Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 514.765

ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫ И ЭРМИТОВЫ f–СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ Ф–ПРОСТРАНСТВАХ ПОРЯДКА k В СЛУЧАЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ МЕТРИК

А. С. Самсонов

Аннотация. Рассмотрены произвольные однородные Ф-пространства порядка k ($k \geq 3$) полупростых компактных групп Ли G в случае серии специальных метрик. Указаны формулы для функции Номидзу связности Леви-Чивита таких метрик. С учетом полученных формул и других соотношений для Ф-пространств порядка k для канонических f-структур на этих пространствах доказаны необходимые и достаточные условия принадлежности таким классам обобщенной эрмитовой геометрии, как приближенно келеровы (NKf-structures) и эрмитовы (Hf-structures) f-структуры.

Ключевые слова: естественно редуктивное пространство, инвариантная f-структура, обобщенная эрмитова геометрия, однородное Ф-пространство, однородное k-симметрическое пространство, каноническая f-структура.

1. Введение

Одним из важнейших классов дифференциально-геометрических структур на гладких многообразиях M являются аффинорные структуры, т. е. тензорные поля типа (1, 1), реализованные в виде полей эндоморфизмов, действующих в касательном расслоении. В число классических аффинорных структур входят структуры почти произведения P ($P^2 = 1$), почти комплексные структуры J ($J^2 = 1$), обобщающие их f-структуры Яно ($f^3 + f = 0$) [1, 2] и некоторые другие. Согласованные с (псевдо)римановой метрикой g на (M, g) метрические f-структуры включают широко известные почти эрмитовы структуры J, а также служат фундаментальным объектом в обобщенной эрмитовой геометрии [3].

Исследование инвариантных аффинорных структур на однородных многообразиях $M = G/H$ групп Ли традиционно является одной из наиболее значимых задач. Отметим здесь глубокую теорию эрмитовых симметрических пространств, а впоследствии стали играть значительную роль обобщенные симметрические пространства (в другой терминологии, однородные Ф-пространства порядка k [4]). Например, построенная каноническая структура J на однородных Ф-пространствах порядка 3 [5–7] позволила предъявить широкий класс инвариантных почти эрмитовых структур. Позднее был обнаружен богатый запас канонических структур P, J и f-структур на регулярных Ф-пространствах

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований (код проекта Ф10Р–132) в рамках совместного проекта БРФФИ–РФФИ.

[8], что существенно продвинуло данное направление. Оказалось, что канонические f-структуры на однородных Ф-пространствах порядков 4 и 5 в случае естественно редуктивной метрики являются приближенно келеровыми и эрмитовыми f-структурами [9, 10]. Дальнейшим развитием этих фактов стали рассмотрение канонических f-структур на Ф-пространствах порядка 6 (см., например, [11, 12]) и обобщение на случай произвольных естественно редуктивных Ф-пространств любого порядка k [13]. Отметим, что перечисленные факты, обнаруживая обширный ресурс инвариантных структур в обобщенной эрмитовой геометрии, одним из естественных продолжений предполагают исследования канонических f-структур на k-симметрических пространствах с отличными от естественно редуктивной метриками.

В данной работе рассмотрены канонические f-структуры на однородных Ф-пространствах произвольного порядка k в случае серии специальных «диагональных» метрик (эта серия содержит как естественно редуктивные метрики, так и метрики, которые не попадают в этот класс). Доказано, в частности, что для таких метрик базовые f-структуры являются приближенно келеровыми (входят в класс **NKf**), а для суммы и разности базовых структур указаны алгебраические критерии принадлежности классу **NKf**. Получены критерии эрмитовости (класс **Hf**) для канонических базовых f-структур.

2. Приближенно келеровы и эрмитовы метрические f-структуры

Известно, что f-структура на гладком многообразии M порождает два взаимно дополнительных распределения $\mathfrak{L} = \operatorname{Im} f$ и $\mathfrak{M} = \operatorname{Ker} f$. Их размерности называются *рангом* и *дефектом* f-структуры, причем частные случаи $\operatorname{def} f = 0$ и $\operatorname{def} f = 1$ дают почти комплексную и почти контактную структуры соответственно; $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ называют *первым* и *вторым* фундаментальными распределениями f-структуры.

Пусть $(M, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — (псевдо)риманово многообразие. Тогда f-структура на нем называется *метрической* [14], если $\langle fX, Y\rangle + \langle X, fY\rangle = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, где $\mathfrak{X}(M)$ — модуль гладких векторных полей на M. Для метрической f-структуры распределения $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ взаимно ортогональны, а частный случай $\operatorname{def} f = 0$ для метрических f-структур приводит к почти эрмитовым структурам.

Композиционный тензор T типа $(2,1)$ играет важное значение в геометрии метрических f-структур. С его помощью можно ввести структуру присоединенной Q-алгебры в $\mathfrak{X}(M)$ посредством формулы $X * Y = T(X, Y)$ [3, 15]. Поэтому в терминах свойств этой Q-алгебры определяются некоторые классы метрических f-структур. Вид тензора T хорошо известен [3, 15]:

$$T(X,Y) = \frac{1}{4} f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y), \tag{1}$$

где ∇ — связность Леви-Чивита (псевдо)риманова многообразия (M, g), $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Если присоединенная Q-алгебра абелева (т. е. $T(X,Y) = 0$), то метрическая f-структура называется *эрмитовой f-структурой* (короче, *Hf-структурой*: Hermitian f-structure) [3]. Метрическая f-структура называется *приближенно келеровой f-структурой* (короче, *NKf-структурой*: Nearly Kähler f-structure) [16, 10], если

$$\nabla_{fX}(f)fX = 0 \tag{2}$$

для всех $X \in \mathfrak{X}(M)$. Классы *NKf*- и *Hf*-структур будем обозначать через **NKf** и **Hf** соответственно. Здесь указаны лишь некоторые важнейшие классы метрических f-структур, причем в частном случае $\operatorname{def} f = 0$ они дают хорошо известные классы почти эрмитовых структур: приближенно келеровы **NK** и эрмитовы **H** соответственно (см., например, [15]).

3. Канонические f-структуры на регулярных Ф-пространствах

Будем рассматривать инвариантные f-структуры на однородных многообразиях. Пусть G/H — однородное редуктивное пространство связной группы Ли G, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — соответствующее редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, где $\mathfrak{m}$ отождествляется, как обычно, с касательным пространством $T_o(G/H)$ в точке $o = H$. Пусть на G/H заданы инвариантная (псевдо)риманова метрика $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ и инвариантная метрическая f-структура. Такие структуры полностью определяются своими значениями в точке o. Поэтому договоримся не различать далее в обозначениях инвариантные структуры на G/H и их значения в точке o. Любая метрическая f-структура задает ортогональное разложение $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где подпространства $\mathfrak{m}_1 = \operatorname{Im} f$ и $\mathfrak{m}_2 = \operatorname{Ker} f$ определяют первое и второе фундаментальные распределения f-структуры. Напомним также, что пространство $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется *естественно редуктивным* относительно редуктивного разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, если $\langle [X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z\rangle = \langle X, [Y,Z]_{\mathfrak{m}}\rangle$ для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$, где индекс $\mathfrak{m}$ обозначает проекцию на $\mathfrak{m}$ относительно указанного разложения.

Пусть теперь G/H — однородное Ф-пространство, заданное с помощью автоморфизма Ф группы Ли G, $\varphi = d\Phi_e$ — соответствующий автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus A\mathfrak{g}$, где $A = \varphi - \mathrm{id}$, то G/H называется *регулярным* Ф-*пространством* [8, 17]. Разложение алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus A\mathfrak{g}$ φ-инвариантно и является ее каноническим редуктивным разложением [17]. Будем обозначать через θ сужение φ на $\mathfrak{m} = A\mathfrak{g}$. Известно, что все однородные Ф-пространства порядка k ($\Phi^k = \mathrm{id}$) регулярны [17] и в иной терминологии называются *однородными k-симметрическими пространствами* [18].

