Сибирский математический журнал
Июль—август, 2012. Том 53, № 4

УДК 517.5

ОБ ОЦЕНКЕ МЕРЫ ОБРАЗА ШАРА

Р. Р. Салимов

Аннотация. Изучается класс кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля. Установлен критерий принадлежности функций этому классу. Решена проблема, восходящая к М. А. Лаврентьеву (см. [1]) об оценке меры образа шара при таких отображениях и исследовано их асимптотическое поведение в точке.

Ключевые слова: p-модуль, p-емкость, Q-гомеоморфизм, кольцевой Q-гомеоморфизм, квазиконформное отображение, квазиконформное в среднем.

1. Введение

Напомним некоторые определения. Борелевская функция $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, если

$$\int\limits_{\gamma} \varrho(x)\, ds \geq 1 \tag{1.1}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Множество допустимых функций обозначается через $\operatorname{adm}\Gamma$ Пусть $p \geq 1$. Тогда *p-модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x)\, dm(x). \tag{1.2}$$

Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем полагаем $M(\Gamma) = M_n(\Gamma)$.

Напомним, что в основу геометрического определения квазиконформных отображений, заданных в области G из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, положено условие

$$M(f\Gamma) \leq KM(\Gamma) \tag{1.3}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области G (см. [2, 13.1]).

Одной из целей данной работы является получение аналога следующего результата из [3] для более общих классов.

Предположим, что $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}^3$ — K-квазиконформное отображение такое, что $f(0) = 0$. Тогда

$$\liminf_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha}} \leq 1,$$

где α — постоянная, зависящая только от коэффициента квазиконформности K.

Всюду далее $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n = B(0,1)$, $B_r = B(0, r)$, ω_{n-1} — площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n — объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n\Omega_n = \omega_{n-1}$. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, и $Q : G \to [0, \infty]$ —

измеримая функция. Тогда $q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} Q(x)\,d\mathscr{A}$ обозначает среднее интегральное значение над сферой $|x-x_0|=r$, где $d\mathscr{A}$ — элемент площади поверхности. В дальнейшем при $x_0=0$ полагаем $q(t)=q_{x_0}(t)$. Запись $m(A)$ обозначает меру Лебега множества A в $\mathbb{R}^n$.

Следуя [4], пару $E=(A,C)$, где $A\subset\mathbb{R}^n$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором.* Конденсатор E называется *кольцевым конденсатором*, если $B=A\backslash C$ — кольцо, т. е. если B — область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B$ состоит в точности из двух компонент. Конденсатор E называется *ограниченным конденсатором*, если множество A ограничено. Говорят также, что конденсатор $E=(A,C)$ *лежит в области* G, если $A\subset G$. Очевидно, что если $f:G\to\mathbb{R}^n$ — непрерывное, открытое отображение и $E=(A,C)$ — конденсатор в G, то (fA,fC) также конденсатор в fG. Далее $fE=(fA,fC)$.

Пусть $E=(A,C)$ — конденсатор. Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u:A\to\mathbb{R}^1$ с компактным носителем, $W_0(E)=W_0(A,C)$ — семейство неотрицательных функций $u:A\to\mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u\in C_0(A)$, 2) $u(x)\geq 1$ для $x\in C$ и 3) u принадлежит классу ACL, и пусть

$$|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n}(\partial_i u)^2\right)^{1/2}. \tag{1.4}$$

При $p\geq 1$ величину

$$\operatorname{cap}_p E = \operatorname{cap}_p(A,C) = \inf_{u\in W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u|^p\,dm(x) \tag{1.5}$$

называют *p-емкостью* конденсатора E. В дальнейшем будем использовать равенство

$$\operatorname{cap}_p E = M_p(\Delta(\partial A,\partial C; A\setminus C)), \tag{1.6}$$

где для множеств $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ и $\mathscr{S}_3$ в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, через $\Delta(\mathscr{S}_1,\mathscr{S}_2;\mathscr{S}_3)$ обозначается семейство всех непрерывных кривых, соединяющих $\mathscr{S}_1$ и $\mathscr{S}_2$ в $\mathscr{S}_3$ (см. [5–7]). Емкости в контексте теории отображений хорошо отражены в монографии [8].

