Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 512.540+510.5

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОЙ Σ–ФУНКЦИИ НАД ДЕРЕВОМ

А. Н. Хисамиев

Аннотация. Получены достаточные условия отсутствия в допустимом множестве (наследственно конечном допустимом множестве) универсальной Σ-функции. Построено дерево T высоты 4 такое, что в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(T)$ над T не существует универсальной Σ-функции.

Ключевые слова: допустимое множество, Σ-функция, универсальная Σ-функция, наследственно конечное допустимое множество, дерево.

В настоящее время общепризнанно, что одним из важных обобщений понятия вычислимости является Σ-определимость (обобщенная вычислимость) в допустимых множествах. Это обобщение дало возможность исследовать проблемы вычислимости над произвольными алгебраическими системами, например над полем вещественных чисел. Наиболее важные результаты по теории вычислимости в допустимых множествах и их применению в теоретической информатике (семантическое программирование, динамическая логика, теория эффективных f-пространств и т. д.) приведены в монографии Ю. Л. Ершова [1], в которой отмечена важность следующего направления дальнейших исследований: «для лучшего понимания общей природы вычислимости (конструктивной познаваемости) следует дальше развить (понять) вычислимость в допустимых множествах вида $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ — наследственно конечной надстройке над системой $\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ является либо моделью достаточно простой теории, либо одним из классических объектов, таким, например, как поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел» [1, с. 12].

Одним из принципиальных результатов абсолютной теории вычислимости является существование универсальной частично вычислимой функции. Как известно (см. [1]), в любом допустимом множестве существует универсальный Σ-предикат, но это неверно для Σ-функций. В [2] построена алгебраическая система $\mathfrak{M}$ такая, что в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ не существует универсальной Σ-функции. Поэтому представляет интерес нахождение условия на алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ для существования универсальной Σ-функции в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ над $\mathfrak{M}$. В [1] доказано, что если $\mathfrak{M}$ — алгебраическая система разрешимой и модельно полной теории, то в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ существует универсальная Σ-функция. В [3–5] для одного класса K алгебраических систем найдены необходимое и достаточное условия существования универсальной Σ-функции в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M} \in K$. В [6] построена абелева группа без кручения A такая, что в $\mathbb{HF}(A)$ не существует

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–276.2012.1).

универсальной Σ-функции. В [7, 8] введено понятие Σ-ограниченной алгебраической системы и получено необходимое и достаточное условие существования универсальной Σ-функции в наследственно конечном допустимом множестве над такой системой. Доказано, что любой линейный порядок, алгебра Ершова и абелева p-группа являются Σ-ограниченными системами и в наследственно конечном допустимом множестве над ними существуют универсальные Σ-функции.

С. С. Гончаров поставил перед автором вопрос: существует ли универсальная Σ-функция в наследственно конечном допустимом множестве [4] $\mathbb{HF}(T)$ над деревом T? В заметке построено дерево высоты 4 такое, что в $\mathbb{HF}(T)$ не существует универсальной Σ-функции.

Мы придерживаемся терминологии и обозначений по допустимым множествам из монографии [1]. Напомним некоторые из них.

Под *допустимым множеством* $\mathbb{A}$ будем понимать KPU-модель, у которой множество $\mathrm{Ord}\,\mathbb{A}$ всех ординалов вполне упорядочено. Функция в $\mathbb{A}$, график которой определяется некоторой Σ-формулой в $\mathbb{A}$, называется Σ-*функцией*.

Двуместная частичная Σ-функция $g(x, y) : A^2 \to A$ называется *универсальной* для семейства одноместных частичных Σ-функций в допустимом множестве $\mathbb{A}$, если семейство $\{\lambda y\ g(a, y) \mid a \in A\}$ состоит из всех одноместных частичных Σ-функций.

Важным классом допустимых множеств служат наследственно конечные допустимые множества. Пусть $\mathscr{P}_\omega(X)$ — множество всех конечных подмножеств множества X.

Наследственно конечное допустимое множество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *над алгебраической системой* $\mathfrak{M} = \langle M, \sigma_0\rangle$ определяется как алгебраическая система $\langle M \cup HF(M), U, \in, \varnothing, \sigma_0\rangle$ сигнатуры $\sigma_1 = \langle U, \in, \varnothing, \sigma_0\rangle$, где

$$HF(M) = \bigcup_{n\in\omega} HF_n(M), \quad HF_0(M) = \varnothing, \quad HF_{n+1}(M) = \mathscr{P}_\omega(M \cup HF_n(M)),$$

и предикат U выделяет множество элементов модели $\mathfrak{M}$ (*праэлементов*), а отношение $\in$ и константа $\varnothing$ имеют обычные теоретико-множественные смыслы.

Приведем основные определения, связанные с понятием дерева.

