Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 517.545

О ТОЧНОЙ ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ МАЛОГО РОДА

И. А. Медных

Аннотация. Получены верхние оценки числа голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два в ряде различных случаев. В частности, установлено, что число голоморфных отображений произвольной римановой поверхности рода три на произвольную риманову поверхность рода два не превосходит 48. Показано, что данная оценка точная, и найдены пары римановых поверхностей, для которых она достигается.

Ключевые слова: теорема де Франкиса, голоморфное отображение, риманова поверхность, орбифолд, автоморфизм.

1. Введение

Обозначим через $\mathrm{Hol}(S_g, S_{g'})$ множество всех голоморфных отображений римановой поверхности S_g рода g на риманову поверхность $S_{g'}$ рода g', где $g \geq g' > 1$.

Классическая теорема де Франкиса [1] утверждает, что число элементов $\mathrm{Hol}(S_g, S_{g'})$ конечно и ограничено константой, зависящей только от g. Первая верхняя оценка на число $\mathrm{Hol}(S_g, S_{g'})$ получена в работе Ховарда и Соммезе [2]. В дальнейшем оценка была улучшена в работах Альзатти и Пирола [3] и Танабе [4–6]. Отметим также недавний результат Ито и Ямамото [7], позволяющий получить верхнюю оценку в терминах родов и длин кратчайших геодезических.

Теореме де Франкиса также посвящены работы испанских математиков Гонсалес-Диез и Фуертес [8, 9]. Теорема де Франкиса для римановых поверхностей конечного типа и ее обобщение на многомерный случай представлены в [10, 11].

В работах автора [12, 13] получены структурные теоремы, описывающие голоморфные отображения римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два с точностью до эквивалентности.

Целью данной статьи является получение точной верхней оценки на число голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два. В работе установлено, что число указанных отображений не превосходит 48. Показано, что полученная оценка точная, и приведены пары поверхностей, для которых она достигается.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00210), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (коды проектов НШ–921.2012.1 и МК–4447.2012.1), а также фонда «Династия».

2. Предварительные сведения

В данной работе *римановой поверхностью* называется одномерное компактное связное комплексное многообразие без края.

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между объектами категории римановых поверхностей и категории алгебраических кривых. При этом классу конформно эквивалентных поверхностей соответствует класс бирациональных эквивалентных кривых, а голоморфным отображениям — рациональные. В настоящей работе будем широко использовать указанные взаимно однозначные соответствия. Для более детального обсуждения данного вопроса отсылаем читателя к предыдущей работе автора [13].

В дальнейшем, следуя книге [14], будем отождествлять классы конформно эквивалентных римановых поверхностей с классами бирационально эквивалентных кривых. В этом случае будем говорить, что риманова поверхность определяется алгебраическим уравнением, полагая, что указанное уравнение задает поле мероморфных функций на данной римановой поверхности. При этом [14, с. 5] две римановы поверхности S и S' конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда между полями $\mathscr{M}(S)$ и $\mathscr{M}(S')$ определенных на них мероморфных функций существует изоморфизм, сохраняющий константы.

Пусть риманова поверхность S определяется уравнением $P(w,z)=0$, где P — неприводимый над $\mathbb{C}$ полином от двух переменных. Тогда S может быть рассмотрена как риманова поверхность алгебраической функции $w=w(z)$. В этом случае величины w и z удобно трактовать как определенные на S мероморфные функции, которые связаны соотношением $P(w,z)=0$ и порождают поле всех мероморфных функций $\mathscr{M}(S)$. Это, в частности, означает, что любая мероморфная функция $\varphi\in\mathscr{M}(S)$ представима в виде $\varphi=R(w,z)$, где R — подходящая рациональная функция от двух переменных.

Если римановы поверхности S и S' определяются неприводимыми алгебраическими уравнениями $P(w,z)=0$ и $P'(u,v)=0$ соответственно, а $f: S\to S'$ — сюръективное голоморфное отображение, то индуцированное им соответствие $\varphi\in\mathscr{M}(S')\to\varphi\circ f\in\mathscr{M}(S)$ задает вложение полей $\mathscr{M}(S')\to\mathscr{M}(S)$. При этом в силу предыдущего $u\circ f=R_1(w,z)$ и $v\circ f=R_2(w,z)$ являются рациональными функциями от w и z. Отождествляя φ и $\varphi\circ f$, рассмотрим $\mathscr{M}(S')$ как подполе поля $\mathscr{M}(S)$.

Таким образом, построено определенное всюду, за исключением конечного числа точек, рациональное отображение $F:(w,z)\to(u,v)=(R_1(w,z),R_2(w,z))$, переводящее кривую $P(w,z)=0$ в кривую $P'(u,v)=0$.

По теореме Римана об устранении особенностей верно и обратное утверждение. Каждое рациональное отображение F указанного выше вида однозначно определяет сюръективное голоморфное отображение $f: S\to S'$.

3. Инварианты групп автоморфизмов и голоморфных отображений

Гиперэллиптическая поверхность — это поверхность, допускающая двулистное разветвленное накрытие над сферой Римана. Накрывающая инволюция такого накрытия называется *гиперэллиптической инволюцией.* Каждая гиперэллиптическая поверхность рода g представляется уравнением $w^2=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{2g+2})$, где $z_1,z_2\ldots z_{2g+2}$ — различные комплексные числа, при этом действие гиперэллиптической инволюции на поверхности осуществляется по правилу $\tau:(w,z)\to(-w,z)$. Известно, что любая риманова поверхность рода 2 является гиперэллиптической. В [15, 16] показано, что риманова поверхность рода 3, двулистно накрывающая поверхность рода 2, также будет гиперэллиптической римановой поверхностью.

Двумерным орбифолдом O будем называть риманову поверхность S с выделенным на ней дискретным подмножеством точек Σ, каждой из которых приписано некоторое натуральное число ≥ 2. Σ называется *сингулярным множеством* или *множеством особых точек* орбифолда O, а поверхность S — его *носителем.* Основные факты из теории орбифолдов изложены в [17, § 2; 18, гл. 13].

В настоящей работе в качестве S всюду будет использована замкнутая риманова поверхность рода 0, т. е. риманова сфера $\overline{\mathbb{C}}$, а в качестве $\Sigma = \{z_1, z_2, \ldots, z_{2g+2}\}$ — подмножество $\overline{\mathbb{C}}$, состоящее из четного числа точек, каждой из которой приписано число 2. В этом случае для краткости будем писать $O = \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \ldots, z_{2g+2})$. *Изоморфизмом* орбифолдов $O_g = \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \ldots, z_{2g+2})$ и $O'_g = \overline{\mathbb{C}}(z'_1, z'_2, \ldots, z'_{2g+2})$ называется конформное (дробно-линейное) отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$, отображающее множество особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_{2g+2}$ на множество особых точек $z'_1, z'_2, \ldots, z'_{2g+2}$.

Пусть S_g — гиперэллиптическая риманова поверхность рода g и τ — гиперэллиптическая инволюция. Будем рассматривать фактор-пространство $O_g = S_g/\langle\tau\rangle$ как двумерный орбифолд, носителем которого является сфера Римана, а особыми точками — проекции $2g + 2$ точек Вейерштрасса при каноническом отображении $S_g \to O_g = S_g/\langle\tau\rangle$.

Приведем некоторые общие факты из теории римановых поверхностей [19, 6]. Пусть S_g и $S_{g'}$ — гиперэллиптические римановы поверхности, а τ и τ' — их гиперэллиптические инволюции. Тогда произвольное сюръективное голоморфное отображение $f : S_g \to S_{g'}$ эквиинвариантно относительно действия указанных инволюций, т. е. справедливо равенство $f \circ \tau = \tau' \circ f$. Это означает, что f опускается до голоморфного отображения орбифолдов $\hat{f} : O_g = S_g/\langle\tau\rangle \to O_{g'} = S_{g'}/\langle\tau'\rangle$. При этом $\hat{f}$ имеет ровно два поднятия до отображения S_g на $S_{g'}$, а именно f и $f \circ \tau$. Кроме того, в случае $g = g'$ любой изоморфизм орбифолдов $\hat{f} : O_g \to O_{g'}$ поднимается до изоморфизма римановых поверхностей $f : S_g \to S_{g'}$. В дальнейшем мы будем неоднократно пользоваться указанными результатами.

Напомним, что всякая риманова поверхность S_2 рода 2, имеющая по крайней мере одну негиперэллиптическую инволюцию, представляется в виде $y^2 = x^6 + a_1x^4 + a_2x^2 + 1$. При этом диэдральные инварианты определяются как $u_1 = a_1^3 + a_2^3$ и $u_2 = 2a_1a_2$. Известно [20], что строение группы автоморфизмов римановой поверхности S_2 полностью определяется парой (u_1, u_2). В частности, $|\operatorname{Aut}(S_2)| = 48$ тогда и только тогда, когда $(u_1, u_2) = (-250, 50)$, и $|\operatorname{Aut}(S_2)| = 24$ тогда и только тогда, когда $(u_1, u_2) = (0, 0)$ или $(u_1, u_2) = (6750, 450)$. В случаях $\operatorname{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_6$ и $\operatorname{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_4$ диэдральные инварианты удовлетворяют соотношениям $u_2^2 - 220u_2 - 16u_1 + 4500 = 0$ и $2u_1^2 - u_2^3 = 0$ соответственно. В последних двух случаях (см. [21]) уравнения поверхности S_2 бирациональными преобразованиями приводятся соответственно к виду $Y^2 = X^6 + X^3 + t$ или $Y^2 = X^5 + X^3 + tX$, где $t \in \mathbb{C} \setminus \left\{0, \frac{1}{4}\right\}$. Здесь t — так называемый абсолютный инвариант, однозначно определяющий риманову поверхность S_2 с точностью до конформной эквивалентности. В случае, когда группа $\operatorname{Aut}(S_2)$ содержит только одну инволюцию (по классификации Больца это случаи $\operatorname{Aut}(S_2) = \mathbb{Z}_2$ и $\operatorname{Aut}(S_2) = \mathbb{Z}_{10}$), ее строение однозначно определяется набором инвариантов

Больца [22] или их современных модификаций из [23]. Указанные соображения будут использованы в дальнейшем для вычисления групп автоморфизмов поверхностей рода 2.

