Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 517.958

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

И. В. Прохоров

Аннотация. Исследована корректность задачи Коши для нестационарного уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред. Доказано существование единственной сильно непрерывной полугруппы разрешающих операторов, приведены оценки порядка роста полугруппы и рассмотрен вопрос о стабилизации нестационарного решения.

Ключевые слова: нестационарное уравнение, обобщенные условия сопряжения, сильно непрерывная полугруппа.

Введение

Проблема теоретического исследования краевых задач для нестационарных кинетических уравнений и построения приближенных методов их решения достаточно давно привлекает внимание специалистов. В первую очередь это связано с задачами кинетической теории газов, диффузии нейтронов и радиационного переноса [1–6]. В последнее время отмечен большой интерес к нестационарным интегродифференциальным уравнениям переноса, описывающим рост популяции клеток и многоклеточных организмов [7, 8]. Кроме самого уравнения важным аспектом в теории краевых задач для кинетических уравнений является тип граничных условий и условий сопряжения на границах раздела, позволяющих описать физические явления, не учтенные в самом уравнении. Это могут быть, например, эффекты влияния внешней среды, отражение и преломления потока излучения на границах раздела сред, переход клетки из одного состояния в другое.

Работы [9–13] посвящены исследованию краевых задач для стационарных уравнений переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред. В продолжение этой тематики в настоящей статье рассмотрен случай нестационарного уравнения в среде с плоскопараллельной геометрией. Следуя общей схеме изучения уравнений такого рода, вопрос о разрешимости начально-краевой задачи сводим к доказательству существования полугруппы разрешающих операторов некоторой абстрактной задачи Коши. Полученные оценки для порядка роста полугруппы применены к анализу условий стабилизации нестационарного решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–98521), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракты № 16.740.11.0456, № 14.74011.1000) а также Конкурса интеграционных проектов ДВО РАН с научными учреждениями СО РАН (09–II–СО–004).

Предметом исследования данной работы является интегродифференциальное уравнение переноса [1]

$$\left(\frac{1}{v(z)}\frac{\partial}{\partial t}+\nu\frac{\partial}{\partial z}+\sigma(z)\right)F(z,\nu,t)=\sigma(z)\Lambda(z)\int\limits_{-1}^{1}p(z,\nu,\nu')F(z,\nu',t)\,d\nu', \quad (1)$$

описывающее нестационарный процесс распространения излучения в неоднородной среде с плоскопараллельной симметрией. Функция $F(z,\nu,t)$ интерпретируется как плотность потока частиц в момент времени $t\in[0,T]$ в точке $z\in G=(z_0,z_n)$, движущихся со скоростью v в направлении, составляющем с осью z угол, косинус которого равен $\nu\in[-1,1]$. Функции $\sigma\geq\text{const}>0$ и $p\geq 0$ имеют смысл сечения взаимодействия и индикатрисы рассеяния. Неотрицательная величина Λ характеризует тип среды: при $\Lambda(z)\leq 1$ среда неразмножающая, в противном случае — размножающая.

Область G разбита на n слоев $G_i=(z_{i-1},z_i)$, объединение которых обозначим через $G_0=\bigcup\limits_{i=1}^{n}G_i$. В каждой из подобластей G_i функция $v(z)$ постоянна и принимает значения $v(z)=v_i>0$. Функции $\Lambda(z)$, $\sigma(z)$ принадлежат пространству $C_b(G_0)$, где через $C_b(Y)$ обозначено пространство функций, непрерывных и ограниченных на некотором множестве $Y\subset\mathbb{R}^m$ с нормой $\|\varphi\|_{C_b(Y)}=\sup\limits_{y\in Y}|\varphi(y)|$. Функция $p(z,\nu,\nu')$ принадлежит $C_b(G_0\times[-1,1]\times[-1,1])$ и для всех z,ν удовлетворяет условию нормировки $\int\limits_{-1}^{1}p(z,\nu,\nu')\,d\nu'=1$. Обозначим

$$X=G\times\{[-1,0)\cup(0,1]\},\quad X_0=G_0\times\{[-1,0)\cup(0,1]\},$$

$$\Gamma^{\pm}=\Gamma^{\pm}_{\text{ext}}\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}\{z_i\times[-1,0)\cup(0,1]\}\right),$$

$$\Gamma^{+}_{\text{ext}}=\{z_0\times[-1,0)\}\cup\{z_n\times(0,1]\},\quad \Gamma^{-}_{\text{ext}}=\{z_0\times(0,1]\}\cup\{z_n\times[-1,0)\}$$