Частично упорядоченное множество T называется *деревом*, если для любого $x \in T$ множество всех элементов, меньших x (*предшественников* x в T), вполне упорядочено и T содержит наименьший элемент r, который называется *корнем*. Для каждой вершины $x \in T$ через $\mathrm{level}_T(x)$ будет обозначаться порядковый тип множества всех предшественников x в T, называемый *уровнем* вершины x в дереве T. *Высота* дерева T определяется следующим образом:

$$\mathrm{ht}(T) = \sup_{x\in T}(\mathrm{level}_T(x) + 1).$$

Если $a, b \in T$ и $a < b$ $(a \neq b)$ и между ними нет элементов из T, то b называется *непосредственным последователем* a. Через $\check{a}$ обозначим множество $\{x \in T \mid x \geq a\}$.

Следующее предложение навеяно примером Руднева [2].

Предложение. *Пусть для допустимого множества* $\mathbb{A} = \langle A, \sigma\rangle$ *справедливо следующее условие: для любого* $a \in A$ *существует* Σ-*функция* f *в* $\mathbb{A}$ *такая, что для любого* $b \in A$ *найдутся* $c, d \in A$ *и изоморфные вложения* $\varphi^\varepsilon : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $\varepsilon < 2$, *для которых*

1) $f(c) = d$,
2) $\varphi^\varepsilon(a) = a$, $\varepsilon < 2$, $\varphi^0(b) = \varphi^1(b)$, $\varphi^0(c) = \varphi^1(c)$,
3) $\varphi^0(d) \neq \varphi^1(d)$.
Тогда в $\mathbb{A}$ не существует универсальной Σ-функции.

Доказательство. Допустим противное, т. е. в $\mathbb{A}$ существует универсальная Σ-функция g, определяемая Σ-формулой $\Phi_g(a, x_0, x, y)$ для некоторого $a \in A$. Пусть функция f определена по a, как в условии предложения. Тогда существует элемент $b \in A$ такой, что $\Phi_g^{\mathbb{A}}(a, b, x, y)[x, y] = \Gamma_f$, где Γ_f — график функции f. Пусть для элементов b, c, d и вложений φ^ε справедливы условия 1–3. Тогда

$$\mathbb{A} \models \Phi_g(a, b, c, d), \quad \mathbb{A} \models \Phi_g(\varphi^\varepsilon(a), \varphi^\varepsilon(b), \varphi^\varepsilon(c), \varphi^\varepsilon(d)),$$

$$\varphi^0(a) = \varphi^1(a) = a, \quad \varphi^0(b) = \varphi^1(b), \quad \varphi^0(c) = \varphi^1(c), \quad \varphi^0(d) \neq \varphi^1(d).$$

Пусть $h(x) = g(\varphi^0(b), x)$. Тогда $h(\varphi^0(c)) = h(\varphi^1(c)) = \varphi^0(d)$ и $h(\varphi^0(c)) = h(\varphi^1(c)) = \varphi^1(d)$; противоречие. Предложение доказано. $\square$

Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебраическая система сигнатуры σ_0, $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ — наследственно конечное допустимое множество над $\mathfrak{M}$ сигнатуры $\sigma_1 = \langle U, \in, \varnothing, \sigma_0 \rangle$, $\omega \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ — конечные ординалы. Для любого элемента $u \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ существуют $\varkappa \in \mathbb{HF}(\omega)$, $\mathrm{sp}\, \varkappa = \{1, \ldots, m\}$, и последовательность $\bar{a} \in M^m$ такие, что $u = \varkappa(\bar{a})$. Справедлива следующая

Лемма [1, с. 149]. *Пусть $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ — вложение алгебраической системы $\mathfrak{M}$ в систему $\mathfrak{M}'$ той же сигнатуры. Тогда φ однозначно продолжается до вложения $\varphi^* : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M}')$ такого, что для любого элемента $u = \varkappa(\bar{a}) \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ справедливо*

$$\varphi^*(\varkappa(\bar{a})) = \varkappa(\varphi(\bar{a})), \quad \bar{a} \in M^m.$$

Если Φ — Σ-формула сигнатуры σ_1 и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(\varkappa(\bar{a}))$, то $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}') \models \Phi(\varkappa(\varphi(\bar{a})))$.

Через $M^{<\omega}$ обозначим множество всех конечных последовательностей элементов из M. Из предложения и леммы вытекает

Следствие. *Пусть для алгебраической системы $\mathfrak{M}$ справедливо условие: для любой конечной последовательности $\bar{a} \in M^{<\omega}$ существует n-местная Σ-функция f в $\mathfrak{M}$ такая, что для любой последовательности $\bar{b} \in M^{<\omega}$ найдутся последовательность $\bar{c} \in M^n$, элемент $d \in M$ и вложения φ^ε, $\varepsilon < 2$, для которых*
1) $f(\bar{c}) = d$,
2) $\varphi^\varepsilon \restriction \mathrm{sp}\, \bar{a} = \mathrm{id}$, $\varepsilon < 2$, $\varphi^0(b_k) = \varphi^1(b_k)$, $\varphi^0(c_i) = \varphi^1(c_i)$,
3) $\varphi^0(d) \neq \varphi^1(d)$.
Тогда в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ не существует универсальной Σ-функции.