Голоморфные отображения $f : S_3 \to S_2$ и $f' : S_3' \to S_2'$ называются *эквивалентными*, если существуют изоморфизмы римановых поверхностей $\alpha : S_3 \to S_3'$ и $\beta : S_2 \to S_2'$ такие, что $\beta \circ f = f' \circ \alpha$.

Следующее предложение дает простой критерий эквивалентности голоморфных отображений.

Предложение 1. *Пусть $f : S_3 \to S_2$ и $f' : S_3' \to S_2'$ — голоморфные отображения римановых поверхностей рода 3 на римановы поверхности рода 2. Обозначим через $\hat{f} : O_3 \to O_2$ и $\hat{f}' : O_3' \to O_2'$ соответствующие им проекции на орбифолды. Отображения f и f' эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм орбифолдов O_2 и O_2', переводящий критические значения функции $\hat{f}$ в критические значения функции $\hat{f}'$.*

Доказательство. Достаточность. Обозначим через $p_i : S_i \to O_i$ и $p_i' : S_i' \to O_i'$, $i = 1, 2$, канонические проекции, индуцированные действием гиперэллиптической инволюции. Пусть $\hat{\beta} : O_2 \to O_2'$ — изоморфизм орбифолдов, переводящий критические значения функции $\hat{f}$ в критические значения $\hat{f}'$. Переходя к носителям орбифолдов или, что то же самое, игнорируя наличие на них особых точек, можем считать, что оба отображения $\hat{f}$ и $\hat{f}'$ являются двулистными разветвленными накрытиями сферы $\overline{\mathbb{C}}$ над сферой $\overline{\mathbb{C}}$. При этом конформное отображение $\hat{\beta}$ отображает критические значения одного из них в критические значения другого. Следовательно, $\hat{\beta}$ поднимается до конформного отображения $\hat{\alpha}$ носителя орбифолда O_3 на носитель орбифолда O_3'. Покажем, что при этом отображении особые точки O_3 переходят в особые точки O_3'. Действительно, в силу результатов, изложенных в [13, с. 1384], особыми точками орбифолда O_3 являются прообразы особых точек O_2 при отображении $\hat{f}$ и его критические точки $\hat{f}$ (т. е. прообразы его критических значений). Аналогично устроены и особые точки орбифолда O_3'. По построению $\hat{\alpha}$ переводит прообразы особых точек O_2 в прообразы особых точек O_2'. Далее, так как $\hat{\beta}$ отображает критические значения $\hat{f}$ в критические значения $\hat{f}'$, то $\hat{\alpha}$ переводит критические точки $\hat{f}$ в критические точки $\hat{f}'$. Следовательно, $\hat{\alpha}$ отображает особые точки O_3 на особые точки O_3' и является изоморфизмом орбифолдов. Стало быть, оно поднимается до голоморфного отображения гиперэллиптических римановых поверхностей $\alpha : S_3 \to S_3'$. По аналогичным соображениям $\hat{\beta}$ поднимается до отображения римановых поверхностей $\beta : S_2 \to S_2'$.

Покажем, что отображения f и f' эквивалентны. Для этого проверим, что отображения f и $g = \beta^{-1} \circ f' \circ \alpha$ являются поднятиями одного и того же отображения $\hat{f}$ по каноническим проекциям p_2 и p_3, т. е. убедимся, что справедливы равенства $p_2 \circ f = \hat{f} \circ p_3$ и $p_2 \circ g = \hat{f} \circ p_3$. Первое равенство следует из определения $\hat{f}$. Докажем второе равенство. По определению поднятий имеем тождества

$$p_2' \circ f' = \hat{f}' \circ p_3', \quad p_3' \circ \alpha = \hat{\alpha} \circ p_3, \quad p_2' \circ \beta = \hat{\beta} \circ p_2.$$

Отсюда

$$p_2 \circ g = p_2 \circ \beta^{-1} \circ f' \circ \alpha = \hat{\beta}^{-1} \circ p_2' \circ f' \circ \alpha = \hat{\beta}^{-1} \circ \hat{f}' \circ p_3' \circ \alpha = \hat{\beta}^{-1} \circ \hat{f}' \circ \hat{\alpha} \circ p_3 = \hat{f} \circ p_3.$$

Поскольку оба отображения f и g являются поднятиями $\hat{f}$, они либо совпадают либо отличаются на гиперэллиптическую инволюцию τ римановой поверхности

S_3. В первом случае имеем равенство $f = \beta^{-1} \circ f' \circ \alpha$, а во втором — равенство $f = \beta^{-1} \circ f' \circ \alpha \circ \tau$. В обоих случаях отображения f и f' эквивалентны, что и требовалось доказать.

Необходимость. Пусть отображения f и f' эквивалентны. Это означает, что существуют изоморфизмы гиперэллиптических поверхностей $\alpha : S_3 \to S_3'$ и $\beta : S_2 \to S_2'$ такие, что $\beta \circ f = f' \circ \alpha$. Опуская указанные изоморфизмы до изоморфизмов орбифолдов $\hat{\alpha} : O_3 \to O_3'$ и $\hat{\beta} : O_2 \to O_2'$, имеем равенства

$$p_3' \circ \alpha = \hat{\alpha} \circ p_3, \quad p_2' \circ \beta = \hat{\beta} \circ p_2.$$

Аналогично, опуская отображения f и f' до отображений $\hat{f}$ и $\hat{f}'$, получим

$$p_2 \circ f = \hat{f} \circ p_3, \quad p_2' \circ f' = \hat{f}' \circ p_3'.$$

Покажем, что отображение $\hat{\beta} \circ \hat{f} \circ \hat{\alpha}^{-1}$ наряду с $\hat{f}'$ является проекцией отображения $\beta \circ f \circ \alpha^{-1} = f'$. Действительно,

$$\hat{\beta} \circ \hat{f} \circ \hat{\alpha}^{-1} \circ p_3' = \hat{\beta} \circ \hat{f} \circ p_3 \circ \alpha^{-1} = \hat{\beta} \circ p_3 \circ f \circ \alpha^{-1} = p_2' \circ \beta \circ f \circ \alpha^{-1} = p_2' \circ f'.$$

В силу единственности проекции имеем $\hat{\beta} \circ \hat{f} \circ \hat{\alpha}^{-1} = \hat{f}'$. Последнее равенство означает, что отображение $\hat{\alpha}$ отображает критические точки отображения $\hat{f}$ в критические точки $\hat{f}'$, а отображение $\hat{\beta}$ переводит критические значения $\hat{f}$ в критические значения $\hat{f}'$. Необходимость установлена.

Нам потребуется два важных следствия из доказанного предложения. Дадим следующие определения.

Правильным мёбиусовым шестиугольником называется набор из шести точек расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, которые при подходящем дробно-линейном преобразовании переходят в точки $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5$, где $\varepsilon = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ — первообразный корень шестой степени из единицы.

Правильным мёбиусовым октаэдром называется набор из шести точек расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, которые при подходящем дробно-линейном преобразовании переходят в точки $0, -1, -i, 1, i, \infty$.

Напомним, что *окружностью* в $\overline{\mathbb{C}}$ называется либо окружность, либо прямая, проходящая через бесконечно удаленную точку.

Из приведенных выше определений следует, что точки правильного мёбиусова шестиугольника лежат на общей окружности и существует мёбиусов автоморфизм шестого порядка, циклически переставляющий эти точки. Точки правильного мёбиусова октаэдра лежат на трех окружностях, образующих остов октаэдра. При этом группа мёбиусовых автоморфизмов октаэдра действует транзитивно на множестве его вершин и на множестве его ребер.

Лемма 1. *С точностью до эквивалентности существует не более двух сюръективных голоморфных отображений вида $f : S_3 \to S_2$, где S_3 — риманова поверхность рода 3, а S_2 — риманова поверхность рода 2 с группой автоморфизмов $|\operatorname{Aut}(S_2)| = 48$.*

Доказательство. По классификации Больца поверхность S_2 в этом случае представляется уравнением $u^2 = v(v^4 - 1)$. Это означает, что мероморфная функция v отображает риманову поверхность S_2 на орбифолд O_2, особыми точками которого являются вершины правильного мёбиусова октаэдра $0, -1, -i, 1, i, \infty$. Пусть $f : S_3 \to S_2$ — произвольное голоморфное отображение римановой поверхности S_3 на риманову поверхность S_2, а $\hat{f} : O_3 \to O_2$ — его проекция на орбифолды. Тогда критическими значениями $\hat{f}$ служат либо две смежные вершины октаэдра, либо две его противолежащие вершины. Эти два случая, очевидно, не сводятся друг к другу с помощью дробно-линейного преобразования, оставляющего множество вершин октаэдра инвариантным. В силу предложения 1 отображения f в указанных двух случаях неэквивалентны.

Отметим, что обе указанные возможности реализуются (теорема 6.2).

Лемма 2. *С точностью до эквивалентности существует не более трех сюръективных голоморфных отображений вида $f : S_3 \to S_2$, где S_3 — риманова поверхность рода 3, а S_2 — риманова поверхность рода 2 с группой автоморфизмов* $|\operatorname{Aut}(S_2)| = 24$.

Доказательство. По классификации Больца поверхность S_2 в этом случае представляется уравнением $u^2 = v^6 - 1$. Это означает, что мероморфная функция v отображает риманову поверхность S_2 на орбифолд O_2, особыми точками которого являются вершины правильного мёбиусова шестиугольника. Пусть $f : S_3 \to S_2$ — произвольное голоморфное отображение римановой поверхности S_3 на риманову поверхность S_2, а $\hat{f} : O_3 \to O_2$ — его проекция на орбифолды. Тогда критическими значениями $\hat{f}$ служат либо две смежные вершины шестиугольника, либо две его противолежащие вершины, либо две вершины, несмежные и непротиволежащие. Эти три случая, очевидно, не сводятся друг к другу с помощью дробно-линейного преобразования, оставляющего множество вершин шестиугольника инвариантным. В силу предложения 1 отображения f во всех трех указанных случаях попарно не эквивалентны.