Известно, что при $p\geq 1$

$$\operatorname{cap}_p E \geq \frac{(\inf m_{n-1}\sigma)^p}{[m(A\setminus C)]^{p-1}}, \tag{1.7}$$

где $m_{n-1}\sigma$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега C^∞-многообразия σ, являющегося границей $\sigma=\partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в A, а точная нижняя грань берется по всем таким σ (см. из [9, предложение 5]).

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, и пусть $Q:G\to[0,\infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f:G\to\mathbb{R}^n$ будем называть *Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля*, если

$$M_p(f\Gamma) \leq \int\limits_G Q(x)\varrho^p(x)\,dm(x) \tag{1.8}$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции ϱ для Γ.

Определение Q-гомеоморфизма относительно p-модуля при $p \neq n$ впервые встречается в [10]. В [11] неравенство вида (1.8) уставлено для отображений, квазиконформных в среднем при $p \neq n$.

Напомним следующие термины. Пусть $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$– произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E, F, G)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в G, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$. Пусть $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial G)$ и $Q : G \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Положим

$$A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}, \tag{1.9}$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2. \tag{1.10}$$

Согласно [12] для квазиконформности отображений достаточно требовать, чтобы условие вида (1.8) при $Q(x) \leq K$ п. в. и $p = n$ было выполнено для семейств кривых, соединяющих граничные компоненты произвольного сферического кольца из области G. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : G \to \mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке* $x_0 \in G$ $(1 < p \leq n)$, если соотношение

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fG)) \leq \int\limits_A Q(x)\eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{1.11}$$

выполнено для любого кольца $A = A(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geq 1. \tag{1.12}$$

Говорят, что гомеоморфизм $f : G \to \mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в области* G, если условие (1.11) выполнено для всех точек $x_0 \in G$.

Понятие кольцевого Q-гомеоморфизма относительно p-модуля при $p = 2$ было впервые введено и использовалось для изучения вырожденных уравнений Бельтрами на плоскости в [13] и при $p = n$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — в [14]. Кроме того, кольцевые Q-отображения, допускающие точки ветвления, изучались в [15].

2. Характеризация кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля

Ниже мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$ и $a/0 = \infty$ для $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$ (см., например, [16, с. 6]).

Лемма 2.1. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $Q : G \to [0, \infty]$– измеримая функция, $q_{x_0}(r)$ — среднее значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$. Положим*

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)} \tag{2.1}$$

и $S_j = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_j\}$, $j = 1, 2$, где $x_0 \in G$ и $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial G)$. Тогда для любого кольцевого Q-гомеоморфизма $f : G \to \mathbb{R}^n$ относительно p-модуля в точке x_0

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fG)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}, \tag{2.2}$$

где ω_{n-1} — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно полагать, что $I \neq 0$, так как в противном случае соотношение (2.2), очевидно, выполнено. Можно также считать, что $I \neq \infty$, поскольку в противном случае в соотношении (2.2) можно рассмотреть $Q(x) + \delta$ (со сколь угодно малым $\delta > 0$) вместо $Q(x)$, а затем перейти к пределу при $\delta \to 0$.

Пусть $I \neq \infty$. Тогда $q_{x_0}(r) \neq 0$ п. в. на (r_1, r_2). Положим

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/\left[t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)\right], & t \in (r_1, r_2), \\ 0, & t \notin (r_1, r_2). \end{cases} \tag{2.3}$$

Тогда

$$\int\limits_A Q(x)\psi^p(|x - x_0|)\, dm(x) = \omega_{n-1} I, \tag{2.4}$$

где $A = A(x_0, r_1, r_2)$.

Пусть Γ — семейство всех кривых, соединяющих сферы S_1 и S_2 в кольце A. Пусть также ψ^* — борелевская функция такая, что $\psi^*(t) = \psi(t)$ для п. в. $t \in [0, \infty]$. Такая функция ψ^* существует по теореме Лузина (см., например, [17, п. 2.3.5; 16, с. 69]. Тогда функция

$$\rho(x) = \psi^*(|x - x_0|)/I$$

допустима для семейства Γ и согласно соотношению (2.4) для любого кольцевого Q-гомеоморфизма относительно p-модуля имеем

$$M_p(f\Gamma) \leq \int\limits_A Q(x)\rho^p(x)\, dm(x) = \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}. \tag{2.5}$$

Лемма 2.1 доказана.

