возьмем произвольные $a_1,\dots,a_n \in A$. Индукцией покажем, что $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ тождественно истинна в A. Если $n = 1$, то $g = f$, и доказывать нечего. Пусть $n > 1$. По индукционному предположению формула $\Phi(0, x_2,\dots,x_n)$ тождественно истинна в A. Для любого $a \in A$ истинность $\Phi(a, 0,\dots,0)$ очевидна. Следовательно,

$$\langle 0,\dots,0\rangle \in (\Phi(a, A) \cap \Phi(0, A)).$$

Из примитивной нормальности структуры A получаем, что $\Phi(a, x_2,\dots,x_n)$ тождественно истинна в A. $\square$

Следствие 2. *Пусть A — примитивно нормальная глобально аддитивная структура. Тогда любая операция $f(x_1,\dots,x_n)$, примитивно определимая в структуре A, примитивно определяется в некотором несущественном обогащению ее базисного модуля M_A.*

Доказательство. Рассмотрим операцию

$$g(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n) - f(0,\dots,0).$$

Так как имеет место $g(0,\dots,0) = 0$, по лемме 1 операция g примитивно определена в модуле M_A. Тогда операция f примитивно определена в несущественном обогащении $M_A(f(0,\dots,0))$ модуля M_A. $\square$

Теорема 2. *Пусть A — примитивно нормальная, глобально аддитивная структура языка L, который состоит только из функциональных символов. Тогда структура A примитивно эквивалентна некоторому несущественному обогащению ее базисного модуля M_A.*

Доказательство непосредственное вытекает из следствия 2. $\square$

Теорема 3. *Пусть A — примитивно нормальная глобально аддитивная структура и $\mathrm{pr}(A) = 2$. Тогда структура A примитивно эквивалентна некоторому несущественному обогащению ее базисного модуля M_A, который является векторным пространством над телом R_A.*

Доказательство. По предложению 3 все приведенные операции являются эндоморфизмами базисной группы A_+. Так как $\mathrm{pr}(A) = 2$, приведенные операции либо тождественно равны нулю, либо являются автоморфизмами группы A_+. Таким образом, кольцо R_A является телом, а базисный модуль M_A — векторным пространством над телом R_A.

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — примитивно определенная в A операция. В силу следствия 2 любая операция структуры A примитивно выражается через структуру некоторого несущественного обогащения векторного пространства M_A. Покажем, что это верно также для примитивных формул. Пусть $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ — примитивная формула. Если формула Φ тождественно ложная в структуре A, то в качестве ее представления берем формулу $c_a = c_b$ в несущественном обогащении модуля M_A, где $a, b \in M_A$, $a \neq b$. Если Φ тождественно истинна в A, то она представляется в M_A формулой $0 = 0$.

Для не тождественно ложных и не тождественно истинных в A формул проведем индукцию по числу n свободных переменных в формуле Φ. Если $n = 1$, то доказывать нечего, ибо в силу условия $\mathrm{pr}(A) = 2$ и не тождественной истинности формулы Φ имеем $|P(A)| = 1$. Пусть $n \geq 2$. Так как Φ не тождественно ложная в A, найдется наибольший $i \in \{1,\dots,n\}$, для которого формула

$$\exists x_i \exists x_{(i+1)} \cdots \exists x_n \Phi(x_1,\dots,x_n)$$

тождественно истинна в структуре A. Если $i = n$, то в силу не тождественной истинности формулы Φ, примитивной нормальности структуры A и условия $\mathrm{pr}(A) = 2$ формула $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ определяет в A операцию с аргументами $x_1,\dots,x_{(n-1)}$ и значением x_n. Пусть $i < n$. В силу примитивной нормальности структуры A, максимальности значения i и условия $\mathrm{pr}(A) = 2$ для формулы

$$\Psi(x_1,\dots,x_i) = \exists x_{(i+1)} \exists x_{(i+2)} \cdots \exists x_n \Phi(x_1,\dots,x_n)$$