Если значение инвариантной аффинорной структуры F на регулярном Ф-пространстве G/H в точке o является полиномом от θ: $F = F(\theta)$, то такая структура называется *канонической* [8]. В алгебре $\mathscr{A}$ всех инвариантных аффинорных структур на G/H все канонические структуры образуют коммутативную подалгебру $\mathscr{A}(\theta)$, которая, в свою очередь, содержит структуры классического типа (почти произведения, почти комплексные, f-структуры), причем их полное описание указано в [8]. В частном случае для однородных Ф-пространств порядка k получены точные вычислительные формулы, которые, например, для канонических f-структур имеют вид

$$f = \frac{2}{k}\sum_{m=1}^{u}\left(\sum_{j=1}^{u}\zeta_j \sin\frac{2\pi m j}{k}\right)(\theta^m - \theta^{k-m}), \tag{3}$$

где

$$u = \begin{cases} n, & \text{если } k = 2n+1, \\ n-1, & \text{если } k = 2n, \end{cases}$$

а $\zeta_j \in \{-1, 0, 1\}$, $j = 1, 2, \ldots, u$, причем среди чисел ζ_j есть отличные от нуля. Если каноническая f-структура f_j определяется набором $(\zeta_1, \ldots, \zeta_j, \ldots, \zeta_u)$, в котором $\zeta_j = 1$, а остальные числа равны нулю, то она называется *базовой* канонической f-структурой. Детализация формул для классических канонических структур приведена в [8] для малых порядков $k = 3, 4, 5$. Например, для $k = 3$ приходим к уже указанной канонической почти комплексной структуре $J = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^2)$ [5, 7], а для $k = 4$ имеем структуру $f = \frac{1}{2}(\theta - \theta^3)$. Для порядка $k = 5$ отметим, что две из канонических f-структур здесь являются базовыми, а две другие — почти комплексными.

Пусть далее на однородном Φ-пространстве G/H порядка k задана инвариантная (псевдо)риманова метрика, определяемая симметрической билинейной формой $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$, которая инвариантна относительно $\mathrm{Ad}(H)$ и θ. Напомним, что все канонические f-структуры на $(G/H, g)$ являются метрическими f-структурами относительно такой метрики. В случае полупростой группы Ли G классическим примером метрики g с указанными свойствами является так называемая стандартная метрика, индуцированная формой Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Известно также, что такая метрика на любом регулярном Φ-пространстве является естественно редуктивной относительно канонического редуктивного разложения [17].

4. Коммутаторные соотношения для однородных Φ-пространств порядка k

Рассмотрим однородное Φ-пространство G/H произвольного порядка k, $k \geq 2$. Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ — соответствующие алгебры Ли, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — каноническое редуктивное разложение, $\theta = \varphi|_{\mathfrak{m}}$, $s = [\frac{k-1}{2}]$ (целая часть), $u = s$ (при нечетном k), $u = s + 1$ (при четном k), $i = \overline{0, u}$. Обозначим через L_i операторы

$$L_i(X) = \varphi^2(X) - 2\cos\frac{2\pi i}{k}\varphi(X) + X$$

на $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{m}_i = \operatorname{Ker} L_i$, тогда в соответствии со спектром автоморфизма φ запишем разложение алгебры $\mathfrak{g}$ [18]:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_u, \tag{4}$$

причем некоторые подпространства могут быть нулевыми (спектр оператора φ не максимален). Также будем обозначать $a_i = \frac{2\pi i}{k}$, $b_j = \frac{2\pi j}{k}$.

Лемма 1. *Для любых $X_i \in \mathfrak{m}_i$, $Y_j \in \mathfrak{m}_j$ справедливы следующие равенства:*

$$4\cos a_i \cos b_j \varphi[X_i, Y_j] = \varphi^2[X_i, Y_j] + [\varphi^2 X_i, Y_j] + [X_i, \varphi^2 Y_j] + [X_i, Y_j], \tag{5}$$

$$4\cos^2 a_i \varphi^2[X_i, Y_j] = \varphi^2[\varphi^2 X_i, Y_j] + 2\varphi^2[X_i, Y_j] + [X_i, \varphi^2 Y_j]. \tag{6}$$

Доказательство. Для (5) имеем

$$\begin{aligned}4\cos a_i \cos b_j \varphi[X_i, Y_j] &= [2\cos a_i \varphi X_i, 2\cos b_j \varphi Y_j] \\ &= [(\varphi^2 + 1)X_i, (\varphi^2 + 1)Y_j] = \varphi^2[X_i, Y_j] + [\varphi^2 X_i, Y_j] + [X_i, \varphi^2 Y_j] + [X_i, Y_j],\end{aligned}$$

для (6) —

$$\begin{aligned}4\cos^2 a_i \varphi^2[X_i, Y_j] &= [(2\cos a_i \varphi)^2 X_i, \varphi^2 Y_j] = [(\varphi^2 + 1)^2 X_i, \varphi^2 Y_j] \\ &= [(\varphi^4 + 2\varphi^2 + 1)X_i, \varphi^2 Y_j] = \varphi^2[\varphi^2 X_i, Y_j] + 2\varphi^2[X_i, Y_j] + [X_i, \varphi^2 Y_j]. \quad \square\end{aligned}$$

Теорема 1 [13]. *Пусть G/H — однородное Φ-пространство порядка k ($k \geq 2$), $\mathfrak{m}$ — соответствующее каноническое редуктивное дополнение с разложением* (4). *Пусть $i = \overline{0,u}$, $j = \overline{0,u}$, $i \geq j$ и подпространство $\mathfrak{m}_{i+j}$ обозначает $\mathfrak{m}_{k-(i+j)}$, если $i + j > u$. Тогда справедливы следующие коммутаторные соотношения:*

$$[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i+j} + \mathfrak{m}_{i-j}.$$

Доказательство. Положим $\psi = L_{i-j} \circ L_{i+j}$ и покажем, что для произвольных $X_i \in \mathfrak{m}_i$, $Y_j \in \mathfrak{m}_j$ верно

$$\begin{aligned}\psi([X_i, Y_j]) &= L_{i-j} \circ L_{i+j}([X_i, Y_j]) \\ &= (\varphi^2 - 2\cos(a_i - b_j)\varphi + 1) \circ (\varphi^2 - 2\cos(a_i + b_j)\varphi + 1)[X_i, Y_j] = 0.\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\psi([X_i, Y_j]) &= \varphi^4[X_i, Y_j] - 4\cos a_i \cos b_j \varphi^3[X_i, Y_j] \\ &+ 2(2\cos^2 a_i + 2\cos^2 b_j - 1)\varphi^2[X_i, Y_j] - 4\cos a_i \times \cos b_j \varphi[X_i, Y_j] + [X_i, Y_j].\end{aligned}$$

Используем (5) для слагаемых $4\cos a_i \cos b_j \varphi^3[X_i, Y_j]$ и $4\cos a_i \cos b_j \varphi[X_i, Y_j]$, а также линейные преобразования:

$$-\varphi^2[\varphi^2 X_i, Y_j] - \varphi^2[X_i, \varphi^2 Y_j] + 4(\cos^2 a_i + \cos^2 b_j - 1)\varphi^2[X_i, Y_j] - [\varphi^2 X_i, Y_j] - [X_i, \varphi^2 Y_j].$$

Будем использовать равенство (6) для $4(\cos^2 a_i + \cos^2 b_j)\varphi^2[X_i, Y_j]$:

$$\begin{aligned}&- \varphi^2[\varphi^2 X_i, Y_j] - \varphi^2[X_i, \varphi^2 Y_j] + (\varphi^2[\varphi^2 X_i, Y_j] + 2\varphi^2[X_i, Y_j] + [X_i, \varphi^2 Y_j]) \\ &\quad + (\varphi^2[X_i, \varphi^2 Y_j] + 2\varphi^2[X_i, Y_j] + [\varphi^2 X_i, Y_j]) \\ &\quad - 4\varphi^2[X_i, Y_j] - [\varphi^2 X_i, Y_j] - [X_i, \varphi^2 Y_j] = 0.\end{aligned}$$

Итак, получили, что $\psi([X_i, Y_j]) = 0$.