Следующая лемма показывает, что для кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля неравенство (2.2), вообще говоря, не может быть улучшено.

Лемма 2.2. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial G)$, $A = A(x_0, r_1, r_2)$, и пусть $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — измеримая функция. Положим*

$$\eta_0(r) = \frac{1}{I r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}, \tag{2.6}$$

где $q_{x_0}(r)$ — среднее значение функции $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$ и I — величина, определенная в лемме 2.1. Если $q_{x_0}(r) \neq \infty$ для п. в. $r \in (r_1, r_2)$, то

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}} = \int\limits_A Q(x)\eta_0^p(|x - x_0|)\, dm(x) \leq \int\limits_A Q(x)\eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{2.7}$$

для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1. \tag{2.8}$$

Доказательство. Если $I=\infty$, то левая часть в соотношении (2.7) равна нулю и неравенство в этом случае очевидно. Если $I=0$, то $q_{x_0}(r)=\infty$ для п. в. $r\in(r_1,r_2)$ и обе части неравенства (2.7) равны бесконечности, что невозможно в условиях леммы. Поэтому можно считать, что $0<I<\infty$. Тогда из (2.1) и (2.8) следует, что $q_{x_0}(r)\neq 0$ и $\eta(r)\neq\infty$ п. в. в интервале (r_1,r_2). Полагая

$$\lambda(r)=r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)\eta(r),\quad w(r)=1/r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r),$$

имеем

$$\eta(r)=\lambda(r)w(r)\quad \text{п. в. в } (r_1,r_2)$$

и

$$C:=\int\limits_A Q(x)\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x)=\omega_{n-1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\lambda^p(r)w(r)\,dr. \tag{2.9}$$

Применяя неравенство Йенсена с весом (см., например, [18, теорема 2.6.2]) к выпуклой функции $\varphi(t)=t^p$, заданной в интервале $\Omega=(r_1,r_2)$, с вероятностной мерой

$$\nu(E)=\frac{1}{I}\int\limits_E w(r)\,dr, \tag{2.10}$$

получаем, что

$$\left(⨍\lambda^p(r)w(r)\,dr\right)^{1/p}\geq ⨍\lambda(r)w(r)\,dr=\frac{1}{I}, \tag{2.11}$$

где мы также использовали тот факт, что $\eta(r)=\lambda(r)w(r)$ удовлетворяет соотношению (2.8). Отсюда

$$C\geq\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}, \tag{2.12}$$

что и доказывает (2.7).

Ниже приведен критерий принадлежности классу кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля, который ранее был также установлен в [14] при $p=n$ (см. также [19]). Кроме того, при $p=n$ для кольцевых Q-отображений с ветвлением аналогичный критерий был установлен в [20].

Теорема 2.3. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, и пусть $Q:G\to[0,\infty]$ — локально интегрируемая функция. Гомеоморфизм $f:G\to\mathbb{R}^n$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке $x_0\in G$ тогда и только тогда, когда для любых $0<r_1<r_2<d_0=\operatorname{dist}(x_0,\partial G)$*

$$M_p(\Delta(fS_1,fS_2fG))\leq\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}, \tag{2.13}$$

где S_1 и S_2 — сферы $|x-x_0|=r_1$ и $|x-x_0|=r_2$, ω_{n-1} — площадь единичной сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$,

$$I=I(x_0,r_1,r_2)=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)},$$

$q_{x_0}(r)$ — среднее значение функции Q над сферой $|x-x_0|=r$.

Отметим также, что инфимум в выражении справа в (1.11) достигается для функции

$$\eta_0(r)=\frac{1}{Ir^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}. \tag{2.14}$$

3. Искажение объема

В этом разделе получена оценка меры образа шара при кольцевых Q-гомеоморфизмах относительно p-модуля. Впервые оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии М. А. Лаврентьева (см. [1]). В. И. Кругликовым была получена оценка меры образа шара для отображений квазиконформных в среднем в $\mathbb{R}^n$ (см. [9, лемма 9]).