и присоединим к уравнению (1) условия вида

$$F^-=BF^+\quad\text{на }\Gamma^-\times[0,T], \quad (2)$$

где

$$F^{\pm}(z_i,\nu,t)=\begin{cases}F(z_i\pm 0,\nu,t), & \nu<0,\\ F(z_i\mp 0,\nu,t), & \nu>0,\end{cases}$$

$$F(z_i\pm 0,\nu,t)=\lim_{\varepsilon\to+0}F(z_i\pm\varepsilon,\nu,t),\quad (z_i,\nu)\in\Gamma^{\pm},$$

и оператор B задает краевые условия на внешней границе ($(z,\nu)\in\Gamma^-_{\text{ext}}$) и условия сопряжения на границах раздела сред $z=z_i$, $i=1,\dots,n-1$. Будем предполагать, что неотрицательный линейный оператор B не зависит от переменной t и ограничен из $C_b(\Gamma^+)$ в $C_b(\Gamma^-)$. Конкретный вид оператор сопряжения B определяется характеристиками излучения и границ раздела. Наибольшее распространение в теории переноса излучения получили условия сопряжения, соответствующие непрерывной «склейке» решения в [1, 2], а также условия френелевского и диффузного типов [9–13]. Отметим, что случай размножающей среды и ее границ мы не исключаем, тем самым ограничения $\Lambda\leq 1$ и $\|B\|\leq 1$, как правило, характерные для разрешимости стационарной краевой задачи [9–13], не накладываются.

Начальные условия для уравнения (1) имеют вид

$$F(z,\nu,0) = F_0(z,\nu) \quad \text{на } \overline{G}\times[-1,0)\cup(0,1], \tag{3}$$

где функция $F_0(z,\nu)$ характеризует состояние процесса в начальный момент времени $t=0$.

1. Постановка задачи Коши

Введем в рассмотрение пространство функций $W_c^1 = \big\{ f \in C_b(X_0) : \nu\frac{\partial f}{\partial z} \in C_b(X_0)\big\}$ и покажем, что для любой функции $f \in W_c^1$ ее предельные значения $f^{\pm}$ на $\Gamma^{\pm}$ принадлежат $C_b(\Gamma^{\pm})$. Для любой $f \in W_c^1$ справедливы непосредственно проверяемые соотношения

$$f^{\pm}(\xi(z,\mp\nu),\nu) = f(z,\nu)\exp\left(\pm\frac{z-\xi(z,\mp\nu)}{\nu}\right) + \frac{1}{\nu}\int\limits_{z}^{\xi(z,\mp\nu)} \exp\left(\pm\frac{z'-\xi(z,\mp\nu)}{\nu}\right)\left(\nu\frac{\partial f}{\partial z}\pm f\right)(z',\nu)\,dz', \tag{4}$$

где z — любая точка из G_0 и величина $\xi(z,\nu)$ определяется формулой

$$\xi(z,\nu) = \begin{cases} z_i, & (z,\nu)\in(z_{i-1},z_i]\times[-1,0),\\ z_{i-1}, & (z,\nu)\in[z_{i-1},z_i)\times(0,1]. \end{cases}$$

Функции $\frac{1}{\nu}\exp\big(\pm\frac{z'-\xi(z,\mp\nu)}{\nu}\big)$ при всех $z'\in(z,\xi(z,\mp\nu))$ непрерывны на X_0 и ограничены в некоторой окрестности любой фиксированной точки $(z,\mp\nu)$ из X_0. Поэтому согласно теореме о непрерывности интеграла Лебега, зависящего от параметра, из (4) вытекает непрерывность следа $f^{\pm}$ функции $f\in W_c^1$ на множестве $\Gamma^{\pm}$. При этом из того же соотношения (4) находим

$$\|f^{\pm}\|_{C_b(\Gamma^{\pm})} \le \left\| \|f\|_{C_b(X_0)}\exp\left(\pm\frac{z-\xi(z,\mp\nu)}{\nu}\right) + \left(\left\|\nu\frac{\partial f}{\partial z}\right\|_{C_b(X_0)} + \|f\|_{C_b(X_0)}\right)\left(1-\exp\left(\pm\frac{z-\xi(z,\mp\nu)}{\nu}\right)\right)\right\|_{C_b(\Gamma^{\pm})} \le \|f\|_{C_b(X_0)} + \left\|\nu\frac{\partial f}{\partial z}\right\|_{C_b(X_0)},$$