Действительно, f является Σ-функцией и в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. По лемме вложения φ^ε продолжаются до вложения $\varphi^{\varepsilon *} : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Отсюда в силу предложения получаем требуемое. $\square$

Теорема. *Существует дерево T высоты $\mathrm{ht}(T) = 4$ такое, что в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(T)$ над T не существует универсальной Σ-функции.*

Доказательство. Пусть дерево T высоты 4 таково, что существует бесконечно много непосредственных последователей a_i, b_i, $i \in \omega$, корня r дерева T.

Для a_i и b_i существует соответственно бесконечно много непосредственных последователей c_{ij} и d_{ij}, $j \in \omega$, и вершина c_{ij} имеет только два непосредственных последователя e_{ij}, e'_{ij}, а d_{ij} — только три непосредственных последователя $f_{ij}, f'_{ij}, f''_{ij}$. Докажем, что для дерева T справедливо условие следствия. Пусть $\bar{a} \in T^{<\omega}$ и

$$[\bar{a}]_T = \{x \in T \mid \exists y \in \operatorname{sp} \bar{a}\ \exists z\ (y \neq r \ \&\ z \neq r \ \&\ (z \leq y \vee y \leq z) \ \&\ (x \leq z \vee z \leq x))\}.$$

Легко проверить, что существует наименьшее число α такое, что

$$[\bar{a}]_T \subseteq \{r, \check{a}_i, \check{b}_i \mid i < \alpha\}.$$

Определим Σ-функцию f с параметром a_α, положив

$$f(x) = y \Leftrightarrow \exists z\ (x > z > a_\alpha \ \&\ y > z \ \&\ x \neq y).$$

Тогда $f(e_{\alpha i}) = e'_{\alpha i}$, $f(e'_{\alpha i}) = e_{\alpha i}$ для любого $i \in \omega$.

Пусть дана произвольная последовательность $\bar{b}_0 \in T^{<\omega}$. Выберем такое число m, что $c_{\alpha m}, e_{\alpha m}, e'_{\alpha m} \notin \operatorname{sp} \bar{b}_0$. Существует вложение $\varphi^0 : T \to T$ такое, что $\varphi^0 \restriction \check{a}_i = \varphi^0 \restriction \check{b}_i = \mathrm{id}$, $i < \alpha$, $\varphi^0(a_\alpha) = b_\alpha$, $\varphi^0(c_{\alpha j}) = d_{\alpha j}$, $j \in \omega$. Так как $d_{\alpha m}$ имеет три непосредственных последователя, существует вершина v, не принадлежащая множеству $\{\varphi^0(e_{\alpha m}), \varphi^0(e'_{\alpha m})\}$.

Определим отображение φ^1, положив

$$\varphi^1(e'_{\alpha m}) = v, \quad \varphi^1(x) = \varphi^0(x), \quad x \neq e'_{\alpha m}.$$

Легко проверить, что для последовательностей $\bar{a}, \bar{b}_0$, функции f, элементов $c \rightleftharpoons e_{\alpha i}$, $d \rightleftharpoons e'_{\alpha i}$ и вложений φ^0, φ^1 справедливо условие следствия, а потому в $\mathbb{HF}(T)$ не существует универсальной Σ-функции. Теорема доказана. $\square$

Автор выражает благодарность С. С. Гончарову за постановку задачи и внимание к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. М.: Экономика, 2000. (Сибирская школа алгебры и логики).
2. *Руднев В. А.* Об универсальной рекурсивной функции на допустимых множествах // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 4. С. 425–436.
3. *Морозов А. С., Пузаренко В. Г.* О Σ-подмножествах натуральных чисел // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 291–320.
4. *Калимулин И. Ш., Пузаренко В. Г.* О вычислимости на структурах // Мат. тр. 2004. Т. 7, № 2. С. 35–72.
5. *Пузаренко В. Г.* К вычислимости на специальных моделях // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 185–208.
6. *Хисамиев А. Н.* О Σ-подмножествах натуральных чисел над абелевыми группами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 695–706.
7. *Хисамиев А. Н.* Σ-ограниченные алгебраические системы и универсальные функции. I // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 217–235.
8. *Хисамиев А. Н.* Σ-ограниченные алгебраические системы и универсальные функции. II // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 676–693.

Статья поступила 30 мая 2011 г.

Хисамиев Асылхан Назифович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
hisamiev@math.nsc.ru