Теорема 3.1. *Пусть $n \geq 2$, f — кольцевой Q-гомеоморфизм $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{B}^n$ относительно p-модуля. Тогда при $1 < p < n$ имеет место оценка*

$$m(fB_r) \leq \Omega_n \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{n(p-1)}{n-p}}, \tag{3.1}$$

а при $p = n$ —

$$m(fB_r) \leq \Omega_n \exp\left\{-n \int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\}, \tag{3.2}$$

где Ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $R_t = \{x \in \mathbb{B}^n : t < |x| < t + \Delta t\}$. Пусть $(A_{t+\Delta t}, C_t)$ — конденсатор, где $C_t = \overline{B}_t, A_{t+\Delta t} = B_{t+\Delta t}$. Тогда $(fA_{t+\Delta t}, fC_t)$ — кольцевой конденсатор в $\mathbb{R}^n$ и согласно (1.6) имеем

$$\operatorname{cap}_p(fA_{t+\Delta t}, fC_t) = M_p(\Delta(\partial fA_{t+\Delta t}, \partial fC_t; fR_t)). \tag{3.3}$$

В силу неравенства (1.7) получим

$$\operatorname{cap}_p(fA_{t+\Delta t}, fC_t) \geq \frac{(\inf m_{n-1}\sigma)^p}{m(fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t)^{p-1}}, \tag{3.4}$$

где $m_{n-1}\sigma$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега C^∞-многообразия σ, являющегося границей $\sigma = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего fC_t и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в $fA_{t+\Delta t}$, а точная нижняя грань берется по всем таким σ.

С другой стороны, в силу леммы 2.1 имеем

$$\operatorname{cap}_p(fA_{t+\Delta t}, fC_t) \leq \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}} q^{\frac{1}{p-1}}(s)}\right)^{p-1}}. \tag{3.5}$$

Комбинируя неравенства (3.4) и (3.5), приходим к неравенству

$$\frac{(\inf m_{n-1}\sigma)^p}{m(fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t)^{p-1}} \leq \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}} q^{\frac{1}{p-1}}(s)}\right)^{p-1}}.$$

Воспользовавшись изопериметрическим неравенством

$$\inf m_{n-1}\sigma \geq n\Omega_n^{\frac{1}{n}} (m(fC_t))^{\frac{n-1}{n}},$$

получим

$$n\Omega_n^{\frac{1}{n}} (m(fC_t))^{\frac{n-1}{n}} \leq \omega_{n-1}^{\frac{1}{p}} \left(\frac{m(fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t)}{\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}} q^{\frac{1}{p-1}}(s)}}\right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{3.6}$$

Полагая $\Phi(t) := m(fB_t)$, из соотношения (3.6) имеем

$$n\Omega_n^{\frac{1}{n}}\Phi^{\frac{n-1}{n}}(t) \le \omega_{n-1}^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t}}{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}q^{\frac{1}{p-1}}(s)}}\right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{3.7}$$

В силу теоремы 2.3 и гомеоморфности отображения f

$$\frac{1}{s^{\frac{n-1}{p-1}}q^{\frac{1}{p-1}}(s)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1).$$

Устремляя в неравенстве (3.7) Δt к нулю и учитывая монотонное возрастание функции $\Phi(t)$ по $t \in (0,1)$ и равенство $\omega_{n-1} = n\Omega_n$, для п. в. t имеем существование производной $\Phi'(t)$ и

$$\frac{n\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q^{\frac{1}{p-1}}(t)} \le \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}}(t)}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим неравенство (3.8) при $1 < p < n$. Интегрируя обе части неравенства по $t \in [r,1]$ и учитывая, что

$$\int\limits_r^1 \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p(n-1)}{n(p-1)}}(t)}\,dt \le \frac{n(p-1)}{p-n}\left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(1) - \Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r)\right)$$

(см., например, [16, теорема IV.7.4]), получим

$$\Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q^{\frac{1}{p-1}}(t)} \le \frac{p-1}{p-n}\left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(1) - \Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(r)\right). \tag{3.9}$$

Из неравенства (3.9) следует, что

$$\Phi(r) \le \left(\Phi^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(1) + \Omega_n^{\frac{p-n}{n(p-1)}}\frac{n-p}{p-1}\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}}.$$

Наконец, учитывая, что $m(f\mathbb{B}^n) \le \Omega_n$, приходим к (3.1).