следовательно, $f^{\pm}\in C_b(\Gamma^{\pm})$. Определим оператор A:

$$Af = -v(z)\left(\left(\nu\frac{\partial}{\partial z}+\sigma(z)\right)f(z,\nu) - \sigma(z)\Lambda(z)\int\limits_{-1}^{1} p(z,\nu,\nu')f(z,\nu')\,d\nu'\right),$$

действующий в банаховом пространстве $C_b(X_0)$, с областью определения $D(A) = \big\{f\in W_c^1 : f^- = Bf^+ \text{ на } \Gamma^-\big\}$.

Решением начально-краевой задачи (1)–(3) будем называть вектор-функцию $F(t)$, удовлетворяющую условиям: значения $F(t)$ при всех $t\in[0,T]$ принадлежат $D(A)$; в каждой точке t существует сильная производная функции $F(t)$, принадлежащая пространству $C([0,T];C_b(X_0))$; выполняются уравнение

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = AF(t) \tag{5}$$

и начальное условие

$$F(0) = F_0, \tag{6}$$

где $F_0\in D(A)$.

Теорема 1. *Решение F задачи Коши* (5), (6) *существует и единственно.*

Согласно утверждению теоремы Хилле — Иосиды [14, 15] для корректности задачи (5), (6) достаточно показать, что резольвента $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ оператора A существует для всех вещественных λ, больших некоторого β, и ее норма ограничена числом $1/(\lambda-\beta)$. В этом случае теорема гарантирует существование единственной сильно непрерывной полугруппы $U(t)$ разрешающих операторов, порожденной инфинитезимальным генератором A и удовлетворяющей условиям $U(0) = I$ и $\|U(t)\| \le C\exp(\beta t)$. При этом решение задачи (5), (6) может быть найдено по следующей формуле [14]:

$$F(t) = U(t)F_0 = \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{-\zeta t}(\zeta I - A)^{-1} F_0 \, d\zeta, \quad \gamma > \beta,\ t > 0.$$

Таким образом, теорема 1 будет доказана, если покажем, что резольвента R_λ обладает указанными выше свойствами.

2. Свойства резольвенты оператора A

Определим операторы $L : D(A) \to C_b(X_0)$ и $S : C_b(X_0) \to C_b(X_0)$:

$$Lf = \left(\nu \frac{\partial}{\partial z} + \sigma(z)\right) f(z,\nu), \quad Sf = \sigma(z)\Lambda(z) \int\limits_{-1}^{1} p(z,\nu,\nu') f(z,\nu')\, d\nu'.$$

Очевидно, что $A = -v(L - S)$ и для резольвенты оператора A справедливы соотношения

$$R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = (\lambda I + v(L-S))^{-1} = \left(L + \frac{\lambda}{v} I - S\right)^{-1} v^{-1} = (L_\lambda - S)^{-1} v^{-1}, \quad (7)$$

где $L_\lambda = L + \frac{\lambda}{v} I$. Обозначим

$$\tau(z,z') = \int\limits_{z'}^{z} \sigma(s)\, ds, \quad \tau_\lambda(z,z') = \int\limits_{z'}^{z} \left(\sigma(s) + \frac{\lambda}{v(s)}\right) ds,$$

$$K(z,z',\nu) = \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\tau(z,z')\right\}, \quad K_\lambda(z,z',\nu) = \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\tau_\lambda(z,z')\right\}.$$

Функции $\tau_\lambda(z,z'), K_\lambda(z,z',\nu)$ непрерывны и ограничены по всем аргументам, поэтому в силу непрерывности $\xi(z,\nu)$ на X_0 функция $K_\lambda(z,\xi(z,\nu),\nu)$ принадлежит $C_b(X_0)$. По этой же причине продолжение любой функции $\phi \in C_b(\Gamma^-)$ с граничного множества Γ^- на X_0, построенное по формуле $\widetilde{\phi}(z,\nu) = \phi(\xi(z,\nu),\nu)$, принадлежит $C_b(X_0)$. Так как

$$\nu \frac{\partial K_\lambda}{\partial z'}(z,z',\nu) = -\left(\sigma(z) + \frac{\lambda}{v(z)}\right) K_\lambda(z,z',\nu), \quad \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial z}(z,\nu) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\nu} \int\limits_{\xi(z,\nu)}^{z} K_\lambda(z,z',\nu) \left(\sigma(z') + \frac{\lambda}{v(z')}\right) dz' = 1 - K_\lambda(z,\xi(z,\nu),\nu), \quad (9)$$