выполняется условие $|\Phi(a_1,\dots,a_{(i-1)},A|) = 1$ для любых элементов $a_1,\dots,a_{(i-1)} \in A$. Таким образом, формула $\Psi(x_1,\dots,x_i)$ определяет в A операцию $x_i = f(x_1,\dots,x_{(i-1)})$. Ясно, что соотношение

$$\Phi(x_1,\dots,x_{(i-1)}, f(x_1,\dots,x_{(i-1)}), x_{(i+1)},\dots,x_n)$$

определяется в A некоторой примитивной формулой Θ со свободными переменными из множества $(\{x_1,\dots,x_n\} \setminus \{x_i\})$. При этом формула $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ будет эквивалентна формуле $(\Theta \wedge x_i = f(x_1,\dots,x_{(i-1)}))$. Применяя к формулам Θ и $x_i = f(x_1,\dots,x_{(i-1)})$ индукционное предположение, получаем индукционный шаг. $\square$

В заключение данного параграфа покажем, что условия теорем 2 и 3 нельзя ослабить.

Пример 1. Рассмотрим счетную элементарную 2-группу A_0 и ее счетную подгруппу H счетного индекса. Пусть группа A_1 является обогащением группы A добавлением одноместного предиката P и $P(A_1) = H$. Нетрудно проверить, что $\mathrm{Th}(A_1)$ хорнова. Рассмотрим структуру A_2, представляющую собой обогащение структуры A_1 на одноместную операцию f, являющейся гомоморфизмом абелевой группы и удовлетворяющей условию $f(A_2) = \ker(f) = P(A_2)$. Нетрудно проверить, что теория $\mathrm{Th}(A_2)$ хорнова и категорична во всех бесконечных мощностях. Так как предикат $P(A_2)$ примитивно определяется через гомоморфизм f, то A_2 примитивно эквивалентна модулю. Можно также показать, что $\mathrm{Th}(A_2)$ не является почти сильно минимальной, однако существует хорново обогащение этой теории до почти сильно минимальной и хорновой теории.

Предложение 4. *Существует примитивно нормальная глобально аддитивная бесконечная структура, не являющаяся примитивно эквивалентной с* *точностью до констант никакому модулю. Кроме того, теория этой структуры хорнова, примитивного ранга* 3 *и является редуктом категоричной хорновой теории.*

Доказательство. В качестве такой структуры можно взять структуру A_1 из примера 1. Эта структура примитивно нормальна, так как является редуктом категоричной хорновой теории. То, что A_1 не является примитивно эквивалентной с точностью до констант никакому модулю, следует из того, что в структуре A_1 примитивно не определяется никакая нетривиальная одноместная приведенная операция. Этот факт вытекает из элиминации кванторов для теории $\mathrm{Th}(A_1)$, которая легко показывается. $\square$

§ 5. Глобально аффинные категоричные хорновы теории

В этом параграфе рассмотрим вопрос: когда категоричная хорнова теория примитивно эквивалентна с точностью до констант теории некоторого модуля? Ясно, что условие глобальной аффинности необходимо для положительного ответа на этот вопрос. В следующей теореме собраны достаточные условия на хорновы категоричные теории быть примитивно эквивалентными модулям, полученные в предыдущих параграфах.

Теорема 4. *Пусть T — категоричная хорнова глобально аффинная теория языка L. Теория T примитивно эквивалентна с точностью до констант теории некоторого модуля M, если выполняется одно из следующих условий:*

(1) *язык L состоит только из функциональных символов;*

(2) $\mathrm{pr}(T) = 2$;

(3) *теория T является полной и почти сильно минимальной.*

Доказательство. (1) Непосредственное следствие теоремы 2. П. (2) получается из теоремы 3.