Допустим, что существует $\mathfrak{m}_n$ ($\mathfrak{m}_n \neq \mathfrak{m}_{i-j}$, $\mathfrak{m}_n \neq \mathfrak{m}_{i+j}$) и $[X_i, Y_j]_{\mathfrak{m}_n} \neq 0$. Обозначим

$$Y = L_{i+j}([X_i, Y_j]_{\mathfrak{m}_n}) = (\varphi^2 - 2\cos(a_i + b_j)\varphi + 1)([X_i, Y_j]_{\mathfrak{m}_n}).$$

Тогда $Y \in \mathfrak{m}_n$, $Y \neq 0$, поскольку оператор φ невырожденный на каждом из подпространств разложения (4). Обозначим

$$Z = L_{i-j}Y = (\varphi^2 - 2\cos(a_i - b_j)\varphi + 1)Y.$$

Тогда $Z \in \mathfrak{m}_n$, $Z \neq 0$, что противоречит равенству $\psi([X_i, Y_j]) = 0$. Поэтому в силу произвольности выбора элементов X_i, Y_j получаем доказываемое соотношение: $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i+j} + \mathfrak{m}_{i-j}$. $\square$

Отметим, что при $k = 2$ доказанная теорема 1 дает хорошо известные [19] коммутаторные соотношения для однородных симметрических пространств: $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$.

Отметим также, что утверждения теоремы 1 и доказанной ниже теоремы 2 независимо и в другом виде получены в работе [20].

Лемма 2. *Для любого* $X_i \in \mathfrak{m}_i$ ($i = \overline{0, u}$) *выполняется равенство*

$$\varphi^3 X_i = \left(\left(4\cos^2\frac{2\pi i}{k} - 1\right)\varphi - 2\cos\frac{2\pi i}{k}\right)X_i.$$

Доказательство. Имеем

$$\varphi^3 X_i = \varphi(\varphi^2 X_i) = \varphi\left(\left(2\cos\frac{2\pi i}{k}\varphi - 1\right)X_i\right)$$
$$= \left(2\cos\frac{2\pi i}{k}\varphi^2 - \varphi\right)X_i = \left(2\cos\frac{2\pi i}{k}\left(2\cos\frac{2\pi i}{k}\varphi - 1\right) - \varphi\right)X_i$$
$$= \left(\left(4\cos^2\frac{2\pi i}{k} - 1\right)\varphi - 2\cos\frac{2\pi i}{k}\right)X_i. \quad \square$$

Теорема 2. *Пусть* G/H — *однородное* Φ*-пространство порядка* k ($k \geq 3$). *Возьмем произвольные базовые структуры* f_i, f_j *и элементы* $X_i \in \mathfrak{m}_i$, $Y_j \in \mathfrak{m}_j$ ($i, j = \overline{1, s}$, $i \geq j$) *из подпространств* $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{m}_j$ *разложения* (4). *Пусть* $\mathfrak{m}_{i+j}$ *обозначает* $\mathfrak{m}_{k-(i+j)}$, *если* $i + j > u$. *Тогда*

$$[f_i X_i, Y_j] - [X_i, f_j Y_j] \in \mathfrak{m}_{i-j}, \quad [f_i X_i, Y_j] + [X_i, f_j Y_j] \in \mathfrak{m}_{i+j}.$$

Доказательство проведем только для случая $[f_i X_i, Y_j] + [X_i, f_j Y_j]$ (случай $[f_i X_i, Y_j] - [X_i, f_j Y_j]$ разбирается аналогично). Будем обозначать $a_i = \frac{2\pi i}{k}$, $b_j = \frac{2\pi j}{k}$. Пусть $Z = [f_i X_i, Y_j] + [X_i, f_j Y_j]$. Подействуем на Z оператором

$$L_{i+j} = \varphi^2 - 2\cos(a_i + b_j)\varphi + 1 = \varphi^2 - 2\cos a_i \cos b_j \varphi + 2\sin a_i \sin b_j \varphi + 1$$

и покажем, что $L_{i+j} Z = 0$ (тогда $Z \in \mathfrak{m}_{i+j}$). Имеем

$$L_{i+j}(Z) = L_{i+j}\left(\left[\left(\frac{1}{\sin a_i}\varphi - \operatorname{ctg} a_i\right)X_i, Y_j\right] + \left[X_i, \left(\frac{1}{\sin b_j}\varphi - \operatorname{ctg} b_j\right)Y_j\right]\right)$$
$$= L_{i+j}\left(\frac{1}{\sin a_i}[\varphi X_i, Y_j] - (\operatorname{ctg} a_i + \operatorname{ctg} b_j)[X_i, Y_j] + \frac{1}{\sin b_j}[X_i, \varphi Y_j]\right).$$

Используя лемму 2, линейные преобразования, билинейность и кососимметричность коммутатора, получим следующие результаты на каждом из этапов вычислений:

$$L_{i+j}\left(\frac{1}{\sin a_i}[\varphi X_i, Y_j]\right) = \left(4\operatorname{ctg} a_i \cos a_i \cos b_j - \frac{2\cos b_j}{\sin a_i} + 4\cos a_i \sin b_j\right)[\varphi X_i, \varphi Y_j]$$
$$+ \left(-4\operatorname{ctg} a_i \cos a_i + \frac{2}{\sin a_i}\right)[\varphi X_i, Y_j]$$
$$+ (-2\operatorname{ctg} a_i \cos b_j - 2\sin b_j)[X_i, \varphi Y_j] + 2\operatorname{ctg} a_i [X_i, Y_j];$$

$$L_{i+j}(-(\operatorname{ctg} a_i + \operatorname{ctg} b_j)[X_i, Y_j])$$
$$= -(\operatorname{ctg} a_i + \operatorname{ctg} b_j)(2\cos a_i \cos b_j + 2\sin a_i \sin b_j)[\varphi X_i, \varphi Y_j]$$
$$+ 2\cos a_i(\operatorname{ctg} a_i + \operatorname{ctg} b_j)[\varphi X_i, Y_j] + 2\cos b_j(\operatorname{ctg} a_i + \operatorname{ctg} b_j)[X_i, \varphi Y_j]$$
$$- 2(\operatorname{ctg} a_i + \operatorname{ctg} b_j)[X_i, Y_j];$$

$$
\begin{aligned}
&L_{i+j}\left(\frac{1}{\sin b_j}[X_i,\varphi Y_j]\right)\\
&\quad= \left(4\operatorname{ctg} b_j \cos b_j \cos a_i - \frac{2\cos a_i}{\sin b_j} + 4\cos b_j \sin a_i\right)[\varphi X_i,\varphi Y_j]\\
&\qquad+ \left(-4\operatorname{ctg} b_j \cos b_j + \frac{2}{\sin b_j}\right)[X_i,\varphi Y_j]\\
&\qquad\quad+ (-2\operatorname{ctg} b_j \cos a_i - 2\sin a_i)[\varphi X_i, Y_j] + 2\operatorname{ctg} b_j [X_i,Y_j].
\end{aligned}
$$

Вычисляя сумму полученных результатов, приходим к тому, что

$$L_{i+j}([f_iX_i,Y_j]+[X_i,f_jY_j])=0,$$

поэтому $[f_iX_i,Y_j]+[X_i,f_jY_j]\in\mathfrak{m}_{\mathrm{i+j}}$. $\square$

Следствие 1. *Для любых базовых структур f_i, f_j и элементов $X_i\in\mathfrak{m}_i$, $Y_j\in\mathfrak{m}_j$ ($i,j=\overline{1,s}$, $i\ge j$) подпространств разложения* (4) *справедливы утверждения*

$$[f_iX_i,f_jY_j]+[X_i,Y_j]\in\mathfrak{m}_{i-j},\quad [f_iX_i,f_jY_j]-[X_i,Y_j]\in\mathfrak{m}_{i+j}.$$

Доказательство. Подставим f_jY_j вместо Y_j в утверждения теоремы. Поскольку $f_j^2Y_j=-Y_j$, получаем доказываемое. $\square$