операторы P_λ и E_λ, определяемые формулами

$$(P_\lambda\phi)(z,\nu) = \phi^-(\xi(z,\nu),\nu)K_\lambda(z,\xi(z,\nu),\nu),$$

$$(E_\lambda\Phi)(z,\nu) = \frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi(z,\nu)}^{z} K_\lambda(z,z',\nu)\Phi(z',\nu)\,dz',$$

переводят соответственно пространства функций $C_b(\Gamma^+)$ и $C_b(X_0)$ в $W_c^1(X_0)$.

Принимая во внимания введенные обозначения, нетрудно показать, что в пространстве D решения уравнений

$$L_\lambda f = \Phi, \quad \Phi \in C_b(X_0), \tag{10}$$

$$f = P_\lambda(Bf^+) + E_\lambda\Phi \tag{11}$$

эквивалентны.

Лемма 1. *Пусть λ удовлетворяет условию*

$$\lambda > \lambda_* = \lambda_- + \begin{cases} \frac{\|B\|-1}{t_*}, & \text{если } \|B\| > 1, \\ 0, & \text{если } \|B\| \le 1; \end{cases} \tag{12}$$

$$\lambda_- = -\inf_{z\in G_0}\sigma(z)v(z), \quad \lambda_+ = \sup_{z\in G_0}\sigma(z)v(z), \quad t_* = \inf_{i=\overline{1,n}}\frac{|z_i - z_{i-1}|}{v_i}.$$

Тогда решение уравнения (10) *существует и единственно в D и выполняются неравенства*

$$\|f^+\|_{C_b(\Gamma^+)} \le \frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_*}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X_0)}, \tag{13}$$

$$\|f\|_{C_b(X_0)} \le \max\{\|B\|,1\}\frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_*}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X_0)}. \tag{14}$$

Доказательство. Заметим, что для разрешимости уравнения (10) достаточно доказать разрешимость уравнения

$$f^+ = P_\lambda(Bf^+) + E_\lambda\Phi \tag{15}$$

в пространстве $C_b(\Gamma^+)$, поскольку если функция f^+ известна, то решение уравнения (10) находится по явной формуле (11). Так как при $\lambda > \lambda_-$

$$\|K_\lambda\|_{C_b(\Gamma^+)} \le \exp(-t_*(\lambda-\lambda_-)), \tag{16}$$

при $\lambda > \lambda_*$ получаем

$$\begin{aligned} &\|P_\lambda(Bf^+)\|_{C_b(\Gamma^+)} \le \|B\|\|K_\lambda\|_{C_b(\Gamma^+)}\|f^+\|_{C_b(\Gamma^+)} \\ &\le \|B\|\exp(-t_*(\lambda-\lambda_-))\|f^+\|_{C_b(\Gamma^+)} \le \frac{\|B\|}{t_*(\lambda-\lambda_-)+1}\|f^+\|_{C_b(\Gamma^+)} < \|f^+\|_{C_b(\Gamma^+)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Тем самым при выполнении условия (12) норма оператора $P_\lambda B$, переводящего банахово пространство $C_b(\Gamma^+)$ в себя, меньше единицы. Таким образом, решение уравнения (15) при $\lambda > \lambda_*$ существует и единственно.

Докажем неравенство (13). В принципе норму функции f^+ можно оценить через $\|P_\lambda B\|$:

$$\|f^+\|_{C_b(\Gamma^+)} \le \frac{1}{1-\|P_\lambda B\|}\|E_\lambda\Phi\|_{C_b(X_0)}.$$

Однако в этом случае оценка для f^+ получается грубее, чем (13). Поэтому применим более тонкие рассуждения, использующие положительность операторов P_λ, E_λ. С учетом соотношения (9) из уравнения (15) при ограничении (12) для всех точек, принадлежащих множеству Γ^+, вытекает следующая цепочка неравенств:

$$|f^+| \le \|Bf^+\|_{C_b(\Gamma^-)}K_\lambda + (1-K_\lambda)\left\|\frac{\sigma}{\sigma+\lambda/v}\right\|_{C_b(G_0)}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X_0)}$$

$$\le \|B\|\|f^+\|_{C_b(\Gamma^+)}K_\lambda + (1-K_\lambda)\frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X_0)}. \quad (18)$$