Ниже (см. случаи 5a, 7, 8a) будет показано, что все три отмеченные в лемме возможности действительно реализуются.

4. Классификация голоморфных отображений с точностью до эквивалентности

Отображения $f : S_3 \to S_2$ и $g : S_3 \to S_2$ назовем *эквивалентными*, если существуют автоморфизмы $\alpha \in \operatorname{Aut}(S_3)$ и $\beta \in \operatorname{Aut}(S_2)$ такие, что $f \circ \alpha = \beta \circ g$. Структура множества голоморфных отображений $\operatorname{Hol}(S_3, S_2)$ существенно зависит от строения группы автоморфизмов $\operatorname{Aut}(S_3)$ поверхности S_3. В частности, теорема Акколы [16] утверждает, что если множество $\operatorname{Hol}(S_3, S_2)$ непусто, то поверхность S_3 гиперэллиптична.

В [24] приведена классификация гиперэллиптических римановых поверхностей рода 3 в зависимости от строения группы автоморфизмов $\operatorname{Aut}(S_3)$. Здесь имеет место 11 возможных случаев. Все они подробно разобраны в предыдущей работе автора [13].

Нам потребуются следующие сведения из [13]. В каждом классе эквивалентности множества $\operatorname{Hol}(S_3, S_2)$ выделим по одному представителю $f : (w, z) \to (u, v)$. Соответствующие голоморфные отображения для каждой пары поверхностей S_3 и S_2 приведены ниже.

1. Случай $\operatorname{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{S}_4$. В этом случае поверхность S_3 представляется в виде $w^2 = z^8 + 14z^4 + 1$, а структура множества $\operatorname{Hol}(S_3, S_2)$ существенно зависит от поверхности S_2. Здесь возникает две возможности.

1a. Поверхность S_2 задается уравнением $u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + 1)$. По классификации Больца [22] (см. также [21]) группа автоморфизмов S_2 изоморфна

$\mathbb{D}_4$. При этом множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из одного класса эквивалентности, представителем которого является отображение

$$f(w,z) = \left(\frac{2iz}{(z^2+1)^3}w, \frac{z^2-1}{z^2+1}\right).$$

1b. Поверхность S_2 задается уравнением $u^2 = (v^2-1)(v^4-v^2-0.75)$. По классификации Больца группа автоморфизмов S_2 изоморфна $\mathbb{D}_2$. Множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ имеет один класс эквивалентности, представленный отображением

$$f(w,z) = \left(\frac{\sqrt{i}(z^2-i)}{8z^3}w, \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z}\right)\right).$$

2. Случай $|\,\mathrm{Aut}(S_3)| = 32$. Поверхность S_3 имеет вид $w^2 = z^8 - 1$. При этом возникает два вида поверхностей S_2, представленных указанными ниже уравнениями.

2a. Уравнение поверхности S_2 имеет вид $u^2 = v(v^4-1)$. Это кривая Больца рода 2 с максимально возможной группой автоморфизмов $|\,\mathrm{Aut}(S_2)| = 48$. В этом случае множество $\mathrm{Hol}(S_3 S_2)$ состоит из одного класса эквивалентности и представляется отображением $f(w,z) = (zw, z^2)$.

2b. Уравнение поверхности S_2 имеет вид $u^2 = (v^2-1)(v^4-v^2+0.125)$. Это кривая с группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_2$. При этом имеется единственный класс эквивалентности множества $\mathrm{Hol}(S_3 S_2)$, представленный отображением

$$f(w,z) = \left(\frac{z^2-\varepsilon^2}{8z^3\varepsilon^3}w, \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{z}\right)\right),$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{16}}$.

3. Случай $|\,\mathrm{Aut}(S_3)| = 24$. Поверхности S_3 и S_2 задаются уравнениями $w^2 = z(z^6-1)$ и $u^2 = v(v^2+3)(v^2+4)$ соответственно. В силу [21] $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_4$. Множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из одного класса эквивалентности, порожденного отображением

$$f(w,z) = \left(\frac{z^2+1}{z^3}w, z - \frac{1}{z}\right).$$

4. Случай $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_{14}$. Голоморфных отображений S_3 на S_2 не существует.

5. Случай $|\,\mathrm{Aut}(S_3)| = 16$. Поверхность S_3 представляется уравнением $w^2 = z^8 + az^4 + 1$, где $a \neq 0, \pm 2, \pm 14$. Для уравнения римановой поверхности S_2 в этой ситуации возникает три подслучая. В каждом из них множество голоморфных отображений $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из одного класса эквивалентности.

5a. Поверхность S_2 задается уравнением $u^2 = v(v^4+av^2+1)$, а отображение f имеет вид $f(w,z) = (zw, z^2)$. В силу [20, 21] при $a \neq \pm\frac{10}{3}$ будет $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_4$. При $a = \pm\frac{10}{3}$ имеем $|\,\mathrm{Aut}(S_2)| = 24$.

5b. Уравнение поверхности S_2 в данном случае запишется как

$$u^2 = (v^2-1)\left(v^4 - v^2 + \frac{a+2}{16}\right), \quad \text{где } a \neq 0, \pm 2, \pm 14.$$

Отображение f задается формулой

$$(u,v)=f(w,z)=\left(\frac{z^2-1}{8z^3}w,\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right).$$

Вычисляя диэдральные инварианты поверхности S_2 по алгоритму, предложенному в [24], убеждаемся, что при $a\neq -34\pm16\sqrt{5}, 14(128\pm31\sqrt{17})$ имеет место равенство $\mathrm{Aut}(S_2)=\mathbb{D}_2$. При $a=-34\pm16\sqrt{5}$ уравнение поверхности S_2 переписывается в виде $Y^2=X(X^4+X^2+t)$, где $t=1/(2436\pm1088\sqrt{5})$, и в силу [21] имеет группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S_2)=\mathbb{D}_4$. При $a=14(128\pm31\sqrt{17})$ уравнение поверхности S_2 переписывается в виде $Y^2=X^6+sX^3+1$, где $s=2(217\mp54\sqrt{17})$. В этом случае $\mathrm{Aut}(S_2)=\mathbb{D}_6$.

5c. В этом случае уравнение поверхности S_2 имеет вид

$$u^2=(v^2-1)\left(v^4-v^2+\frac{2-a}{16}\right),\quad \text{где } a\neq 0,\pm2,\pm14.$$

Отображение f представляется как

$$(u,v)=f(w,z)=\left(\frac{\sqrt{i}(z^2-i)}{8z^3}w,\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{i}}+\frac{\sqrt{i}}{z}\right)\right).$$

Аналогично предыдущему при $a\neq 34\pm16\sqrt{5}, -14(128\pm31\sqrt{17})$ имеем $\mathrm{Aut}(S_2)=\mathbb{D}_2$. В оставшихся случаях $\mathrm{Aut}(S_2)$ — это $\mathbb{D}_4$ и $\mathbb{D}_6$ соответственно.

6. Случай $\mathrm{Aut}(S_3)=\mathbb{D}_6$. Поверхность S_3 описывается уравнением $w^2=z(z^6+az^3+1)$, где $a\neq 0,\pm2$. При этом S_2 имеет вид $u^2=(v^2-4)(v^3-3v+a)$, а ее группа автоморфизмов изоморфна $\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{D}_2$. Представитель единственного класса эквивалентности $\mathrm{Hol}(S_3,S_2)$ задается отображением

$$f(w,z)=\left(\frac{z^2-1}{z^3}w,z+\frac{1}{z}\right).$$

Отметим, что случай $\mathrm{Aut}(S_2)=\mathbb{D}_2$ в [13] не был рассмотрен.

7. Случай $\mathrm{Aut}(S_3)=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$. Поверхность S_3 описывается уравнением $w^2=z(z^2-1)(z^4+az^2+1)$, где $a\neq\pm2$. В этом случае S_2 имеет вид $u^2=v(v^2+4)(v^2+a+2)$. Единственный класс эквивалентности $\mathrm{Hol}(S_3,S_2)$ представлен отображением $f(w,z)=\left(\frac{z^2+1}{z^3}w,z-\frac{1}{z}\right)$.

По классификации Больца при $a\neq -6,-\frac{14}{9},34$ группа автоморфизмов S_2 изоморфна $\mathbb{D}_4$. При $a=-6$ поверхность S_2 переписывается в виде $\hat{u}^2=\hat{v}(\hat{v}^4-1)$, где $\hat{u}=u/(4\sqrt{2})$, $\hat{v}=v/2$, и имеет 48 автоморфизмов. В тоже время поверхность S_3 задается уравнением $\widehat{w}^2=\hat{z}^8-1$, где $\widehat{w}=\frac{4\sqrt{i}}{(i-z)^4}w$ и $\hat{z}=\frac{i+z}{i-z}$. Это случай 2a, рассмотренный выше.

Если $a=34$, то уравнение поверхности S_2 имеет вид $u^2=v(v^2+4)(v^2+36)$. Эта кривая имеет 24 автоморфизма.

Если $a=-\frac{14}{9}$, то бирациональное преобразование $(w,z)=\left(W\frac{2\sqrt{a+2}}{(Z-1)^2},\frac{Z+1}{Z-1}\right)$ приводит кривую $w^2=z(z^2-1)(z^4+az^2+1)$ к виду

$$W^2=Z(Z^2-1)\left(Z^4+\frac{2(6-a)}{(a+2)}Z^2+1\right),$$

где $\frac{2(6-a)}{(a+2)}=34$. Это уже разобранный случай.

8. Случай $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1)$, $a \neq \pm b$, $a, b \neq \pm 2$. В этой ситуации имеется три различные возможности для уравнения поверхности S_2.