Следствие 2. *Для любой базовой структуры f_i и элемента $X_i\in\mathfrak{m}_i$ ($i=\overline{1,s}$) справедливо утверждение*

$$[f_iX_i,X_i]\in\mathfrak{h}.$$

Доказательство. Подставим X_i вместо Y_j в первое утверждение теоремы. Получим

$$[f_iX_i,X_i]-[X_i,f_iX_i]=2[f_iX_i,X_i]\in\mathfrak{m}_{i-i}=\mathfrak{m}_0=\mathfrak{h},$$

т. е. $[f_iX_i,X_i]\in\mathfrak{h}$. $\square$

Следствие 3. *Для любых базовых структур f_i,f_j и подпространств $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{m}_j$ ($i,j=\overline{1,s}$, $i\ge j$) разложения* (4) *справедливы утверждения*

$$
\begin{aligned}
&[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\subset\mathfrak{m}_{i+j}\iff[f_iX_i,Y_j]-[X_i,f_jY_j]=0\quad\forall X_i\in\mathfrak{m}_i,\ \forall Y_j\in\mathfrak{m}_j,\\
&[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\subset\mathfrak{m}_{i-j}\iff[f_iX_i,Y_j]+[X_i,f_jY_j]=0\quad\forall X_i\in\mathfrak{m}_i,\ \forall Y_j\in\mathfrak{m}_j.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Из теоремы следует справедливость прямых утверждений. Обратные утверждения докажем методом от противного.

Допустим, что $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\not\subseteq\mathfrak{m}_{i+j}$. Поскольку $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\subset\mathfrak{m}_{i+j}+\mathfrak{m}_{i-j}$ по теореме 1, для некоторых X_i,Y_j имеем

$$
\begin{aligned}
0\ne 2[f_iX_i,Y_j]_{\mathfrak{m}_{i-j}}&=2[f_iX_i,Y_j]_{\mathfrak{m}_{i-j}}-([f_iX_i,Y_j]+[X_i,f_jY_j])_{\mathfrak{m}_{i-j}}\\
&=(2[f_iX_i,Y_j]-[f_iX_i,Y_j]-[X_i,f_jY_j])_{\mathfrak{m}_{i-j}}\\
&=([f_iX_i,Y_j]-[X_i,f_jY_j])_{\mathfrak{m}_{i-j}}=[f_iX_i,Y_j]-[X_i,f_jY_j].
\end{aligned}
$$

Тем самым если $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\not\subseteq\mathfrak{m}_{i+j}$, то найдутся такие X_i,Y_j, что $[f_iX_i,Y_j]-[X_i,f_jY_j]\ne0$. Это доказывает обратное утверждение первой части следствия.

Допустим, что $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\not\subseteq\mathfrak{m}_{i-j}$. Поскольку $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\subset\mathfrak{m}_{i+j}+\mathfrak{m}_{i-j}$ по теореме 1, для некоторых X_i,Y_j имеем

$$
\begin{aligned}
0\ne 2[f_iX_i,Y_j]_{\mathfrak{m}_{i+j}}&=2[f_iX_i,Y_j]_{\mathfrak{m}_{i+j}}-([f_iX_i,Y_j]-[X_i,f_jY_j])_{\mathfrak{m}_{i+j}}\\
&=(2[f_iX_i,Y_j]-[f_iX_i,Y_j]+[X_i,f_jY_j])_{\mathfrak{m}_{i+j}}\\
&=([f_iX_i,Y_j]+[X_i,f_jY_j])_{\mathfrak{m}_{i+j}}=[f_iX_i,Y_j]+[X_i,f_jY_j].
\end{aligned}
$$

Тем самым если $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\not\subseteq\mathfrak{m}_{i-j}$, то найдутся X_i,Y_j такие, что $[f_iX_i,Y_j]+[X_i,f_jY_j]\ne0$. Обратное утверждение второй части следствия доказано. $\square$

Следствие 4. *Для любых базовых структур f_i, f_j и элементов $X_i \in \mathfrak{m}_i$, $Y_j \in \mathfrak{m}_j$ $(i, j = \overline{1,s},\ i \geq j)$ подпространств разложения (4) выполняются*

$$[f_i X_i, Y_j]_{\mathfrak{m}_{i+j}} = [X_i, f_j Y_j]_{\mathfrak{m}_{i+j}}, \quad [f_i X_i, f_j Y_j]_{\mathfrak{m}_{i+j}} = -[X_i, Y_j]_{\mathfrak{m}_{i+j}},$$

$$[f_i X_i, Y_j]_{\mathfrak{m}_{i-j}} = -[X_i, f_j Y_j]_{\mathfrak{m}_{i-j}}, \quad [f_i X_i, f_j Y_j]_{\mathfrak{m}_{i-j}} = [X_i, Y_j]_{\mathfrak{m}_{i-j}}.$$

Доказательство. Результат следствия легко вытекает из теорем 1 и 2. □

Теорема 3. *Пусть G/H — однородное Φ-пространство порядка k $(k \geq 3)$. Возьмем произвольные базовые структуры f_i, f_j и элементы $X_i \in \mathfrak{m}_i$, $Y_j \in \mathfrak{m}_j$ $(i, j = \overline{1,s},\ i \geq j)$ из подпространств $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{m}_j$ разложения (4). Пусть f_{i+j} обозначает $f_{k-(i+j)}$ при $i + j > u$. Тогда*

$$f_{i-j}([f_i X_i, Y_j] - [X_i, f_j Y_j]) = -[f_i X_i, f_j Y_j] - [X_i, Y_j] \quad \text{при } i > j;$$

$$f_{i+j}([f_i X_i, Y_j] + [X_i, f_j Y_j]) = [f_i X_i, f_j Y_j] - [X_i, Y_j] \quad \text{при } i + j \leq s;$$

$$-f_{i+j}([f_i X_i, Y_j] + [X_i, f_j Y_j]) = [f_i X_i, f_j Y_j] - [X_i, Y_j] \quad \text{при } i + j > u.$$

Доказательство. Возьмем произвольные $X_i \in \mathfrak{m}_i$, $Y_j \in \mathfrak{m}_j$. Обозначим $a_i = \frac{2\pi i}{k}$, $b_j = \frac{2\pi j}{k}$.

1. Докажем утверждение теоремы для f_{i-j}. Поскольку

$$[f_i X_i, Y_j] - [X_i, f_j Y_j] \in \mathfrak{m}_{i-j}, \quad [f_i X_i, Y_j], [X_i, f_j Y_j] \in \mathfrak{m}_{i-j} \oplus \mathfrak{m}_{i+j}$$

и оператор $\frac{1}{\sin(a_i - b_j)}\theta - \operatorname{ctg}(a_i - b_j)$ невырожденный на каждом из подпространств $\mathfrak{m}_{i-j}$, $\mathfrak{m}_{i+j}$, используя свойства коммутатора, имеем

$$\begin{aligned} &f_{i-j}([f_i X_i, Y_j] - [X_i, f_j Y_j]) \\ &\quad = \left(\frac{1}{\sin(a_i - b_j)}\theta - \operatorname{ctg}(a_i - b_j)\right)\left(\left[\left(\frac{1}{\sin a_i}\theta - \operatorname{ctg} a_i\right)X_i, Y_j\right]\right. \\ &\quad\quad \left. - \left[X_i, \left(\frac{1}{\sin b_j}\theta - \operatorname{ctg} b_j\right)Y_j\right]\right) = -\frac{1}{\sin a_i \sin b_j}[\theta X_i, \theta Y_j] \\ &\quad\quad + \frac{\operatorname{ctg} b_j}{\sin a_i}[\theta X_i, Y_j] + \frac{\operatorname{ctg} a_i}{\sin b_j}[X_i, \theta Y_j] - (\operatorname{ctg} a_i \operatorname{ctg} b_j + 1)[X_i, Y_j]. \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования дают

$$\begin{aligned} &\left(\left[\frac{1}{\sin a_i}\theta X_i, -\frac{1}{\sin b_j}\theta Y_j\right] + \left[\frac{1}{\sin a_i}\theta X_i, \operatorname{ctg} b_j Y_j\right]\right) + \left(\left[\operatorname{ctg} a_i X_i, \frac{1}{\sin b_j}\theta Y_j\right]\right. \\ &\quad \left. + [\operatorname{ctg} a_i X_i, -\operatorname{ctg} b_j Y_j]\right) - [X_i, Y_j] = \left[\frac{1}{\sin a_i}\theta X_i, -f_j Y_j\right] \\ &\quad\quad + [-\operatorname{ctg} a_i X_i, -f_j Y_j] - [X_i, Y_j] = -[f_i X_i, f_j Y_j] - [X_i, Y_j]. \end{aligned}$$