Из (12) и (16) выводим, что

$$\|B\|K_\lambda \le \|B\|\exp(-t_*(\lambda-\lambda_-)) \le \frac{\|B\|}{t_*(\lambda-\lambda_-)+1} < 1 \quad \text{для всех } (z,\nu)\in\Gamma^+. \quad (19)$$

Следовательно, из неравенства (18) получаем

$$\frac{|f^+| - \|B\|K_\lambda\|f^+\|_{C_b(\Gamma^+)}}{1-\|B\|K_\lambda} \le \frac{1-K_\lambda}{1-\|B\|K_\lambda}\frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X_0)}.$$

Так как предыдущее неравенство выполняется для всех $(z,\nu)\in\Gamma^+$, то

$$\|f^+\|_{C_b(\Gamma^+)} \le \left\|\frac{1-K_\lambda}{1-\|B\|K_\lambda}\right\|_{C_b(\Gamma^+)}\frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X_0)}. \quad (20)$$

При $\|B\|\le 1$ имеем $\lambda_* = \lambda_-$ и

$$\left\|\frac{1-K_\lambda}{1-\|B\|K_\lambda}\right\|_{C_b(\Gamma^+)} \le 1.$$

Поэтому из (20) вытекает справедливость оценки (13) при $\|B\|\le 1$. Если же $\|B\|>1$, то

$$\left\|\frac{1-K_\lambda}{1-\|B\|K_\lambda}\right\|_{C_b(\Gamma^+)} = \left\|\frac{1-\|B\|K_\lambda - K_\lambda + \|B\|K_\lambda}{1-\|B\|K_\lambda}\right\|_{C_b(\Gamma^+)}$$

$$= \left\|1+\frac{K_\lambda(\|B\|-1)}{1-\|B\|K_\lambda}\right\|_{C_b(\Gamma^+)} = \left\|1+\frac{\|B\|-1}{K_\lambda^{-1}-\|B\|}\right\|_{C_b(\Gamma^+)}$$

$$\le 1+\frac{\|B\|-1}{t_*(\lambda-\lambda_-)+1-\|B\|} \le \frac{t_*(\lambda-\lambda_-)}{t_*(\lambda-\lambda_-)+1-\|B\|} \le \frac{\lambda-\lambda_-}{\lambda-\lambda_*}.$$

Подставляя полученную оценку в (20), убеждаемся в справедливости неравенства (13) и в этом случае.

Принимая во внимание доказанное неравенство (13), из уравнения (11) получаем

$$\|f\|_{C_b(X_0)} \le \left\|\|Bf^+\|_{C_b(\Gamma^-)}K_\lambda + (1-K_\lambda)\frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X_0)}\right\|_{C_b(X_0)}$$

$$\le \max\left\{\|B\|\|f^+\|_{C_b(\Gamma^+)}, \frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X_0)}\right\}$$

$$\le \max\left\{\|B\|\frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_*}, \frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\right\}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X_0)}$$

$$\le \max\{\|B\|,1\}\frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_*}\cdot\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X_0)}.$$

Таким образом, неравенство (14) доказано. $\square$

Доказанная лемма фактически означает, что обратный к оператору L_λ существует и ограничен при $\lambda > \lambda_*$. Если на линейном множестве D определить норму

$$\|f\|_D = \left\| \frac{L_\lambda f}{\sigma} \right\|_{C_b(X_0)}, \tag{21}$$

то при ограничении (12) из неравенств (13), (14) следует, что сходимость последовательности функций по норме D влечет равномерную сходимость в пространствах $C_b(\Gamma^+)$ и $C_b(X_0)$. Отсюда вытекает, что множество $D \subset C_b(X_0)$ с нормой (21) образует банахово пространство функций.