8a. Уравнение поверхности S_2 имеет вид

$$u^2 = (v^2 - 1)\left(v^2 - \frac{a-2}{a+2}\right)\left(v^2 - \frac{b-2}{b+2}\right).$$

Голоморфное отображение $f : S_3 \to S_2$ представимо формулой

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{8z}{k(z^2-1)^3}w, \frac{z^2+1}{z^2-1}\right),$$

где $k = \sqrt{(a+2)(b+2)}$.

8b. Риманова поверхность S_2 представима в виде

$$u^2 = (v^2 - 1)\left(v^2 - \frac{2-a}{4}\right)\left(v^2 - \frac{2-b}{4}\right).$$

Отображение $g : S_3 \to S_2$ записывается как

$$(u, v) = g(w, z) = \left(\frac{z^2-1}{8z^3}w, \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right).$$

8c. Поверхность S_2 задается уравнением

$$u^2 = (v^2 - 1)\left(v^2 - \frac{a+2}{4}\right)\left(v^2 - \frac{b+2}{4}\right).$$

Отображение $h : S_3 \to S_2$ записывается как

$$(u, v) = h(w, z) = \left(\frac{i(z^2+1)}{8z^3}w, \frac{i}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

9. Случай $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_4$. Голоморфных отображений S_3 на S_2 не существует.

10. Случай $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{D}_2$. Поверхность S_3 задается следующим уравнением общего вида: $w^2 = (z^2-1)(z^6+az^4+bz^2+c)$. При этом уравнение поверхности S_2 имеет вид $u^2 = v(v-1)(v^3 + av^2 + bv + c)$. Множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ имеет единственный класс эквивалентности, содержащий отображение $f(w, z) = (zw, z^2)$. По классификации Больца [22] группа автоморфизмов поверхности S_2 зависит от выбора параметров a, b и c и, как будет показано ниже, удовлетворяет неравенству $|\mathrm{Aut}(S_2)| \leq 12$.

11. Случай $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2$. Голоморфных отображений S_3 на S_2 не существует.

5. Полная классификация голоморфных отображений

В данном разделе будет дано полное описание голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два. Для каждой пары римановых поверхностей S_3 и S_2, указанных в предыдущем разделе, рассмотрим базисное отображение $f : S_3 \to S_2$ из каждого класса эквивалентности. Затем, домножая f на подходящие автоморфизмы поверхности S_3 (или S_2), получим полный список голоморфных отображений.

1a. Случай $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{S}_4$ и $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_4$. В этом случае поверхности S_3 и S_2 задаются уравнениями

$$S_3 : w^2 = z^8 + 14z^4 + 1, \quad S_2 : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + 1).$$

Согласно предыдущему разделу множество голоморфных отображений $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из единственного класса эквивалентности, представителем которого служит отображение $(u, v) = f(w, z) = \big(\frac{2iz}{(z^2+1)^3} w, \frac{z^2-1}{z^2+1}\big)$.

Покажем, что все автоморфизмы S_2 поднимаются по отображению f до автоморфизмов S_3. Действительно, группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S_2)$ изоморфна $\mathbb{D}_4 = \langle \alpha, \beta : \alpha^4 = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 1\rangle$, где $\alpha : (u, v) \to \big(-\frac{iu}{v^3}, \frac{1}{v}\big)$, $\beta : (u, v) \to (u, -v)$. В качестве поднятий α и β на поверхности S_3 рассмотрим автоморфизмы $\tilde{\alpha} : (w, z) \to (w, iz)$, $\tilde{\beta} : (w, z) \to \big(\frac{w}{z^4}, \frac{1}{z}\big)$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha \circ f$ и $f \circ \tilde{\beta} = \beta \circ f$. Другими словами, автоморфизмы α и β римановой поверхности S_2 поднимаются до автоморфизмов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ римановой поверхности S_3 соответственно.

Напомним [24], что полная группа автоморфизмов S_3 изоморфна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{S}_4$, где группы $\mathbb{Z}_2 = \langle \tilde{\tau} : \tilde{\tau}^2 = 1\rangle$ и $\mathbb{S}_4 = \langle \tilde{\alpha}^4 = \tilde{\gamma}^3 = (\tilde{\alpha}\tilde{\gamma})^2 = 1\rangle$ порождаются гиперэллиптической инволюцией $\tilde{\tau} : (w, z) \to (-w, z)$ и отображениями $\tilde{\alpha} : (w, z) \to (w, iz)$ и $\tilde{\gamma} : (w, z) \to \big(-\frac{4}{(z+i)^4} w, \frac{i-z}{i+z}\big)$.

По построению имеем $f \circ \gamma_f = f$, где $\gamma_f(w, z) = (-w, -z)$ — накрывающая инволюция отображения $f : S_3 \to S_2$. Заметим, что $\gamma_f = \tilde{\alpha}^2\tilde{\tau}$. Для любых двух автоморфизмов $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(S_3)$ из равенства $f \circ \alpha = f \circ \beta$ следует, что либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha = \gamma_f \circ \beta$. Отсюда полный список элементов множества $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ имеет вид $\{f \circ s, s \in \mathscr{S}\}$, где $\mathscr{S} = \{\tilde{\alpha}^k, \tilde{\gamma}\tilde{\alpha}^3\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}^k, \tilde{\alpha}^l\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}^k\}_{k,l=0,1,2,3}$ — шрейеровская система представителей классов смежности группы $\mathrm{Aut}(S_3)$ по подгруппе $\mathbb{Z}_2 = \langle \gamma_f\rangle$. Это множество состоит из 24 элементов.

Таким образом, в рассматриваемом случае $|\mathrm{Hol}(S_3, S_2)| = 24$.

1b. Случай $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{S}_4$ и $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_2$. В данном случае поверхности S_3 и S_2 представлены уравнениями

$$S_3 : w^2 = z^8 + 14z^4 + 1, \quad S_2 : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 - 0.75).$$

По предыдущему разделу единственный класс эквивалентности множества $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ представлен отображением

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{\sqrt{i}(z^2 - i)}{8z^3} w, \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z}\right)\right).$$

В этом случае группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S_3)$ та же, что и в предыдущем пункте, а $\mathrm{Aut}(S_2)$ порождается двумя инволюциями $\tau : (u, v) \to (-u, v)$ и $\sigma : (u, v) \to (u, -v)$. Каждая из указанных инволюций, очевидно, поднимается до автоморфизмов $\tilde{\tau}$ и $\tilde{\sigma}$ поверхности S_3, где $\tilde{\tau} : (w, z) \to (-w, z)$ и $\tilde{\sigma} : (w, z) \to (-w, -z)$. Заметим, что $f \circ \gamma_f = f$, где $\gamma_f : (w, z) \to \big(\frac{iw}{z^6}, \frac{i}{z}\big)$. При этом $\gamma_f = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$, где $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ те же, что и выше.

Аналогично предыдущему заключаем, что

$$\mathrm{Hol}(S_3, S_2) = \{f\tilde{\alpha}^k, f\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}^3\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}^k, f\tilde{\alpha}^l\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}^k\}_{k,l=0,1,2,3}.$$

Это множество содержит 24 голоморфных отображения S_3 на S_2.

2a. Случай $|\operatorname{Aut}(S_3)| = 32$ и $|\operatorname{Aut}(S_2)| = 48$. В рассматриваемом случае поверхности S_3 и S_2 задаются уравнениями

$$S_3 : w^2 = z^8 - 1, \quad S_2 : u^2 = v(v^4 - 1).$$

Множество $\operatorname{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из одного класса эквивалентности, представленного отображением

$$(u, v) = f(w, z) = (zw, z^2).$$

Группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}(S_3)$ порождена преобразованиями $\tilde{\alpha} : (w, z) \to (w, \sqrt{i}z), \tilde{\beta} : (w, z) \to \left(\frac{iw}{z^4}, \frac{1}{z}\right)$ и гиперэллиптической инволюцией $\tilde{\tau} : (w, z) \to (-w, z)$.

Непосредственно убеждаемся, что автоморфизмы $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ и $\tilde{\tau}$ поверхности S_3 опускаются по отображению f до автоморфизмов $\alpha : (u, v) \to (\sqrt{i}u, iv)$, $\beta : (u, v) \to \left(\frac{iu}{v^3}, \frac{1}{v}\right)$ и $\tau : (u, v) \to (-u, v)$. При этом α, β и τ порождают подгруппу $\mathbb{D}_8$ группы $\operatorname{Aut}(S_2)$. Заметим, что $|\operatorname{Aut}(S_2) : \mathbb{D}_8| = 3$. В данном случае поверхность S_2 имеет максимально возможную группу автоморфизмов $|\operatorname{Aut}(S_2)| = 48$. Поскольку $\operatorname{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из одного класса эквивалентности, а все автоморфизмы S_3 опускаются по отображению f до автоморфизмов S_2, имеем

$$\begin{aligned}|\operatorname{Hol}(S_3, S_2)| &= |\{\alpha \circ f \circ \beta : \alpha \in \operatorname{Aut}(S_2), \beta \in \operatorname{Aut}(S_3)\}| \\ &= |\{\alpha \circ f : \alpha \in \operatorname{Aut}(S_2)\}| = |\operatorname{Aut}(S_2)| = 48.\end{aligned}$$

2b. Случай $|\operatorname{Aut}(S_3)| = 32$ и $\operatorname{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_2$. Поверхности S_3 и S_2, соответствующие этому случаю, заданы уравнениями

$$S_3 : w^2 = z^8 - 1, \quad S_2 : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + 0.125).$$

Единственный класс эквивалентности множества $\operatorname{Hol}(S_3, S_2)$ представлен отображением

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{z^2 - \varepsilon^2}{8z^3\varepsilon^3}w, \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{z}\right)\right), \quad \text{где } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{16}}.$$

Группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}(S_3)$ та же, что и в предыдущем пункте. Отметим, что $\operatorname{Aut}(S_2)$ порождается инволюциями $\tau : (u, v) \to (-u, v)$ и $\sigma : (u, v) \to (u, -v)$. Они соответственно поднимаются до автоморфизмов $\tilde{\tau} : (w, z) \to (-w, z)$ и $\tilde{\sigma} : (w, z) \to (-w, -z)$ поверхности S_3. Заметим, что $f \circ \gamma_f = f$, где $\gamma_f : (w, z) \to \left(\frac{-iw}{z^4}, \frac{\sqrt{i}}{z}\right)$. Имеем $\gamma_f = \tilde{\tau}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$, где $\tilde{\tau}, \tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ те же, что в п. 2a.