2. Докажем теперь утверждение теоремы для f_{i+j} и $i + j \leq s$ (для случая $i + j > u$ доказательство аналогичное с учетом неравенства $\sin(a_i + b_j) < 0$). Поскольку

$$[f_i X_i, Y_j] + [X_i, f_j Y_j] \in \mathfrak{m}_{i+j}, \quad [f_i X_i, Y_j], [X_i, f_j Y_j] \in \mathfrak{m}_{i-j} \oplus \mathfrak{m}_{i+j}$$

и оператор $\frac{1}{\sin(a_i+b_j)}\theta-\operatorname{ctg}(a_i+b_j)$ невырожденный на каждом из подпространств $\mathfrak{m}_{i-j}$, $\mathfrak{m}_{i+j}$, используя свойства коммутатора, имеем

$$f_{i+j}([f_iX_i,Y_j]+[X_i,f_jY_j])=\biggl(\frac{1}{\sin(a_i+b_j)}\theta$$
$$-\operatorname{ctg}(a_i+b_j)\biggr)\biggl(\biggl[\biggl(\frac{1}{\sin a_i}\theta-\operatorname{ctg}a_i\biggr)X_i,Y_j\biggr]+\biggl[X_i,\biggl(\frac{1}{\sin b_j}\theta-\operatorname{ctg}b_j\biggr)Y_j\biggr]\biggr)$$
$$=\frac{1}{\sin a_i\sin b_j}[\theta X_i,\theta Y_j]-\frac{\operatorname{ctg}b_j}{\sin a_i}[\theta X_i,Y_j]-\frac{\operatorname{ctg}a_i}{\sin b_j}[X_i,\theta Y_j]+(\operatorname{ctg}a_i\operatorname{ctg}b_j-1)[X_i,Y_j].$$

Дальнейшие преобразования дают

$$\biggl(\biggl[\frac{1}{\sin a_i}\theta X_i,\frac{1}{\sin b_j}\theta Y_j\biggr]+\biggl[\frac{1}{\sin a_i}\theta X_i,-\operatorname{ctg}b_jY_j\biggr]\biggr)$$
$$+\biggl(\biggl[\operatorname{ctg}a_iX_i,-\frac{1}{\sin b_j}\theta Y_j\biggr]+[\operatorname{ctg}a_iX_i,\operatorname{ctg}b_jY_j]\biggr)-[X_i,Y_j]$$
$$=\biggl[\frac{1}{\sin a_i}\theta X_i,f_jY_j\biggr]+[-\operatorname{ctg}a_iX_i,f_jY_j]-[X_i,Y_j]=[f_iX_i,f_jY_j]-[X_i,Y_j].\quad\square$$

5. Функции Номидзу для однородных Ф-пространств порядка k в случае специальных метрик

Рассмотрим однородное Ф-пространство $M=G/H$ произвольного порядка k ($k\geq 3$). Принимая во внимание известное взаимно однозначное соответствие (см. [19, 21]) между G-инвариантными метриками и $\operatorname{Ad}(H)$-инвариантными скалярными произведениями на каноническом редуктивном дополнении $\mathfrak{m}$, рассмотрим следующее семейство инвариантных метрик в случае полупростой компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с формой Киллинга B:

$$\langle X,Y\rangle=\lambda_1B(X_1,Y_1)+\dots+\lambda_uB(X_u,Y_u),\tag{7}$$

где $X,Y\in\mathfrak{g}$, $i=\overline{1,u}$, $X_i,Y_i\in\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{m}_i$ — подпространства разложения (4), $\lambda_i\in\mathbb{R}$, $\lambda_i<0$.

Например, известно [22], что для метрик такого «диагонального» семейства легко одновременно вычисляются их различные характеристики кривизны, а при равенстве коэффициентов λ_i такая метрика естественно редуктивна.

Определяющие условия (1) и (2) классов $\mathbf{NKf}$ и $\mathbf{Hf}$ связаны с выражением $\nabla_X(f)Y=\nabla_XfY-f\nabla_XY$ для гладких векторных полей X и Y. В случае редуктивных однородных пространств (в частности, однородных Ф-пространств порядка k), используя традиционную технику специальных векторных полей в окрестности точки $o=H\in G/H$, имеем

$$\nabla_X(f)Y=\alpha(X,fY)-f\alpha(X,Y),$$

где α — функция Номидзу инвариантной аффинной связности ∇, а $X,Y\in\mathfrak{m}$. В случае связности Леви-Чивита ∇ для инвариантной римановой метрики $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ на однородном редуктивном пространстве G/H функция Номидзу имеет вид [19]

$$\alpha(X,Y)=\frac{1}{2}[X,Y]_{\mathfrak{m}}+U(X,Y),\tag{8}$$

где $X,Y\in\mathfrak{m}$, а билинейное симметрическое отображение $U:\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}$ определяется из формулы [19]

$$2\langle U(X,Y),Z\rangle=\langle X,[Z,Y]_{\mathfrak{m}}\rangle+\langle[Z,X]_{\mathfrak{m}},Y\rangle\quad\forall Z\in\mathfrak{m}.\tag{9}$$

В следующей теореме установлено, что отображение $U(X,Y)$ определяется с помощью коммутатора элементов $X, Y \in \mathfrak{m}$ в случае однородных Ф-пространств порядка k с метрикой (7).

Теорема 4. *Пусть $M = G/H$ — однородное Ф-пространство порядка k с метрикой (7), $k \geq 3$, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G является полупростой и компактной. Возьмем произвольные элементы X_i, Y_i, Y_j из подпространств $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{m}_j$ разложения (4), $i, j = \overline{1, u}$, $i > j$. Тогда для отображения U имеют место равенства*

$$U(X_i, Y_j)_{\mathfrak{m}_{i\pm j}} = \frac{\lambda_j - \lambda_i}{2\lambda_{i\pm j}}[X_i, Y_j]_{\mathfrak{m}_{i\pm j}}, \quad U(X_i, Y_i) = U(X_i, Y_j)_{\mathfrak{m}_n} = 0,$$

где $\mathfrak{m}_{i+j}$ обозначает $\mathfrak{m}_{k-(i+j)}$ при $i+j > u$, λ_{i+j} обозначает $\lambda_{k-(i+j)}$ при $i+j > u$, $\mathfrak{m}_n$ — любое подпространство разложения (4), кроме $\mathfrak{m}_{i-j}, \mathfrak{m}_{i+j}$.