Действительно, пусть последовательность функций f_k фундаментальна в D:

$$\|f_k - f_m\|_D = \left\| \frac{L_\lambda(f_k - f_m)}{\sigma} \right\|_{C_b(X_0)} \to 0, \quad k, m \to \infty.$$

В силу полноты пространства $C_b(X_0)$ заключаем, что существует элемент $\Phi \in C_b(X_0)$ такой, что

$$\left\| \frac{L_\lambda f_k}{\sigma} - \frac{\Phi}{\sigma} \right\|_{C_b(X_0)} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Ввиду леммы 1 существует единственный элемент f из D такой, что $L_\lambda f = \Phi$, поэтому

$$\left\| \frac{L_\lambda f_k}{\sigma} - \frac{L_\lambda f}{\sigma} \right\|_{C_b(X_0)} = \|f_k - f\|_D \to 0, \quad k \to \infty.$$

Таким образом, пространство D с нормой (21) банахово.

Пусть $Q_\lambda : D \to D$ — оператор, определяемый формулой $Q_\lambda f = P_\lambda B f^+ + E_\lambda S f$. Тогда согласно выражению (7) вопрос о существовании резольвенты R_λ сводится к вопросу о разрешимости уравнения

$$L_\lambda f = Sf + F_0/v \tag{22}$$

в D или, как следует из (11), эквивалентному ему уравнению

$$f = f_0 + Q_\lambda f, \quad f_0 = E_\lambda(F_0/v). \tag{23}$$

Лемма 2. *При*

$$\lambda > \beta = \lambda_* + \overline{\Lambda} \max\{\|B\|, 1\} \lambda_+, \quad \overline{\Lambda} = \|\Lambda\|_{C_b(G_0)}, \tag{24}$$

уравнение (22) *однозначно разрешимо в* D *и справедлива оценка*

$$\|f\|_{C_b(X_0)} = \left\| (I - Q_\lambda)^{-1} E_\lambda \frac{F_0}{v} \right\|_{C_b(X_0)} \le \frac{\|F_0\|_{C_b(X_0)}}{\lambda - \beta}. \tag{25}$$

Доказательство. Вначале заметим, что поскольку функция p неотрицательная и удовлетворяет условию нормировки, то

$$\left\| \frac{Sf}{\sigma} \right\|_{C_b(X_0)} = \left\| \Lambda(z) \int_{-1}^{1} p(z, \nu, \nu') f(z, \nu')\, d\nu' \right\|_{C_b(X_0)} \le \overline{\Lambda} \|f\|_{C_b(X_0)}.$$

Так как по построению $L_\lambda Q_\lambda f = Sf$, из леммы 1 и определения нормы в D получаем

$$\|Q_\lambda f\|_D = \left\|\frac{Sf}{\sigma}\right\|_{C_b(X_0)} \le \overline{\Lambda}\max\{\|B\|,1\}\frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_*}\|f\|_D. \tag{26}$$

Если выполнено условие (24), то

$$\overline{\Lambda}\max\{\|B\|,1\}\frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_*} < 1.$$

Следовательно, норма оператора Q_λ, действующего в банаховом пространстве D, меньше единицы. Отсюда следует однозначная разрешимость уравнения (22).

Так как

$$\left\|E_\lambda\frac{F_0}{v}\right\|_{C_b(X_0)} = \left\|\frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi(z,\nu)}^{z} K_\lambda(z,z',\nu)\left(\sigma(z')+\frac{\lambda}{v(z')}\right)\frac{F_0(z',\nu)}{v(z')\sigma(z')+\lambda}\,dz'\right\|_{C_b(X_0)}$$
$$\le \frac{\|1-K_\lambda\|_{C_b(X_0)}}{\lambda-\lambda_-}\|F_0\|_{C_b(X_0)} \le \frac{1}{\lambda-\lambda_-}\|F_0\|_{C_b(X_0)},$$

из (26) вытекает цепочка неравенств

$$\left\|(I-Q_\lambda)^{-1}E_\lambda\frac{F_0}{v}\right\|_{C_b(X_0)}$$
$$\le \frac{1}{1-\|Q_\lambda\|}\frac{1}{\lambda-\lambda_-}\|F_0\|_{C_b(X_0)} \le \frac{\lambda-\lambda_*}{\lambda-\lambda_*-\overline{\Lambda}\max\{\|B\|,1\}\lambda_+}\frac{1}{\lambda-\lambda_-}\|F_0\|_{C_b(X_0)}$$
$$\le \frac{1}{\lambda-\lambda_*-\overline{\Lambda}\max\{\|B\|,1\}\lambda_+}\|F_0\|_{C_b(X_0)}. \tag{27}$$