Можно заключить, что полный список элементов множества $\operatorname{Hol}(S_3, S_2)$ имеет вид $\{f \circ s, s \in \mathscr{S}\}$, где $\mathscr{S}$ — произвольная система представителей классов смежности группы $\operatorname{Aut}(S_3)$ по подгруппе $\mathbb{Z}_2 = \langle\gamma_f\rangle$.

Следовательно, $|\operatorname{Hol}(S_3, S_2)| = |\{f \circ \beta : \beta \in \mathscr{S}\}| = |\operatorname{Aut}(S_3)/\langle\gamma_f\rangle| = 16$.

3. Случай $|\operatorname{Aut}(S_3)| = 24$ и $\operatorname{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_4$. Рассматриваемые римановы поверхности представляются уравнениями

$$S_3 : w^2 = z(z^6 - 1), \quad S_2 : u^2 = v(v^2 + 3)(v^2 + 4).$$

Множество $\operatorname{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из одного класса эквивалентности, порожденного отображением

$$f(w, z) = \left(\frac{z^2 + 1}{z^3}w, z - \frac{1}{z}\right).$$

В данном случае группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S_3)$ порождена двумя элементами $\tilde{\alpha}:(w,z)\to(\varepsilon_{12}w,\varepsilon_6 z)$ и $\tilde{\beta}:(w,z)\to\left(\frac{iw}{z^4},\frac{1}{z}\right)$, где $\varepsilon_k=e^{\frac{2\pi i}{k}}$.

Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S_2)$ имеет порождающие $\alpha:(u,v)\to(iu,-v)$ и $\beta:(u,v)\to\left(\frac{(12)^{\frac{3}{4}}u}{v^3},\frac{\sqrt{12}}{v}\right)$. Заметим, что α поднимается по отображению f до автоморфизма S_3, равного $\tilde{\alpha}^9$, а автоморфизм β не поднимается на S_3. В свою очередь, автоморфизм третьего порядка $\tilde{\alpha}^4$ не опускается до автоморфизма поверхности S_2, поскольку $\mathrm{Aut}(S_2)$ содержит элементы только четных порядков.

Накрывающая инволюция отображения f имеет вид $\gamma_f:(w,z)\to\left(-\frac{w}{z^4},-\frac{1}{z}\right)$. Так как $\gamma_f=\tilde{\alpha}^3\tilde{\beta}$, в качестве шрейеровской системы представителей смежных классов $\mathrm{Aut}(S_3)$ по подгруппе $\langle\gamma_f\rangle$ можно выбрать множество $\mathscr{S}=\{\tilde{\alpha}^k\}_{k=0,1,\ldots,11}$. В конечном итоге получим, что семейство голоморфных отображений записывается в виде $\mathrm{Hol}(S_3,S_2)=\{\beta^j\circ f\tilde{\alpha}^k\}_{j=0,1,\,k=0,1,\ldots,11}$. Это множество содержит 24 элемента.

4. Случай $\mathrm{Aut}(S_3)=\mathbb{Z}_{14}$ не реализуется.

5a. Случай $|\mathrm{Aut}(S_3)|=16$ и $\mathrm{Aut}(S_2)=\mathbb{D}_4$, $|\mathrm{Aut}(S_2)|=24$. Согласно разд. 4 уравнения римановых поверхностей имеют вид

$$S_3: w^2=z^8+az^4+1,\quad S_2: u^2=v(v^4+av^2+1).$$

При этом единственный класс эквивалентности голоморфных отображений S_3 на S_2 представлен отображением

$$(u,v)=f(w,z)=(zw,z^2).$$

В данном случае группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S_3)$ порождена элементами $\tilde{\alpha}:(w,z)\to(w,iz)$, $\tilde{\beta}:(w,z)\to\left(\frac{w}{z^4},\frac{1}{z}\right)$ и $\tilde{\tau}:(w,z)\to(-w,z)$. Рассмотрим автоморфизмы $\alpha:(u,v)\to(iu,-v)$, $\beta:(u,v)\to\left(\frac{u}{v^3},\frac{1}{v}\right)$ и $\tau:(u,v)\to(-u,v)$ римановой поверхности S_2. Заметим, что $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\tau}$ опускаются по отображению f на S_2 до автоморфизмов α, β и τ соответственно.

Следовательно, множество голоморфных функций $\mathrm{Hol}(S_3,S_2)$ представимо следующим образом:

$$\mathrm{Hol}(S_3,S_2)=\{\alpha\circ f,\alpha\in\mathrm{Aut}(S_2)\}.$$

Общее количество отображений равно числу элементов группы $\mathrm{Aut}(S_2)$. Так как порядок $\mathrm{Aut}(S_2)$ равен 8 при $a\neq\pm\frac{10}{3}$ и равен 24 при $a=\pm\frac{10}{3}$, имеем соответственно $|\mathrm{Hol}(S_3,S_2)|=8$ и $|\mathrm{Hol}(S_3,S_2)|=24$. В последнем случае при $a=-\frac{10}{3}$ особые точки орбифолда O_2 образуют правильный мёбиусов шестиугольник $\left\{-\sqrt{3},-\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3},\infty\right\}$. Отметим, что критическими значениями отображения $\hat{f}:z\to z^2$ будут точки 0 и ∞, являющиеся противолежащими вершинами указанного шестиугольника. Равенство $a=\frac{10}{3}$ приводит к аналогичной ситуации.

5b. Случай $|\mathrm{Aut}(S_3)|=16$ и $\mathrm{Aut}(S_2)=\mathbb{D}_2,\mathbb{D}_4,\mathbb{D}_6$. В этом случае

$$S_3: w^2=z^8+az^4+1,\quad S_2: u^2=(v^2-1)\left(v^4-v^2+\frac{a+2}{16}\right),$$

$$(u,v)=f(w,z)=\left(\frac{z^2-1}{8z^3}w,\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right).$$

Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S_3)$ порождена элементами $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ и $\tilde{\tau}$ теми же, что и в предыдущем случае. Пусть $a \neq -34 \pm 16\sqrt{5}, 14(128 \pm 31\sqrt{17})$. Тогда $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_2$ порождается элементами $\alpha : (u, v) \to (u, -v)$ и $\tau : (u, v) \to (-u, v)$, которые поднимаются до автоморфизмов $\tilde{\tau}\tilde{\alpha}^2$ и $\tilde{\tau}$ соответственно. Накрывающая инволюция находится из соотношения $f \circ \gamma_f = f$ и имеет вид $\gamma_f : (w, z) \to \big(-\frac{w}{z^4}, \frac{1}{z}\big)$. При этом верно равенство $\gamma_f = \tilde{\tau}\tilde{\beta}$. В качестве шрейеровской системы представителей классов смежности $\mathrm{Aut}(S_3)$ по подгруппе $\langle \gamma_f \rangle$ выберем множество $\mathscr{S} = \{\tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j\}_{j=0,1,\, k=0,1,2,3}$. В результате получим, что множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2) = \{f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j\}_{j=0,1,\, k=0,1,2,3}$ состоит из восьми элементов.

Предположим теперь, что $a = -34 \pm 16\sqrt{5}$. Как отмечено в разд. 4, при указанном выборе параметра $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_4$ порождается автоморфизмами вида $\alpha : (u, v) \to (u, -v)$ и $\phi : (u, v) \to \big(\frac{\sqrt{2 \mp \sqrt{5}}}{v^3} u, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2v}\big)$. Нетрудно проверить, что $\phi^2 = \tau$ — гиперэллиптическая инволюция поверхности S_2. При этом ϕ не поднимается по отображению f до автоморфизма поверхности S_3. Множество голоморфных отображений S_3 на S_2 имеет структуру $\mathrm{Hol}(S_3, S_2) = \{f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j,\ \phi \circ f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j\}_{j=0,1,\, k=0,1,2,3}$ и состоит из 16 элементов.

Пусть теперь $a = 14(128 + 31\sqrt{17})$. Случай $a = 14(128 - 31\sqrt{17})$ рассматривается аналогичным образом. Бирациональное преобразование $u = \frac{Y\sqrt{771 + 187\sqrt{17}}}{(X+1)^3}$, $v = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{17}}{4}} \frac{X-1}{X+1}$ позволяет представить уравнение римановой поверхности S_2 в виде $Y^2 = X^6 + sX^3 + 1$, где $s = 2(217 - 54\sqrt{17})$. По классификации Больца $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_6$. Автоморфизм третьего порядка $(Y, X) \to \big(Y, \exp\big(\frac{2\pi i}{3}\big) X\big)$ в переменных (u, v) имеет вид

$$\gamma : (u, v) \to \left(-\frac{16\sqrt{95 + 23\sqrt{17}}u}{(\sqrt{5 + \sqrt{17}} + 2iv)^3}, \frac{3i\sqrt{5 + \sqrt{17}} + 2v}{2 + i\sqrt{10 - 2\sqrt{17}}v} \right).$$

Группа $\mathrm{Aut}(S_2)$ в этом случае порождается указанными выше инволюциями α, τ и дополнительным автоморфизмом γ.

Заметим, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S_3)$ имеет порядок 16 и, следовательно, не содержит элементов нечетного порядка. Элементы γ и γ^2 не поднимаются до автоморфизмов поверхности S_3. Автоморфизмы α и τ, как и выше, поднимаются до автоморфизмов $\tilde{\tau}\tilde{\alpha}^2$ и $\tilde{\tau}$ соответственно. Аналогично случаю 2a заключаем, что множество всех голоморфных отображений имеет вид $\mathrm{Hol}(S_3, S_2) = \{\gamma^l \circ f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j\}_{j=0,1,\, k=0,1,2,3,\, l=0,1,2}$ и состоит из 24 элементов.