Доказательство. Пусть X_i, Y_j — элементы, указанные в условии теоремы. Возьмем произвольный элемент $Z_t \in \mathfrak{m}_t$, где $t = \overline{1, u}$. Используя равенство (9), биинвариантность формы Киллинга B и ортогональность подпространств разложения (4) относительно формы B, имеем

$$\begin{aligned} 2\lambda_t B(U(X_i, Y_j), Z_t) &= 2\langle U(X_i, Y_j), Z_t\rangle = \langle X_i, [Z_t, Y_j]_{\mathfrak{m}}\rangle + \langle Y_j, [Z_t, X_i]_{\mathfrak{m}}\rangle \\ &= \lambda_i B(X_i, [Z_t, Y_j]) + \lambda_j B(Y_j, [Z_t, X_i]) = (\lambda_j - \lambda_i) B([X_i, Y_j], Z_t). \end{aligned}$$

Поэтому в силу невырожденности формы Киллинга и произвольности выбора элемента $Z_t \in \mathfrak{m}_t$ получаем

$$U(X_i, Y_j) = \frac{\lambda_j - \lambda_i}{2\lambda_t}[X_i, Y_j]_{m_t}.$$

Из этого с учетом теоремы 1 следуют все утверждения теоремы. □

6. Канонические f-структуры на однородных Ф-пространствах порядка k

Для канонических базовых f-структур имеет место

Теорема 5. *Пусть $M = G/H$ — однородное Ф-пространство порядка k с метрикой (7). Тогда любая каноническая базовая f-структура f_i на M принадлежит классу* **NKf**.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $X \in \mathfrak{m}$. Приближенно келеровы f-структуры определяются условием $\nabla_{fX}(f)fX = 0$. Имеем

$$\nabla_{f_iX}(f_i)f_iX = \nabla_{f_iX_i}f_i^2X_i - f_i\nabla_{f_iX_i}f_iX_i = \alpha\big(f_iX_i, f_i^2X_i\big) - f_i\alpha(f_iX_i, f_iX_i).$$

Используя формулу (8), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\big[f_iX_i, f_i^2X_i\big]_{\mathfrak{m}} + U\big(f_iX_i, f_i^2X_i\big) - f_i\left(\frac{1}{2}\big[f_iX_i, f_iX_i\big]_{\mathfrak{m}} + U(f_iX_i, f_iX_i)\right) \\ &\qquad = \frac{1}{2}\big[f_iX_i, f_i^2X_i\big]_{\mathfrak{m}} + U\big(f_iX_i, f_i^2X_i\big) - f_iU(f_iX_i, f_iX_i). \end{aligned}$$

Отображение U дает 0 по теореме 4, $\big[f_iX_i, f_i^2X_i\big]_{\mathfrak{m}} = [f_iX_i, -X_i]_{\mathfrak{m}} = 0$ по следствию 2 теоремы 2. Поэтому $\nabla_{f_iX}(f_i)f_iX = 0$. □

Для канонических базовых f-структур относительно класса **Hf** эрмитовых f-структур доказана

Теорема 6. *Пусть $M = G/H$ — однородное Ф-пространство порядка k с метрикой (7). Тогда для любой канонической базовой f-структуры f_i на M справедливы утверждения:*

если $3i \neq k$, то f_i принадлежит классу **Hf**;

если $3i = k$, то $f_i \in \mathbf{Hf} \Leftrightarrow [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{h}$.

Доказательство. Возьмем произвольные элементы $X, Y \in \mathfrak{m}$. Эрмитовы f-структуры определяются условием

$$T(X,Y) = \frac{1}{4} f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y) = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} f_i\big(\nabla_{f_iX}(f_i)f_iY - \nabla_{f_i^2X}(f_i)f_i^2Y\big) &= f_i(\nabla_{f_iX_i}(f_i)f_iY_i - \nabla_{-X_i}(f_i)(-Y_i)) \\ &= f_i(-\nabla_{f_iX_i}Y_i - f_i\nabla_{f_iX_i}f_iY_i - \nabla_{X_i}f_iY_i + f_i\nabla_{X_i}Y_i) \\ = f_i\Bigg(-\frac{1}{2}[f_iX_i, Y_i]_{\mathfrak{m}} - U(f_iX_i, Y_i) &- f_i\bigg(\frac{1}{2}[f_iX_i, f_iY_i]_{\mathfrak{m}} + U(f_iX_i, f_iY_i)\bigg) \\ &- \frac{1}{2}[X_i, f_iY_i]_{\mathfrak{m}} - U(X_i, f_iY_i) + f_i\bigg(\frac{1}{2}[X_i, Y_i]_{\mathfrak{m}} + U(X_i, Y_i)\bigg)\Bigg). \end{aligned}$$

Отображение U дает 0 по теореме 4, поэтому далее получаем

$$4T(X,Y) = -\frac{1}{2} f_i([f_iX_i, Y_i]_{\mathfrak{m}} + [X_i, f_iY_i]_{\mathfrak{m}}) + \frac{1}{2}([f_iX_i, f_iY_i]_{\mathfrak{m}} - [X_i, Y_i]_{\mathfrak{m}})|_{\mathfrak{m}_i}. \quad (10)$$

По теореме 2

$$[f_iX_i, Y_i] + [X_i, f_iY_i] \in \mathfrak{m}_{2i}, \quad [f_iX_i, f_iY_i] - [X_i, Y_i] \in \mathfrak{m}_{2i}.$$

Поэтому при $3i \neq k$

$$f_i([f_iX_i, Y_i]_{\mathfrak{m}} + [X_i, f_iY_i]_{\mathfrak{m}}) = 0, \quad ([f_iX_i, f_iY_i]_{\mathfrak{m}} - [X_i, Y_i]_{\mathfrak{m}})|_{\mathfrak{m}_i} = 0,$$

т. е. $T(X,Y) = 0$, что доказывает теорему для этого случая. При $3i = k$ по теореме 3

$$-f_i([f_iX_i, Y_i]_{\mathfrak{m}} + [X_i, f_iY_i]_{\mathfrak{m}}) = [f_iX_i, f_iY_i] - [X_i, Y_i],$$

а по теореме 2

$$[f_iX_i, f_iY_i] - [X_i, Y_i] \in \mathfrak{m}_{2i} = \mathfrak{m}_i.$$

Поэтому, учитывая равенство (10), получим

$$4T(X,Y) = [f_iX_i, f_iY_i] - [X_i, Y_i].$$

Тогда по следствию 3 теоремы 2 $T(X,Y) = 0$ для всех X, Y тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{m}_{i-i} = \mathfrak{h}$, что доказывает теорему для случая $3i = k$. □

Будем рассматривать алгебраические суммы канонических базовых f-структур. Для класса **NKf** получена следующая

Теорема 7. *Пусть $M = G/H$ — однородное Ф-пространство порядка k с метрикой (7) и f_i, f_j — произвольные канонические базовые f-структуры на M, $i > j$. Структура $f_i + f_j$ принадлежит классу* **NKf** *тогда и только тогда, когда выполняются оба условия:*

1) *$[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i+j}$ или справедливы оба равенства $i = 2j$, $\lambda_i = 2\lambda_j$,*

2) $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i-j}$ *или* $\lambda_i = \lambda_j$.

Доказательство. Возьмем произвольные элементы $X, Y \in \mathfrak{m}$ и базовые f-структуры f_i, f_j. Будем использовать обозначение $c_{i\pm j} = \frac{\lambda_j - \lambda_i}{2\lambda_{i\pm j}}$ для выражений из формул теоремы 4. Приближенно келеровы f-структуры определяются условием $\nabla_{fX}(f)fX = 0$. Для суммы $f_i + f_j$ имеем

$$\begin{aligned}\nabla_{(f_i+f_j)X}&(f_i+f_j)(f_i+f_j)X\\ &= \nabla_{f_iX_i+f_jX_j}\big(f_i^2X_i+f_j^2X_j\big) - (f_i+f_j)\nabla_{f_iX_i+f_jX_j}(f_iX_i+f_jX_j)\\ &= \alpha(f_iX_i+f_jX_j, -X_i-X_j) - (f_i+f_j)\alpha(f_iX_i+f_jX_j, f_iX_i+f_jX_j).\end{aligned}$$

Используя формулу (8), свойства отображения U и теорему 4, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[f_iX_i+f_jX_j, -X_i-X_j]_{\mathfrak{m}} + U(f_iX_i, -X_j) + U(-X_i, f_jX_j)\\ &- 2(f_i+f_j)U(f_iX_i, f_jX_j) = \frac{1}{2}[f_iX_i+f_jX_j, -X_i-X_j]_{\mathfrak{m}} + c_{i-j}[f_iX_i, -X_j]_{\mathfrak{m}_{i-j}}\\ &\quad + c_{i+j}[f_iX_i, -X_j]_{\mathfrak{m}_{i+j}} + c_{i-j}[-X_i, f_jX_j]_{\mathfrak{m}_{i-j}} + c_{i+j}[-X_i, f_jX_j]_{\mathfrak{m}_{i+j}}\\ &\qquad - 2(f_i+f_j)(c_{i-j}[f_iX_i, f_jX_j]_{\mathfrak{m}_{i-j}} + c_{i+j}[f_iX_i, f_jX_j]_{\mathfrak{m}_{i+j}}).\end{aligned}$$