(3) По теореме 5 из [4] теория T примитивно эквивалентна категоричному квазимногообразию K. Из описания категоричных квазимногообразий (см. [1]) получаем, что квазимногообразие K примитивно эквивалентно стандартному квазимногообразию, язык которого не содержит предикатных символов. Из теоремы 4 следует случай (3). $\square$

Лемма 2. *Пусть бесконечная структура A имеет категоричную хорнову теорию, α — тотальная примитивная эквивалентность на A и $|A/\alpha| > 1$. Пусть X — примитивно минимальное подмножество структуры A. Тогда существует такая одноместная примитивно определимая операция f с условиями $f(A) = X$ и $\alpha \subseteq \ker(f)$, $\ker(f) = \{\langle a, b\rangle \mid f(a) = f(b)\}$.*

Доказательство. По замечанию 5 из [4] множества A/α и X примитивно связаны. Это означает, что существует примитивная формула $\Phi(x, y)$ (с параметрами) со следующими свойствами:

1) $X \subseteq \exists x\Phi(x, A)$;

2) для любого $a \in A$ имеют место $(\Phi(a, A) \cap X) \neq \varnothing$ и $X \nsubseteq \Phi(a, A)$;

3) для любых α-эквивалентных элементов a, b выполнено равенство $\Phi(a, A) = \Phi(b, A)$.

Так как множество X примитивно минимально, из свойства 2 получаем $|\Phi(a, A)| = 1$ для любого $a \in A$. Таким образом, формула $\Phi(x, y)$ определяет операцию f. Из свойств 1 и 2 получаем $f(A) = X$, из свойства 3 — $\alpha \subseteq \ker(f)$. $\square$

Следующая теорема является еще одним пунктом, который можно добавить в теорему 4.

Теорема 5. *Пусть теория T является категоричной хорновой глобально аффинной,* $\mathrm{pr}(T) \leq 3$ *и язык L теории T не содержит предикатных символов местности, большей 2. Тогда T примитивно эквивалентна теории* $\mathrm{Th}(M(B))$ *некоторого несущественного обогащения некоторого модуля M над кольцом R.*

Доказательство. В силу теоремы 4 можно считать $\mathrm{pr}(T) = 3$. Пусть A — T-модель мощности, большей, чем $|T|$. В дальнейшем будем брать несущественные обогащения структуры A, при этом эти обогащения будут обозначаться также через A. Взяв, если нужно, несущественное обогащение на одну константу, можно считать, что A глобально аддитивна.

Согласно теореме 4 достаточно показать, что любая атомная формула вида $P(x)$ или $P(x, y)$, где P — предикат языка L в структуре A, примитивно выражается через примитивно определимые в A операции.

Покажем, что любая примитивная формула $\Phi(x)$ с одной свободной переменной выражается через примитивно определимые в A операции. Как отмечалось в доказательстве теоремы 3, можно считать, что формула $\Phi(x)$ не тождественно истинна и не тождественно ложна. Если $\Phi(A) = \{a\}$, то в $A(a)$ формула $\Phi(x)$ эквивалентна формуле $x = c_a$. В силу условия $\mathrm{pr}(T) = 3$ осталось рассмотреть случай, когда $\Phi(A)$ — примитивно минимальное множество. Из категоричности хорновой теории T вытекает существование тотальной примитивно минимальной эквивалентности α (см. [3, лемма 11]). Из условия $\mathrm{pr}(T) = 3$ следует, что $|A/\alpha| > 1$. Из леммы 2 получаем необходимую выразимость формулы $\Phi(x)$.

В силу предыдущего достаточно показать, что не тождественно истинная и не тождественно ложная атомная формула $P(x, y)$ выражается через примитивно определимые в A операции и примитивные формулы с одной свободной переменной. Рассмотрим примитивную формулу

$$\Psi(x) = \exists y P(x, y).$$

Так как предикат P не тождественно ложный, то $\Psi(A) \neq \varnothing$. Предположим, что для любых $a, b \in \Psi(A)$ выполнено равенство $P(a, A) = P(b, A)$. В этом случае формула $P(x, y)$ эквивалентна в A конъюнкции двух одноместных формул

$$(\Psi(x) \wedge \exists x P(x, y)).$$

Таким образом, можно предполагать, что выполняется условие:

$(*)$ существуют $a, b \in \Psi(A)$ с условием $P(a, A) \neq P(b, A)$.