5c. Случай $|\mathrm{Aut}(S_3)| = 16$ и $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_6$. В этом случае

$$S_3 : w^2 = z^8 + az^4 + 1, \quad S_2 : u^2 = (v^2 - 1)\left(v^4 - v^2 + \frac{2 - a}{16}\right).$$

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{\sqrt{i}(z^2 - i)}{8z^3} w, \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z} \right) \right).$$

Группы автоморфизмов S_3 и S_2 имеют то же аналитическое строение, что и в п. 5b. Порождающие α и τ группы $\mathrm{Aut}(S_2)$ по-прежнему поднимаются по отображению f до автоморфизмов $\tilde{\tau}\tilde{\alpha}^2$ и $\tilde{\tau}$ соответственно. Однако накрывающая инволюция отображения f в этом случае имеет вид $\gamma_f : (w, z) \to \big(\frac{w}{z^4}, \frac{i}{z}\big)$.

Как и в случае 5b, при $a = 34 \mp 16\sqrt{5}$ группа автоморфизмов S_2 изоморфна $\mathbb{D}_4$ и порождается элементами вида $\alpha : (u, v) \to (u, -v)$ и $\phi : (u, v) \to \big(\frac{\sqrt{2 \mp \sqrt{5}}}{v^3} u, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2v}\big)$.

При этом $\mathrm{Hol}(S_3, S_2) = \{f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j,\, \phi \circ f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j\}_{j=0,1,\,k=0,1,2,3}$ состоит из 16 элементов.

При $a \neq -14(128 \pm 31\sqrt{17})$ шрейеровская система представителей полностью совпадает с аналогичным множеством из п. 5b: $\mathscr{S} = \{\tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j\}_{j=0,1,\,k=0,1,2,3}$. В связи с этим множество голоморфных отображений может быть записано как $\mathrm{Hol}(S_3, S_2) = \{f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j\}_{j=0,1,\,k=0,1,2,3}$ и состоит из восьми элементов.

Аналогично предыдущему при $a = -14(128 \pm 31\sqrt{17})$ множество голоморфных отображений имеет вид $\mathrm{Hol}(S_3, S_2) = \{\gamma^l \circ f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j\}_{j=0,1,\,k=0,1,2,3,\,l=0,1,2}$, где γ — дополнительный автоморфизм третьего порядка. Отсюда $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из 24 элементов.

Замечание 1. Основное отличие случаев 5b и 5c состоит в том, что образы $S_2 = f(S_3)$ фиксированной поверхности S_3 при соответствующих отображениях f конформно не эквивалентны.

6. Случай $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{D}_6$ и $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}_2$. В этом случае

$$S_3 : w^2 = z(z^6 + az^3 + 1), \quad S_2 : u^2 = (v^2 - 4)(v^3 - 3v + a),$$

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{z^2 - 1}{z^3} w, z + \frac{1}{z}\right).$$

По классификации Больца [22] при $a \neq \pm 322, \pm 22\sqrt{2}i$ и $\pm\frac{7i}{2\sqrt{2}}$ риманова поверхность S_2 не содержит нетривиальных автоморфизмов, отличных от гиперэллиптической инволюции. При $a = \pm 322, \pm 22\sqrt{2}i, \pm\frac{7i}{2\sqrt{2}}$ уравнение поверхности S_2 приводится к виду $y^2 = x^6 + a_1x^4 + a_2x^2 + 1$ и S_2 имеет дополнительный автоморфизм второго порядка $\delta : (y, x) \to (y, -x)$. Вычисляя диэдральные инварианты $u_1 = a_1^3 + a_2^3$, $u_2 = 2a_1a_2$ указанной кривой, убеждаемся, что в этом случае $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_2$. Группа $\mathrm{Aut}(S_3)$ порождена элементами $\tilde{\alpha} : (w, z) \to (\varepsilon_6 w, \varepsilon_3 z)$ и $\tilde{\beta} : (w, z) \to \left(\frac{w}{z^4}, \frac{1}{z}\right)$.

Если $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{Z}_2$, то единственным нетривиальным элементом группы $\mathrm{Aut}(S_2)$ является гиперэллиптическая инволюция $\tau : (u, v) \to (-u, v)$, которая поднимается до гиперэллиптической инволюции $\tilde{\tau} = \tilde{\alpha}^3$ поверхности S_3. При этом $\gamma_f = \tilde{\alpha}^3\tilde{\beta}$ и имеет место разложение $\mathrm{Aut}(S_3) = \bigcup\limits_{k=0}^{5} \langle\gamma_f\rangle\tilde{\alpha}^k$. Следовательно, множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2) = \{f \circ \tilde{\alpha}^k\}_{k=0,1,\dots,5}$ состоит из шести элементов.

В случае $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_2$ имеем $\mathrm{Hol}(S_3, S_2) = \{f \circ \tilde{\alpha}^k,\, \delta \circ f \circ \tilde{\alpha}^k\}_{k=0,1,\dots,5}$. Это множество содержит 12 элементов.

7. Случай $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ и $\mathrm{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_4$, $|\mathrm{Aut}(S_2)| = 24$. В этом случае

$$S_3 : w^2 = z(z^2 - 1)(z^4 + az^2 + 1), \quad S_2 : u^2 = v(v^2 + 4)(v^2 + a + 2).$$

Единственный класс эквивалентности $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ представлен отображением

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{z^2 + 1}{z^3} w, z - \frac{1}{z}\right).$$

Группа $\mathrm{Aut}(S_3)$ порождена элементами $\tilde{\alpha} : (w, z) \to (-iw, -z)$ и $\tilde{\beta} : (w, z) \to \left(\frac{iw}{z^4}, \frac{1}{z}\right)$. Непосредственно убеждаемся, что $f \circ \gamma_f = f$, где $\gamma_f = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$. Порождающими элементами группы $\mathrm{Aut}(S_2)$ являются автоморфизмы $\alpha : (u, v) \to (iu, -v)$ и $\beta : (u, v) \to \left(\frac{\sqrt{8}(a+2)^{\frac{3}{4}} u}{v^3}, \frac{2\sqrt{a+2}}{v}\right)$.

Поскольку группа $\mathrm{Aut}(S_3)$ абелева, накрывающая инволюция γ_f отображения f перестановочна со всеми ее элементами. Это означает, что все элементы $\mathrm{Aut}(S_3)$ опускаются до автоморфизмов поверхности S_2.

При этом α поднимается по отображению f до автоморфизма $\tilde{\alpha}$, а β не имеет поднятия на S_3. По аналогии со случаем 5 имеет место разложение $\mathrm{Aut}(S_3) = \bigcup\limits_{k=0}^{3} \langle\gamma_f\rangle\tilde{\alpha}^k$. Следовательно, множество голоморфных отображений S_3 на S_2 имеет вид $\mathrm{Hol}(S_3, S_2) = \{\theta \circ f, \theta \in \mathrm{Aut}(S_2)\}$, откуда $|\,\mathrm{Hol}(S_3, S_2)| = |\,\mathrm{Aut}(S_2)|$. В силу разд. 4 при $a \neq -6, -\frac{14}{9}, 34$ имеем $|\,\mathrm{Aut}(S_2)| = 8$. Следовательно, $|\,\mathrm{Hol}(S_3, S_2)| = 8$.

При $a = -\frac{14}{9}, 34$ согласно разд. 4 $|\,\mathrm{Aut}(S_2)| = 24$. В результате получим $|\,\mathrm{Hol}(S_3, S_2)| = |\,\mathrm{Aut}(S_2)| = 24$. Заметим, что оба случая бирационально эквивалентны друг другу. Если $a = 34$, то уравнение поверхности S_2 имеет вид $u^2 = v(v^2 + 4)(v^2 + 36)$. Особыми точками орбифолда O_2 будут точки $-6i, -2i, 0, 2i, 6i, \infty$. Они образуют правильный мёбиусов шестиугольник. Критическими значениями отображения $v = \hat{f}(z) = z - \frac{1}{z}$ являются точки $\pm 2i$. Заметим, что они не являются смежными или противолежащими вершинами шестиугольника. Следовательно, по предложению 1 отображение $f : S_3 \to S_2$ не эквивалентно соответствующему отображению из п. 5a.

При $a = -6$ уравнение поверхности S_2 представляет из себя кривую Больца с группой автоморфизмов $|\,\mathrm{Aut}(S_2)| = 48$. Уравнение поверхности S_3 имеет вид $w^2 = z(z^2-1)(z^4-6z^2+1)$ и бирациональным преобразованием $w = \widetilde{w}\frac{4\sqrt{i}}{(1+\tilde{z})^4}, z = i\frac{1-\tilde{z}}{1+\tilde{z}}$ приводится к уравнению $\widetilde{w}^2 = \tilde{z}^8 - 1$. Это случай 2a, уже рассмотренный выше.

8. Случай $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2^3$. В этом случае поверхность S_3 задается уравнением

$$S_3 : w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1), \quad a \neq \pm b,\ a, b \neq \pm 2,$$

и возникают следующие три типа голоморфных отображений:

(a) $f(w, z) = \big(\frac{8z}{k(z^2-1)^3}w, \frac{z^2+1}{z^2-1}\big)$, где $k = \sqrt{(a+2)(b+2)}$, $f : S_3 \to S_2$, а $S_2 : u^2 = (v^2 - 1)\big(v^2 - \frac{a-2}{a+2}\big)\big(v^2 - \frac{b-2}{b+2}\big)$;

(b) $g(w, z) = \big(\frac{z^2-1}{8z^3}w, \frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)\big)$, $g : S_3 \to S_2$, где $S_2 : u^2 = (v^2 - 1)\times \big(v^2 - \frac{2-a}{4}\big)\big(v^2 - \frac{2-b}{4}\big)$;

(c) $h(w, z) = \big(\frac{i(z^2+1)}{8z^3}w, \frac{i}{2}\big(z - \frac{1}{z}\big)\big)$, $h : S_3 \to S_2$, где $S_2 : u^2 = (v^2 - 1)\times \big(v^2 - \frac{2+a}{4}\big)\big(v^2 - \frac{2+b}{4}\big)$.