По теореме 2

$$c_{i-j}[f_iX_i, -X_j]_{\mathfrak{m}_{i-j}} + c_{i-j}[-X_i, f_jX_j]_{\mathfrak{m}_{i-j}} = 0.$$

Применим это и другие следствия теоремы 2 для дальнейшего преобразования:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(-[f_iX_i, X_j] + [X_i, f_jX_j]) + c_{i+j}([f_iX_i, -X_j] + [-X_i, f_jX_j])\\ &\quad - (f_i+f_j)(c_{i-j}([f_iX_i, f_jX_j] + [X_i, X_j]) + c_{i+j}([f_iX_i, f_jX_j] - [X_i, X_j])).\end{aligned}$$

Итак, для $\nabla_{fX}(f)fX$ получены следующие выражения:

$$\begin{aligned}(\nabla_{fX}(f)fX)_{\mathfrak{m}_{i-j}} &= \frac{1}{2}(-[f_iX_i, X_j] + [X_i, f_jX_j])\\ &\quad - c_{i-j}(f_i+f_j)([f_iX_i, f_jX_j] + [X_i, X_j]),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{fX}(f)fX)_{\mathfrak{m}_{i+j}} &= c_{i+j}([f_iX_i, -X_j] + [-X_i, f_jX_j])\\ &\quad - c_{i+j}(f_i+f_j)([f_iX_i, f_jX_j] - [X_i, X_j]).\end{aligned}$$

Применяя теорему 3 и следствие 3 теоремы 2, рассмотрим следующие возможные случаи для $\nabla_{fX}(f)fX$.

При $j \neq i-j$ (т. е. $i \neq 2j$, $f_{i-j} \neq f_j$) получим

$$(\nabla_{fX}(f)fX)_{\mathfrak{m}_{i-j}} = \frac{1}{2}(-[f_iX_i, X_j] + [X_i, f_jX_j]) = 0$$

тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i+j}$.

При $j = i-j$ (т. е. $i = 2j$, $f_{i-j} = f_j$, $\lambda_{i-j} = \lambda_j$) имеем

$$\begin{aligned}(\nabla_{fX}(f)fX)_{\mathfrak{m}_{i-j}} &= \frac{1}{2}(-[f_iX_i, X_j] + [X_i, f_jX_j]) - c_{i-j}f_j([f_iX_i, f_jX_j] + [X_i, X_j])\\ &= -\left(\frac{1}{2} + c_{i-j}\right)([f_iX_i, X_j] - [X_i, f_jX_j]) = 0\end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2}+c_{i-j}=0$ (т. е. $\frac{1}{2}+\frac{\lambda_j-\lambda_i}{2\lambda_{i-j}}=0$, $\lambda_i=2\lambda_j$) или $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\subset\mathfrak{m}_{i+j}$.

При $2i+j\neq k$ и $i+2j\neq k$ (т. е. $f_{i+j}\neq f_i$ и $f_{i+j}\neq f_j$) будет

$$(\nabla_{fX}(f)fX)_{\mathfrak{m}_{i+j}}=c_{i+j}([f_iX_i,-X_j]+[-X_i,f_jX_j])=0$$

тогда и только тогда, когда $c_{i+j}=0$ (т. е. $\frac{\lambda_j-\lambda_i}{2\lambda_{i+j}}=0$, $\lambda_i=\lambda_j$) или $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\subset\mathfrak{m}_{i-j}$.

При $2i+j=k$ или $i+2j=k$ (т. е. $f_{i+j}=f_i$ или $f_{i+j}=f_j$) получим

$$\begin{aligned}(\nabla_{fX}(f)fX)_{\mathfrak{m}_{i+j}}&\\=c_{i+j}([f_iX_i,-X_j]+[-X_i,f_jX_j])-c_{i+j}f_{i+j}([f_iX_i,f_jX_j]-[X_i,X_j])&\\=-2c_{i+j}([f_iX_i,X_j]+[X_i,f_jX_j])=0&\end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда $c_{i+j}=0$ (т. е. $\frac{\lambda_j-\lambda_i}{2\lambda_{i+j}}=0$, $\lambda_i=\lambda_j$) или $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\subset\mathfrak{m}_{i-j}$.

Итак, рассмотренные случаи доказывают утверждение теоремы. □

Теорема 8. *Пусть $M=G/H$ — однородное Φ-пространство порядка k с метрикой (7) и f_i,f_j — произвольные канонические базовые f-структуры на M, $i>j$. Структура f_i-f_j принадлежит классу* **NKf** *тогда и только тогда, когда выполняются оба условия:*

1) $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\subset\mathfrak{m}_{i+j}$ *или* $\lambda_i=\lambda_j$,

2) $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\subset\mathfrak{m}_{i-j}$ *или справедливы оба равенства:* $2i+j=k$, $\lambda_j=2\lambda_i$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 7. Возьмем произвольные элементы $X,Y\in\mathfrak{m}$ и базовые f-структуры f_i, f_j. Для $\nabla_{fX}(f)fX$ получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}(\nabla_{fX}(f)fX)_{\mathfrak{m}_{i-j}}&\\=c_{i-j}([f_iX_i,-X_j]+[X_i,f_jX_j])+c_{i-j}(f_i-f_j)([f_iX_i,f_jX_j]+[X_i,X_j]),&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{fX}(f)fX)_{\mathfrak{m}_{i+j}}&\\=-\frac{1}{2}([f_iX_i,X_j]+[X_i,f_jX_j])+c_{i+j}(f_i+f_j)([f_iX_i,f_jX_j]-[X_i,X_j]).&\end{aligned}$$

Применяя теперь теорему 3 и следствие 3 теоремы 2, рассмотрим следующие возможные случаи для $\nabla_{fX}(f)fX$.

При $j\neq i-j$ (т. е. $i\neq 2j$, $f_{i-j}\neq f_j$) имеем

$$(\nabla_{fX}(f)fX)_{\mathfrak{m}_{i-j}}=c_{i-j}([f_iX_i,-X_j]+[X_i,f_jX_j])=0$$

тогда и только тогда, когда $c_{i-j}=0$ (т. е. $\frac{\lambda_j-\lambda_i}{2\lambda_{i-j}}=0$, $\lambda_i=\lambda_j$) или $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\subset\mathfrak{m}_{i+j}$.

При $j=i-j$ (т. е. $i=2j$, $f_{i-j}=f_j$) получим

$$\begin{aligned}(\nabla_{fX}(f)fX)_{\mathfrak{m}_{i-j}}&\\=c_{i-j}([f_iX_i,-X_j]+[X_i,f_jX_j])-c_{i-j}f_{i-j}([f_iX_i,f_jX_j]+[X_i,X_j])&\\=2c_{i-j}([f_iX_i,-X_j]+[X_i,f_jX_j])=0&\end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда $c_{i-j}=0$ (т. е. $\frac{\lambda_j-\lambda_i}{2\lambda_{i-j}}=0$, $\lambda_i=\lambda_j$) или $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]\subset\mathfrak{m}_{i+j}$.

При $2i+j\neq k$ и $i+2j\neq k$ (т. е. $f_{i+j}\neq f_i$ и $f_{i+j}\neq f_j$) будет

$$(\nabla_{fX}(f)fX)_{\mathfrak{m}_{i+j}}=-\frac{1}{2}([f_iX_i,X_j]+[X_i,f_jX_j])=0$$

тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i-j}$.