Из условия $(*)$ и примитивной нормальности структуры A следует, что для любого $a \in \Psi(A)$ выполнено $P(a, A) \neq A$. Из категоричности хорновой теории вытекает, что примитивные ранги у примитивных копий совпадают [4, лемма 1]. Отсюда получаем, что если для некоторого $a \in \Psi(A)$ выполнено $|P(a, A)| = 1$, то для любого $a \in \Psi(A)$ выполнено $|P(a, A)| = 1$. В частности, если $\Psi(A) = A$ и для некоторого $a \in \Psi(A)$ выполнено $|P(a, A)| = 1$, то формула $P(x, y)$ определяет одноместную операцию.

При учете всех предыдущих замечаний нужно рассмотреть следующие случаи:

(a) $\Psi(A) = A$ и для любого $a \in A$ множество $P(a, A)$ примитивно минимально;

(b) множество $\Psi(A)$ примитивно минимально и для любого $a \in \Psi(A)$ множество $P(a, A)$ одноэлементно;

(c) множество $\Psi(A)$ примитивно минимально и для любого $a \in \Psi(A)$ множество $P(a, A)$ примитивно минимально.

Рассмотрим случай (a). Обозначим через $\alpha(y_1, y_2)$ примитивную эквивалентность $(y)P(x, y)$. По лемме 2 существует такая одноместная примитивно определимая операция g с условиями $g(A) = \alpha(0, A)$ и $\alpha \subseteq \ker(g)$. В силу $\mathrm{pr}(T) = 3$ имеем $\alpha = \ker(g)$. Через $h(x) = v$ обозначим одноместную операцию, определенную примитивной формулой

$$\exists z(P(x, z) \wedge g(z) = v).$$

Ясно, что формула $P(x, y)$ выражается через операции g и h с помощью выражения $g(y) = h(x)$.

Пусть выполняются условия случая (b). Возьмем некоторую примитивно минимальную тотальную эквивалентность β. По лемме 2 существует одноместная примитивная операция f, для которой выполнено условие $f(A) = \Psi(A)$. Через $y = g(u)$ обозначим операцию, определенную примитивной формулой $P(f(u), y)$. Ясно, что формула $P(x, y)$ эквивалентна выражению

$$\exists u(f(u) = x \wedge g(u) = y).$$

Рассмотрим случай (c). Возьмем операцию f, определенную при рассмотрении случая (b), и операцию g из случая (a). Через $w = h(u)$ обозначим операцию, определенную выражением

$$\exists z(P(f(u), z) \wedge g(z) = w).$$

Тогда формула $P(x, y)$ будет определяться выражением

$$\exists u(x = f(u) \wedge h(u) = g(y)). \quad \square$$

В заключение статьи сформулируем вопрос. *Существует ли категоричная хорнова глобально аддитивная теория, не являющаяся примитивно эквивалентной с точностью до констант теории модуля*?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Палютин Е. А.* Описание категоричных квазимногообразий // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 2. С. 145–185.
2. *Палютин Е. А.* Описание категоричных позитивных хорновых классов // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 6. С. 683–700.
3. *Палютин Е. А.* Категоричные хорновы классы. 1 // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 5. С. 582–614.
4. *Палютин Е. А.* Категоричные хорновы классы. 2 // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 6. С. 782–802.
5. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М.: Физматлит, 2011.
6. *Ziegler M.* Model theory of modules // Ann. Pure Appl. Logic. 1984. V. 26. P. 149–213.
7. *Shelah S.* Classification theory and the number of non-isomorphic models. Amsterdam: North-Holland, 1990

Статья поступила 17 мая 2011 г.

Палютин Евгений Андреевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`palyutin@math.nsc.ru`