Из непосредственного вычисления диэдральных инвариантов по формулам, приведенным в [20], заключаем, что в общей ситуации образы $f(S_3)$, $g(S_3)$ и $h(S_3)$ являются попарно различными, т. е. конформно неэквивалентными римановыми поверхностями. Это, в частности, имеет место, если порядок группы автоморфизмов одной из римановых поверхностей $f(S_3)$, $g(S_3)$, $h(S_3)$ равен 48 или 24.

Ситуации, когда $f(S_3) = g(S_3) \neq h(S_3)$, $f(S_3) = h(S_3) \neq g(S_3)$ и $f(S_3) \neq g(S_3) = h(S_3)$, описаны в [13, леммы 2–4].

8a. Случай $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2^3$ и $S_2 = f(S_3)$. Как и в случае 7, группа автоморфизмов поверхности $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2^3$ абелева. Следовательно, все автоморфизмы поверхности S_3 опускаются до автоморфизмов поверхности S_2. Это позволяет заключить, что справедливо равенство $|\,\mathrm{Hol}(S_3, S_2)| = |\,\mathrm{Aut}(S_2)|$. Вычисляя диэдральные инварианты поверхности S_2, убеждаемся, что порядок ее группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S_2)$ может принимать значения, равные $4, 8, 12, 24$ и 48.

Рассмотрим случай наиболее богатой группы автоморфизмов $|\mathrm{Aut}(S_2)| = 48$. В силу сказанного выше (см. также [20]) это соответствует следующей системе уравнений на диэдральные инварианты $(u1, u2) = (-250, 50)$. Решая ее, находим четыре решения для параметров a и b. Ими будут пары

$$(a,b) = (\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}),\ (3/\sqrt{2}, \sqrt{2}),\ (-3/\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Во всех указанных случаях уравнение поверхности S_3 имеет вид $w^2 = z^8 + \frac{5}{\sqrt{2}}z^6 + 5z^4 + \frac{5}{\sqrt{2}}z^2 + 1$, а S_2 — кривая Больца с максимально возможной группой автоморфизмов. При этом $|\mathrm{Hol}(S_3, S_2)| = |\mathrm{Aut}(S_2)| = 48$. Заметим, что найденная поверхность S_3 отлична от поверхности S_3, рассмотренной в п. 2*a*. Действительно, в случае 2a поверхность S_3 обладает автоморфизмом $\tilde{\alpha}$ восьмого порядка, который опускается до автоморфизма α поверхности S_2, также имеющего восьмой порядок. В текущей ситуации на поверхности S_2 не существует автоморфизма восьмого порядка, который можно поднять на поверхность S_3. Этот факт непосредственно проверяется с использованием явного вида отображения $f : S_3 \to S_2$, описанного в п. 8a разд. 4. Таким образом, в рассматриваемом случае имеем $|\mathrm{Hol}(S_3, S_2)| = 48$.

Теперь рассмотрим случай $|\mathrm{Aut}(S_2)| = 24$. Ему соответствуют следующие уравнения на диэдральные инварианты: $(u_1, u_2) = (0, 0)$ и $(u_1, u_2) = (6750, 450)$. При разрешении первой системы получаем, что $a = \pm b$. В силу условий, наложенных выше на параметры a и b, это невозможно. Решая вторую систему уравнений при условии $a \neq \pm b$, получим, что допустимыми парами параметров являются

$$(a,b) = (4/\sqrt{3}, 7/2\sqrt{3}),\ (-4/\sqrt{3}, -7/2\sqrt{3}),\ (7/2\sqrt{3}, 4/\sqrt{3}),\ (-7/2\sqrt{3}, -4/\sqrt{3}).$$

При всех указанных параметрах уравнение поверхности S_3 приводится к виду

$$w^2 = z^8 + \frac{5\sqrt{3}}{2}z^6 + \frac{20}{\sqrt{3}}z^4 + \frac{5\sqrt{3}}{2}z^2 + 1.$$

При этом $|\mathrm{Hol}(S_3, S_2)| = 24$. Критическими значениями отображения $\hat{f} : z \to \frac{z^2+1}{z^2-1}$ служат точки ± 1. Они являются смежными вершинами правильного мёбиусова шестиугольника $\{\pm 1, \pm\sqrt{\frac{a-2}{a+2}}, \pm\sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\}$, образованного особыми точками орбифолда O_2. Следовательно, в силу предложения 1 указанный случай не эквивалентен случаям 5a и 7, рассмотренным выше.

В оставшихся случаях имеет место неравенство $|\mathrm{Aut}(S_2)| \leq 12$. Согласно теореме 1 из [13] множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из не более чем из двух классов эквивалентности. Следовательно, $|\mathrm{Hol}(S_3, S_2)| \leq 2|\mathrm{Aut}(S_2)| \leq 24$.

8b. Случай $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2^3$ и $S_2 = g(S_3)$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, заключаем, что $|\mathrm{Hol}(S_3, S_2)| = |\mathrm{Aut}(S_2)|$. Из вычисления диэдральных инвариантов следует, что S_2 является поверхностью с максимальной группой из 48 автоморфизмов тогда и только тогда, когда с точностью до перестановки a и b пара параметров (a, b) принадлежит множеству $\{(14 \pm 8\sqrt{2}, -66 \mp 48\sqrt{2}), (14 \pm 8\sqrt{2}, 14 \mp 8\sqrt{2})\}$. Если неупорядоченная пара $\{a, b\}$ совпадает с парой $\{14 \pm 8\sqrt{2}, 14 \mp 8\sqrt{2}\}$, то уравнение римановой поверхности S_3 приобретает вид $w^2 = z^8 + 28z^6 + 70z^4 + 28z^2 + 1$. Заменой переменных $w = \frac{8\sqrt{2}}{(x-\sqrt[4]{i})^4}y, z = \frac{x+\sqrt[4]{i}}{x-\sqrt[4]{i}}$

оно приводится к виду $y^2 = x^8 - 1$. Тем самым мы возвращаемся к случаю 2a, рассмотренному выше.

Если пара $\{a, b\}$ совпадает с парой $\{148\sqrt{2}, -66 + 48\sqrt{2}\}$, то замена переменных $w = \frac{16\sqrt{-7+5\sqrt{2}}}{(x-1)^4} y, z = \frac{x+1}{x-\sqrt[4]{i}}$ приводит уравнение кривой S_3 к виду $y^2 = x^8 + \frac{5}{\sqrt{2}}x^6 + 5x^4 + \frac{5}{\sqrt{2}}x^2 + 1$. Это случай 8a, разобранный в разд. 4.

В результате, как и в п. 8a, справедливо неравенство $|\operatorname{Hol}(S_3, S_2)| \le 24$. Надо отметить, что ситуация, когда $|\operatorname{Aut}(S_3)| = 24$, уже встречалась трижды. Это случаи 5a, 7 и 8a. Поэтому в силу леммы 2 она здесь не реализуется.

Следовательно, на порядок группы автоморфизмов поверхности S_2 имеет место оценка $|\operatorname{Aut}(S_2)| \le 12$.

8c. Случай $\operatorname{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2^3$ и $S_2 = h(S_3)$. Данный случай сводится к предыдущему заменой пары (a, b) парой $(-a, -b)$. При этом $|\operatorname{Hol}(S_3, S_2)| = |\operatorname{Aut}(S_2)| = 48$ тогда и только тогда, когда с точностью до перестановки a и b пара параметров (a, b) принадлежит множеству $\{(10 - 8\sqrt{2}, -70 + 48\sqrt{2}), (10 + 8\sqrt{2}, 10 - 8\sqrt{2}), (10 + 8\sqrt{2}, -70 - 48\sqrt{2})\}$. В противном случае выполняется неравенство $|\operatorname{Hol}(S_3, S_2)| = |\operatorname{Aut}(S_2)| \le 24$.

Рассмотрим ситуацию, когда среди поверхностей $f(S_3)$, $g(S_3)$ и $h(S_3)$ есть равные, т. е. конформно эквивалентные. Прежде всего исключим случай совпадения: $f(S_3) = g(S_3) = h(S_3)$. Предположение, что все три образа могут совпадать, и непосредственное вычисление диэдральных инвариантов (u_1, u_2) в этом случае приводят к тому, что поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = z^8 + 14z^4 + 1$. Это случай 2a, рассмотренный выше. Из рассмотрения пп. 8a–8c делаем следующий вывод: если одна из поверхностей имеет максимально возможную группу автоморфизмов или состоит из 24 автоморфизмов, то все они попарно различны. При этом если $S_2 = f(S_3) = g(S_3) \neq h(S_3)$, то имеет место оценка $|\operatorname{Hol}(S_3, S_2)| = 2|\operatorname{Aut}(S_2)| \le 2 \cdot 12 = 24$. Этот случай реализуется при выполнении равенства $(a + 2)(b + 2) = 16$. Аналогично при $S_2 = f(S_3) = h(S_3) \neq g(S_3)$ справедливо неравенство $|\operatorname{Hol}(S_3, S_2)| = 2|\operatorname{Aut}(S_2)| \le 2 \cdot 12 = 24$. Верхняя оценка достигается при $(a - 2)(b - 2) = 16$. Последняя логическая ситуация $S_2 = g(S_3) = h(S_3) \neq f(S_3)$ реализуется лишь для конечного набора параметров $\{a, b\}$. При этом по-прежнему справедлива оценка $|\operatorname{Hol}(S_3, S_2)| \le 24$.

9. Случай $\operatorname{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_4$ не реализуется.