Осталось рассмотреть случай $p = n$. В этом случае неравенство (3.8) примет вид

$$\frac{n}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)} \le \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}. \tag{3.10}$$

Интегрируя обе части неравенства (3.10) по $t \in [r,1]$ и учитывая, что

$$\int\limits_r^1 \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\,dt \le \ln\frac{\Phi(1)}{\Phi(r)}$$

(см., например, [16, теорема IV.7.4]), получим

$$n\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)} \le \ln\frac{\Phi(1)}{\Phi(r)}$$

и, следовательно,

$$\exp\left\{n\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\} \le \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)},$$

а потому

$$\Phi(r) \le \Phi(1)\exp\left\{-n\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\},$$

что и приводит нас к неравенству (3.2), поскольку $\Phi(1) \le \Omega_n$.

Теорема 3.2. *Предположим, что $p \in (1,n]$, $Q_p : \mathbb{B} \to [0,\infty)$ — заданная локально интегрируемая функция такая, что*

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q^{\frac{1}{p-1}}(t)} = \infty \tag{3.11}$$

и

$$\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q^{\frac{1}{p-1}}(t)} < \infty \tag{3.12}$$

для всякого $r \in (0,1)$. Тогда отображения

$$f_p(x) = \frac{x}{|x|}\left(1 + \frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}} \tag{3.13}$$

и при $p = n$

$$f_n(x) = \frac{x}{|x|}\exp\left\{-\int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\} \tag{3.14}$$

являются кольцевыми Q_p-гомеоморфизмами относительно p-модуля в нуле, для которых выполняются равенства в (3.1) и (3.2) соответственно.

Доказательство. Покажем, что отображения, определенные таким образом, действительно является кольцевыми Q-гомеоморфизмами относительно p-модуля в точке $x_0 = 0$. Рассмотрим кольцо $A = A(0, r_1, r_2)$. Обозначим через Γ семейство всех кривых, соединяющих сферы $S(0, r_1)$ и $S(0, r_2)$ в кольце A. Заметим, что отображение преобразует кольцо $A(0, r_1, r_2)$ в кольцо $\widetilde{A} = (0, R_p(r_1), R_p(r_2))$, где

$$R_p(r_i) = \exp\left\{-\int\limits_{r_i}^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\} \quad \text{при } p = n, \tag{3.15}$$

$$R_p(r_i) = \left(1 + \frac{n-p}{p-1}\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}} \quad \text{при } 1 < p < n. \tag{3.16}$$

Тогда p-модуль семейства кривых вычисляется в явном виде (см., например, [21, (2)]):

$$M_p(f\Gamma) = \omega_{n-1}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(R_p^{\frac{p-n}{p-1}}(r_1) - R_p^{\frac{p-n}{p-1}}(r_2)\right)^{1-p} \quad \text{при } 1 < p < n, \tag{3.17}$$

$$M_n(f\Gamma) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\ln\frac{R_n(r_2)}{R_n(r_1)}\right)^{n-1}} \quad \text{при } p = n. \tag{3.18}$$

Подставляя в (3.17) и (3.18) значения $R_p(r_1)$ и $R_p(r_2)$, определенные выше, выводим, что

$$M_p(f\Gamma) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}.$$

Следовательно, в силу теоремы 2.3 гомеоморфизм f_p является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке $x_0 = 0$.

Замечание. Теорема 3.2 показывает точность оценок (3.1) и (3.2). В частности, выбирая $q(t) = 1$, получаем простые примеры таких отображений.

4. Поведение в точке

Теорема 3.1 позволяет также описать асимптотическое поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля в нуле.