Вспоминая определение β, с учетом (27) очевидным образом убеждаемся в справедливости оценки (25). $\square$

Таким образом, из леммы 2 вытекает, что часть комплексной плоскости $\{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\zeta > \beta\}$ принадлежит резольвентному множеству оператора A, причем для всех ζ из этого множества справедливо неравенство $\|R_\zeta\| \le 1/(\operatorname{Re}\zeta-\beta)$. Как уже говорилось в разд. 1, этого достаточно для существования единственной полугруппы разрешающих операторов $U(t)$ задачи Коши (5), (6): $F(t) = U(t)F_0$. Работы [16–18] посвящены детальному анализу спектральных свойств оператора A. Подробный анализ резольвентного множества оператора A проведен при некоторых упрощающих ограничениях на коэффициенты уравнения и область определения оператора A, в частности, в [16–18] предполагалось, что множество G_0 состоит из одной компоненты и $B = 0$.

3. Неоднородный случай. Условия стабилизации нестационарного решения

В приложениях теории переноса излучения [1, 19, 20] зачастую встречаются ситуации, когда имеем дело как с неоднородностью самого уравнения, так и с неоднородными граничными условиями. Например, когда в среде присутствуют внутренние источники излучения Φ и на внешней неотражающей границе Γ^-_{ext} задано входящее в среду излучение h. В этом случае уравнение и граничные условия имеют вид

$$\left(\frac{1}{v(z)}\frac{\partial}{\partial t}+L\right)F = SF + \Phi \quad \text{на } X_0\times[0,T], \tag{28}$$

$$F^- = BF^+ \quad \text{на } \{\Gamma^- \setminus \Gamma^-_{\text{ext}}\} \times [0,T], \tag{29}$$

$$F^- = h \quad \text{на } \Gamma^-_{\text{ext}} \times [0,T]. \tag{30}$$

Здесь $\Phi \in C^1([0,T];C_b(X_0))$, а $h \in C^1([0,T];C_b(\Gamma^-_{\text{ext}}))$ и $h(\xi,\nu,t) = 0$ для всех $t \le 0$.

Заменой $F = F_h + F_1$, где

$$F_h(z,\nu,t) = \begin{cases} h\big(\xi(z,\nu),\nu,t - \frac{|z-\xi|}{v}\big)K(z,\xi(z,\nu),\nu), & \text{если } (\xi(z,\nu),\nu) \in \Gamma^-_{\text{ext}}, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

задача (28)–(30) сводится к задаче Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial F_1(t)}{\partial t} = AF_1(t) + \Phi(t) + (SF_h)(t) \tag{31}$$

с начальным условием

$$F_1(0) = F_0 + F_h(0). \tag{32}$$

Учитывая ограничения на h и на функции Λ, σ, p, определяющие оператор S, заключаем, что $F_0 + F_h(0) = F_0 \in D$ и $\Phi + SF_h \in C_b(X_0)$.

Согласно принципу Дюамеля [15] для решения F_1 задачи (31), (32) справедлива формула

$$F_1(t) = U(t)F_0 + \int\limits_0^t U(t-s)(SF_h(s) + \Phi(s))\,ds.$$

Зная F_1, без труда находим решение F неоднородной задачи (28)–(30).

Рассмотрим вопрос о стабилизации нестационарного решения $F(t) = F_1(t) + F_h(t)$, $t \in [0,+\infty)$. Пусть

$$\lim_{t\to+\infty}(\Phi(t) + SF_h(t)) = \Phi_\infty$$

и семейство операторов $U(t)$ образует полугруппу сжатия ($\beta < 0$), тогда [15]

$$\lim_{t\to+\infty} F_1(t) = A^{-1}\Phi_\infty$$

и соответственно

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = F_{h,\infty} + A^{-1}\Phi_\infty, \quad \text{где } F_{h,\infty} = \lim_{t\to+\infty} F_h(t).$$

Из неравенств (12) и (24) вытекает, что порядок роста полугруппы $U(t)$ определяется соотношением

$$\beta = -\inf_{r\in G_0}(\sigma v) + \chi_{(1,\infty)}(\|B\|)\frac{\|B\|-1}{t_*} + \overline{\Lambda}\max\{\|B\|,1\}\sup_{r\in G_0}(\sigma v), \tag{33}$$