10. Случай $\operatorname{Aut}(S_3) = \mathbb{D}_2$ и $\operatorname{Aut}(S_2) = \mathbb{Z}_2$. В этом случае поверхности S_3 и S_2 задаются уравнениями $S_3 : w^2 = (z^2 - 1)(z^6 + az^4 + bz^2 + c)$ и $S_2 : u^2 = v(v-1)(v^3 + av^2 + bv + c)$, где параметры a, b, c находятся в общем положении. Группа $\operatorname{Aut}(S_3)$ порождена двумя инволюциями $\tilde{\tau} : (w, z) \to (-w, z)$ (гиперэллиптическая инволюция) и $\tilde{\alpha} : (w, z) \to (w, -z)$. Отображение $f : S_3 \to S_2$ имеет вид $f : (w, z) \to (zw, z^2)$. Накрывающей инволюцией для отображения f является $\tilde{\alpha}$. В общем положении $\operatorname{Aut}(S_2) = \langle 1, \tau \rangle$, где $\tau : (u, v) \to (-u, v)$ является гиперэллиптической инволюцией S_2.

Поскольку группа $\operatorname{Aut}(S_3)$ абелева, все ее элементы опускаются по отображению f до автоморфизмов поверхности S_2. Отсюда $|\operatorname{Hol}(S_3, S_2)| = |\operatorname{Aut}(S_2)|$.

По лемме 1 с точностью до эквивалентности существует не более двух голоморфных отображений вида $f : S_3 \to S_2$, где $|\operatorname{Aut}(S_2)| = 48$. Аналогично по лемме 2 с точностью до эквивалентности существует не более трех голоморфных отображений вида $f : S_3 \to S_2$, где $|\operatorname{Aut}(S_2)| = 24$. Отметим, что ситуации, когда $|\operatorname{Aut}(S_2)| = 48$ или $|\operatorname{Aut}(S_2)| = 24$, — это случаи 2a, 8a и 5a, 7, 8a соответственно. Следовательно, $|\operatorname{Hol}(S_3, S_2)| = |\operatorname{Aut}(S_2)| \le 12$.

Таким образом, полная классификация всех голоморфных отображений из S_3 на S_2 может быть представлена с помощью следующей таблицы.

11. Случай $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2$ не реализуется.

Таблица. Число голоморфных отображений $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$

№	$\mathrm{Aut}(S_3)$	$\mathrm{Aut}(S_2)$	$\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$
1a	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{S}_4$	$\mathbb{D}_4$	24
1b	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{S}_4$	$\mathbb{D}_2$	24
2a	32	48	48
2b	32	$\mathbb{D}_2$	16
3	24	$\mathbb{D}_4$	24
4	$\mathbb{Z}_{14}$	Нет	Нет
5a	16	$\mathbb{D}_4$, 24	24
5b	16	$\mathbb{D}_2, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_6$	$8, 16, 24$
5c	16	$\mathbb{D}_2, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_6$	$8, 16, 24$
6	$\mathbb{D}_6$	$\mathbb{Z}_2, \mathbb{D}_2$	$6, 12$
7	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{D}_4, 24$	$8, 24$
8a	$\mathbb{Z}_2^3$	$48, 24, \leq 12$	$48, 24, \leq 24$
8b	$\mathbb{Z}_2^3$	≤ 12	≤ 24
8c	$\mathbb{Z}_2^3$	≤ 12	≤ 24
9	$\mathbb{Z}_4$	Нет	Нет
10	$\mathbb{D}_2$	≤ 12	≤ 12
11	$\mathbb{Z}_2$	Нет	Нет

6. Верхняя оценка числа голоморфных отображений

Явные верхние оценки числа голоморфных отображений $\mathrm{Hol}(S_g, S_{g'})$ получены в [2–7]. Однако до сих пор не было известным, являются ли полученные оценки точными. Вопрос оставался открытым даже для минимально возможного случая $g = 3$ и $g' = 2$. В этом разделе будет получена точная верхняя оценка числа элементов множества $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$.

Теорема 6.1. *Число элементов множества* $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ *не превосходит* 48. *Указанная оценка точная и достигается для пары римановых поверхностей* $S_3 : w^2 = z^8 - 1$ *и* $S_2 : u^2 = v(v^4 - 1)$. *При этом произвольное голоморфное отображение* S_3 *на* S_2 *представимо в виде суперпозиции* $\alpha \circ f \circ \beta$, *где* $f : (w, z) \to (u, v) = (zw, z^2)$, *а* α *и* β *— подходящие автоморфизмы римановых поверхностей* S_2 *и* S_3 *соответственно.*

Доказательство. Для доказательства найдем верхнюю оценку числа элементов множества $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$. В случаях 2a и 8a имеем $|\,\mathrm{Hol}(S_3, S_2)| = 48$. Во всех остальных случаях $|\,\mathrm{Hol}(S_3, S_2)| \leq 24$. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второй части воспользуемся описанием структуры множества $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$, данным в п. 2a разд. 5. В этом случае уравнения римановых поверхностей имеют вид $S_3 : w^2 = z^8 - 1$ и $S_2 : u^2 = v(v^4 - 1)$. При этом множество голоморфных отображений $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из одного класса эквивалентности и порождается отображением $f : (w, z) \to (u, v) = (zw, z^2)$.

Отсюда все голоморфные отображения из $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ представляются в виде $\alpha \circ f \circ \beta$, где α и β — подходящие автоморфизмы римановых поверхностей S_2 и S_3 соответственно.

Теорема 6.2. *Пусть S_3 и S_2 — произвольные римановы поверхности родов 3 и 2 соответственно. Предположим, что $|\mathrm{Hol}(S_3, S_2)| = 48$. Тогда S_2 — кривая Больца $u^2 = v(v^4 - 1)$, а S_3 задается одним из следующих уравнений:*

(i) $y^2 = x^8 - 1$,

(ii) $y^2 = x^8 + \frac{5}{\sqrt{2}}x^6 + 5x^4 + \frac{5}{\sqrt{2}}x^2 + 1$.

В случае (i) *имеем* $|\mathrm{Aut}(S_3)| = 32$.

В случае (ii) *справедливо равенство* $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Доказательство. В разобранных выше случаях 2a и 8a показано, что для римановых поверхностей, задаваемых уравнениями (i) и (ii), существует ровно 48 голоморфных отображений S_3 на кривую Больца S_2. В первом случае согласно [24] имеем $|\mathrm{Aut}(S_3)| = 32$, а во втором $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Критические значения отображений орбифолдов $\hat{f} : O_3 \to O_2$ в первом случае являются противолежащими вершинами правильного мёбиусова октаэдра, образованного особыми точками орбифолда O_2. Во втором случае они являются смежными вершинами указанного октаэдра. Следовательно, по предложению 1 голоморфные отображения в случаях (i) и (ii) неэквивалентны. Этот факт может быть также получен из сравнения групп автоморфизмов поверхностей в случаях (i) и (ii). В силу леммы 1 существует не более двух классов эквивалентности голоморфных отображений $f : S_3 \to S_2$, где S_2 — кривая Больца. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *De Franchis M.* Un teorema sulle involuzioni irrazionali // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1913. V. 36. P. 368.
2. *Howard A., Sommese A. J.* On the theorem of de Franchis // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV Ser. 1983. V. 10, N 4. P. 429–436.
3. *Alzati A., Pirola G. P.* Some remarks on the de Franchis theorem // Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N. S.) 1990. V. 36. P. 45–52.
4. *Tanabe M.* On rigidity of holomorphic maps of Riemann surfaces // Osaka J. Math. 1996. V. 33. P. 485–496.
5. *Tanabe M.* A bound for the theorem of de Franchis // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 127. P. 2289–2295.
6. *Tanabe M.* Holomorphic maps of Riemann surfaces and Weierstrass points // Kodai Math. J. 2005. V. 28, N 2. P. 423–429.
7. *Ito M., Yamamoto H.* Holomorphic mappings between compact Riemann surfaces // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2009. V. 52. P. 109–126.
8. *Fuertes Y.* Some bounds for the number of coincidences of morphisms between closed Riemann surfaces // Israel J. Math. 1999. V. 109, N 1. P. 1–12.
9. *Fuertes Y., Gonzalez-Diez G.* On the number of coincidences of morphisms between closed Riemann surfaces // Publ. Mat. 1993. V. 37. P. 339–353.
10. *Imayoshi Y.* Generalizations of de Franchis theorem // Duke Math. J. 1983. V. 50. P. 393–408.
11. *Бандман Т. М.* Сюръективные голоморфные отображения проективных многообразий // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 2. С. 48–56.
12. *Медных И. А.* О голоморфных отображениях римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два // Докл. РАН. 2009. Т. 424, № 2. С. 165–167.
13. *Медных И. А.* Классификация голоморфных отображений римановых поверхностей малых родов с точностью до эквивалентности // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1379–1395.
14. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New York; Berlin: Springer-Verl., 1980. (Grad. Texts Math.; V. 71).

15. *Farkas H. M.* Unramified double coverings of hyperelliptic surfaces // J. Anal. Math. 1976. V. 30. P. 150–155.
16. *Accola R. D. M.* On lifting the hyperelliptic involution // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 122, N 2. P. 341–347.
17. *Скотт П.* Геометрия на трехмерных многообразиях. М.: Мир, 1986.
18. *Thurston W. P.* The geometry and topology of three-manifolds. Princeton: Princeton Univ. Math. Dept., 1978.
19. *Martens H.* A remark on Abel's theorem and the mapping of linear series // Comment. Math. Helvetici. 1977. V. 52. P. 557–559.
20. *Shaska T.* Determining the automorphism group of a hyperelliptic curve // Proc. 2003 Int. symp. symbolic and algebraic computation: Philadelphia, PA; New York: ACM, 2003. P. 248–254.
21. *Cardona G., Quer J.* Curves of genus 2 with group of automorphisms isomorphic to D8 or D12 // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. V. 359, N 6. P. 2831–2849.
22. *Bolza O.* On binary sextics with linear transformations into themselves // Amer. J. Math. 1888. V. 10. P. 47–60.
23. *Igusa J.* Arithmetic variety of moduli for genus two // Ann. Math. 1960. V. 72, N 3. P. 612–649.
24. *Magaard K., Shaska T., Shpectorov S., Voelklein H.* The locus of curves with prescribed automorphism group // RIMS Kyoto Ser. Commun. arithmetic fundamental groups. 2002. V. 6. P. 112–141.

Статья поступила 10 мая 2011 г.

Медных Илья Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
ilyamednykh@mail.ru