Предложение 4.1. *Пусть f — гомеоморфизм $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{B}^n$, $n \geq 2$, $f(0) = 0$. Если*

$$m(fB_r) \leq \Omega_n R^n(r), \tag{4.1}$$

то

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{R(|x|)} \leq 1. \tag{4.2}$$

Доказательство. Положим $l_f(r) = \min\limits_{|x|=r} |f(x)|$. Учитывая, что $f(0) = 0$, получаем $\Omega_n l_f^n(r) \leq m(fB_r)$ и, следовательно,

$$l_f(r) \leq \left(\frac{m(fB_r)}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.3}$$

Применяя неравенство (4.1), имеем

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{R(|x|)} = \liminf_{r\to 0} \frac{l_f(r)}{R(r)} \leq \liminf_{r\to 0} \left(\frac{m(fB_r)}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{R(r)} \leq 1.$$

Предложение доказано.

Комбинируя теорему 3.1 и предложение 4.1 с функцией

$$R(r) = \left(1 + \frac{n-p}{p-1}\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}} \qquad \text{при } 1 < p < n,$$

$$R(r) = \exp\left\{-\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{\frac{1}{n-1}}(t)}\right\} \quad \text{при } p = n,$$

получаем следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть f — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{B}^n$, $n \geq 2$ и $f(0) = 0$. Тогда при $1 < p < n$ имеет место оценка*

$$\liminf_{x \to 0} |f(x)| \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_{|x|}^{1} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{\frac{p-1}{n-p}} \leq 1, \tag{4.4}$$

а при $p = n$ —

$$\liminf_{x \to 0} |f(x)| \exp \left\{ \int\limits_{|x|}^{1} \frac{dt}{t q^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right\} \leq 1. \tag{4.5}$$

Следствие 4.3. *Пусть f — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{B}^n$, $n \geq 2$ и $f(0) = 0$. Тогда при $1 < p < n$ имеет место оценка*

$$\liminf_{x \to 0} |f(x)| \left(\int\limits_{|x|}^{1} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{\frac{p-1}{n-p}} < \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^{\frac{p-1}{n-p}}. \tag{4.6}$$

Развиваемая в работе теория кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля применима, в частности, к отображениям, квазиконформным в среднем [9, 11], и к так называемым (p, q)-квазиконформным отображениям [22].

Автор благодарен профессору Владимиру Яковлевичу Гутлянскому за постановку восходящей к М. А. Лаврентьеву задачи об оценке меры образа шара в классе квазиконформных отображений на комплексной плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа.. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
2. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin etc.: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 229).
3. *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. 1965. V. 25. P. 175–203.
4. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. 1969. V. 448. P. 1–40.
5. *Gehring F. W.* Quasiconformal mappings in complex analysis and its applications. Vienna: Int. Atomic Energy Agency, 1976. V. 2.
6. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Arc. Mat. 1975. V. 13, N 1. P. 131–144.
7. *Шлык В. А.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 216–221.
8. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
9. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130, № 2. С. 185–206.
10. *Golberg A.* Differential properties of (α, Q)-homeomorphisms // Further Progress in Analysis / Proc. 6th ISAAC Congr. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2009. P. 218–228.
11. *Golberg A.* Integrally quasiconformal mappings in space // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 2010. Т. 7, № 2. С. 53–64.
12. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 103, N 3. P. 353–393.
13. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. Anal. Math. 2005. V. 96, N 1. P. 117–150.

14. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1361–1376.
15. *Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 6. С. 131–158.
16. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
17. *Federer H.* Geometric measure theory. Berlin etc.: Springer-Verl., 1969.
18. *Ransford T.* Potential theory in the complex plane. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
19. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. New York: Springer-Verl., 2009. (Springer Monogr. Math.).
20. *Севостьянов Е. А.* Об интегральной характеризации некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61, № 10. С. 1367–1380.
21. *Gehring F. W.* Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, New York, 1969). Ann. Math. Stud. 1971. V. 66. P. 175–193.
22. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.

Статья поступила 24 мая 2011 г., окончательный вариант — 30 декабря 2011 г.

Салимов Руслан Радикович
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина
ruslan623@yandex.ru; salimov07@rambler.ru