При $2i + j = k$ или $i + 2j = k$ (т. е. $f_{i+j} = f_i$ или $f_{i+j} = f_j$) имеем

$$(\nabla_{fX}(f)fX)_{\mathfrak{m}_{i+j}} = -\frac{1}{2}([f_iX_i, X_j] + [X_i, f_jX_j]) + c_{i+j}f_{i+j}([f_iX_i, f_jX_j] - [X_i, X_j]) = \left(-\frac{1}{2} + c_{i+j}\right)([f_iX_i, X_j] + [X_i, f_jX_j]) = 0$$

тогда и только тогда, когда $-\frac{1}{2} + c_{i+j} = 0$ (т. е. $-\frac{1}{2} + \frac{\lambda_j - \lambda_i}{2\lambda_{i+j}} = 0$, $\lambda_{i+j} = \lambda_i$ и $\lambda_j = 2\lambda_i$) или $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i-j}$.

Итак, рассмотренные случаи дают утверждение теоремы. $\square$

7. Приближенно келеровы и эрмитовы *f*-структуры на однородных Ф-пространствах флаговых многообразий $M = SU(3)/T_{\max}$

Рассмотрим в качестве примера пространство $M = SU(3)/T_{\max}$ как однородное Ф-пространство порядка 5.

Используя запись алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3)$ [23], имеем

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & \bar{c} \\ -\bar{a} & \alpha_2 & b \\ -c & -\bar{b} & \alpha_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \operatorname{Im}\mathbb{C}, \\ a, b, c \in \mathbb{C}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{array} \right\} = E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \oplus D(a, b, c) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}_3,$$

где

$$\mathfrak{p}_1 = \{X \in \mathfrak{su}(3) \mid X = D(a, 0, 0), a \in \mathbb{C}\}, \ \mathfrak{p}_2 = \{X \in \mathfrak{su}(3) \mid X = D(0, b, 0), b \in \mathbb{C}\},$$
$$\mathfrak{p}_3 = \{X \in \mathfrak{su}(3) \mid X = D(0, 0, c), c \in \mathbb{C}\},$$

причем (см. [23]) $[\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2] \subset \mathfrak{p}_3$, $[\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3] \subset \mathfrak{p}_2$, $[\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3] \subset \mathfrak{p}_1$.

Отметим, что однородное Ф-пространство порядка 5 порождается, например, внутренним автоморфизмом $\Phi_1 : A \to B_1AB_1^{-1}$, где $B_1 = \operatorname{diag}(\varepsilon, \bar{\varepsilon}, 1)$, $\varepsilon = \sqrt[5]{1}$ — примитивный корень из единицы. Пусть $X = D(a, b, c)$, где $a, b, c \in \mathbb{C}$. Тогда $\theta X = D(a\varepsilon^2, b\bar{\varepsilon}, c\bar{\varepsilon})$, подпространства разложения (4) таковы: $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{p}_1$.

Используя детализацию выражения (3) [8] для Ф-пространств порядка 5, запишем формулы для канонических f-структур на таких пространствах:

$$f_1 = \gamma(\theta - \theta^4) + \delta(\theta^2 - \theta^3), \quad f_2 = \delta(\theta - \theta^4) - \gamma(\theta^2 - \theta^3),$$
$$f_3 = f_1 + f_2, \quad f_4 = f_1 - f_2,$$

где $\gamma = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10}, \delta = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10}$. Заметим, что f_3 и f_4 — канонические почти комплексные структуры на M.

Поскольку $0 \neq [\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1$, из теорем 5–8 следует

Теорема 9. *Рассмотрим $M = SU(3)/T_{\max}$ как однородное Ф-пространство порядка $k = 5$ с метрикой (7), порождаемое автоморфизмом Φ_1. Тогда справедливы утверждения:*

1) *канонические f-структуры f_1, f_2 принадлежат классам* **NKf**, **Hf** *для всех метрик вида (7);*

2) *каноническая f-структура $f_3 = f_1 + f_2$ принадлежит классу* **NKf** *тогда и только тогда, когда $\lambda_2 = 2\lambda_1$;*

3) *каноническая f-структура $f_4 = f_1 - f_2$ принадлежит классу* **NKf** *тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2$.*

Отметим, что в работе [24] канонические f-структуры на однородных Ф-пространствах флагового многообразия $M = SU(3)/T_{\max}$ рассмотрены в случае метрик с коэффициентами для подпространств $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$. В метриках (7) указаны коэффициенты для подпространств $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{p}_1$. Поэтому теорема 9 является частным случаем результатов, полученных в [24] с помощью непосредственных вычислений для структур $f_1, \dots, f_4$. Отметим, что эти же результаты указаны также в работах [25, 26].

Автор выражает благодарность Виталию Владимировичу Балащенко (научному руководителю) за консультации во время проведения исследований и ценные советы при написании данной работы, а также рецензенту статьи за полезные замечания, в частности, за рекомендации по сокращению объема и существенному улучшению доказательства теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yano K.* On a structure defined by a tensor field f of type $(1,1)$ satisfying $f^3 + f = 0$ // Tensor. 1963. V. 14. P. 99–109.

2. *Яно К., Кон М.* CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях. М.: Наука, 1990.

3. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 18. С. 25–71. (Итоги науки и техники).

4. *Феденко А. С.* Пространства с симметриями. Минск: Изд-во Белорусск. ун-та, 1977.

5. *Wolf J. A., Gray A.* Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms // J. Differ. Geom. 1968. V. 2, N 1–2. P. 77–159.

6. *Gray A.* Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3 // J. Differ. Geom. 1972. V. 7, N 3–4. P. 343–369.

7. *Степанов Н. А.* Однородные 3-циклические пространства // Изв. вузов. Математика. 1967. № 12. С. 65–74.

8. *Балащенко В. В., Степанов Н. А.* Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 11. С. 3–34.

9. *Балащенко В. В.* Однородные эрмитовы f-многообразия // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 3. С. 159–160.

10. *Balashchenko V. V.* Invariant nearly Kähler f-structures on homogeneous spaces // Contemp. Math. 2001. V. 288. P. 263–267. (Global differential geometry: The mathematical legacy of Alfred Gray).

11. *Самсонов А. С.* Однородные Ф-пространства псевдоортогональных групп $O(2,k)$ // Вестн. БГУ. Сер. 1. Математика. Физика. Информатика. 2007. № 3. С. 112–118.

12. *Балащенко В. В., Самсонов А. С.* Канонические f-структуры на естественно редуктивных Ф-пространствах порядка 6 // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 3. С. 26–31.

13. *Балащенко В. В., Самсонов А. С.* Приближенно келеровы и эрмитовы f-структуры на однородных k-симметрических пространствах // Докл. РАН. 2010. Т. 432, № 3. С. 295–298.

14. *Кириченко В. Ф.* Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, № 6. С. 1208–1223.

15. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М.: МПГУ, 2003.

16. *Балащенко В. В.* Однородные приближенно келеровы f-многообразия // Докл. РАН. 2001. Т. 376, № 4. С. 439–441.

17. *Степанов Н. А.* Основные факты теории φ-пространств // Изв. вузов. Математика. 1967. № 3. С. 88–95.

18. *Ковальский О.* Обобщенные симметрические пространства. М.: Мир, 1984.

19. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 2.

20. *Чурбанов Ю. Д.* Интегрируемость канонических аффинорных структур однородных периодических Ф-пространств // Изв. вузов. Математика. 2008. № 3. С. 43–57.
21. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 1.
22. *Wang M., Ziller W.* Existence and non-existence of homogeneous Einstein metrics // Invent. Math. 1986. V. 84. P. 177–194.
23. *Родионов Е. Д.* Эйнштейновы метрики на четномерных однородных пространствах, допускающих однородную риманову метрику положительной секционной кривизны // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 3. С. 126–131.
24. *Balashchenko V. V.* Invariant f-structures in the generalized Hermitian geometry // Proc. Conf. contemp. geometry and related topics. Belgrade: Univ. Belgrade, 2006. P. 5–27.
25. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения. Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.
26. *Sakovich A.* Invariant metric f-structures on specific homogeneous reductive spaces // Extr. Math. 2008. V. 23, N 1. P. 85–102.

Статья поступила 23 сентября 2010 г.

Самсонов Андрей Сергеевич
Белорусский гос. университет,
кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики,
пр. Независимости, 4, Минск 220030, Беларусь
Andrey.S.Samsonov@gmail.com