где $\chi_{(1,\infty)}(\cdot)$ — характеристическая функция интервала $(1,+\infty)$. Согласно (33) полугруппа $U(t)$ будет сжимающей, если выполнено неравенство

$$\overline{\Lambda} < \frac{\inf\limits_{r\in G_0}(\sigma v) - \chi_{(1,\infty)}(\|B\|)(\|B\|-1)/t_*}{\sup\limits_{r\in G_0}(\sigma v)\max\{\|B\|,1\}}. \tag{34}$$

Из теории краевых задач для стационарного уравнения переноса с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред известно [9–13], что для однозначной разрешимости стационарной краевой задачи достаточно выполнения условий $\|B\| \leq 1$ и $\overline{\Lambda} < 1$. Из ограничения (34) вытекает, что при $\|B\| \leq 1$ для стабилизации нестационарного решения требуется

$$\overline{\Lambda} < \frac{\inf\limits_{r \in G_0} (\sigma v)}{\sup\limits_{r \in G_0} (\sigma v)}, \tag{35}$$

т. е. несколько больше, чем выполнение условия $\overline{\Lambda} < 1$. Условие (35) при $\|B\| \leq 1$ переходит в ограничение $\overline{\Lambda} < 1$, если, например, функция σ, характеризующая ослабление излучения, обратно пропорциональна скорости v. Из (34) также следует, что если $\overline{\Lambda} = 0$, то решение стабилизируется и при $\|B\| > 1$, но для достаточно больших t_*. Увеличение величины t_* физически соответствует увеличению времени, затрачиваемому частицей на путь между двумя соседними границами в каждом слое.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
2. *Новиков В. М., Шихов С. Б.* Теория параметрического воздействия на перенос нейтронов. М.: Энергоиздат, 1982.
3. *Voigt J.* Positivity in time dependent linear transport theory // Acta Appl. Math. 1984. V. 2. P. 311–331.
4. *Маслова Н. Б.* Математические методы исследования уравнения Больцмана // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3, № 1. С. 3–56.
5. *Морозов С. Ф.* Нестационарное интегродифференциальное уравнение переноса // Изв. вузов. Математика. 1969. № 1. С. 26–31.
6. *Акыш А. Ш.* О сильном решении метода сферических гармоник для нестационарного уравнения переноса // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 757–768.
7. *Jeribi A., Latrach K., Megdiche H.* Time asymptotic behavior of the solution to a Cauchy problem governed by a transport operator // J. Integral Equations Appl. 2005. V. 17, N 2. P. 121–139.
8. *Boulanouar M., Emamirad H.* The asymptotic behavior for a transport equation in cell population dynamics with a null maturation velocity // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 243. P. 47–63.
9. *Прохоров И. В.* О разрешимости краевой задачи для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67, № 6. С. 169–192.
10. *Прохоров И. В.* О структуре множества непрерывности решения краевой задачи для уравнения переноса излучения // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 2. С. 256–272.
11. *Prokhorov I. V., Yarovenko I. P., Krasnikova T. V.* An extremum problem for the radiation transfer equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2005. V. 13, N 4. P. 365–382.
12. *Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Краевая задача для уравнения переноса поляризованного излучения в слоистой среде // Дальневост. мат. журн. 2010. Т. 10, № 1. С. 50–59.
13. *Kovtanyuk A. E., Prokhorov I. V.* A boundary-value problem for the polarized-radiation transfer equation with Fresnel interface conditions for a layered medium // J. Comput. Appl. Math. 2011. V. 235, N 8. P. 2006–2014.
14. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
15. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York: Springer-Verl., 1983 (Appl. Math. Sci.; V. 44).
16. *Куперин Ю. А., Набоко С. Н., Романов Р. В.* Спектральный анализ односкоростного оператора переноса и функциональная модель // Функцион. анализ и его приложения. 1999. Т. 33, № 3. С. 47–58.
17. *Степин С. А.* О модели Фридрихса в односкоростной теории переноса // Функцион. анализ и его приложения. 2001. Т. 35, № 2. С. 87–92.
18. *Степин С. А.* Волновые операторы для линеаризованного уравнения Больцмана в односкоростной теории переноса // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 1. С. 139–160.

19. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.

20. *Prokhorov I. V., Yarovenko I. P., Nazarov V. G.* Optical tomography problems at layered media // Inverse Probl. 2008. V. 24, N 2. P. 13.

Статья поступила 16 мая 2011 г.

Прохоров Игорь Васильевич
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041
prh@iam.dvo.ru