Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 512.54.0

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ О ТЕОРИЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ГРУПП БАУМСЛАГА — СОЛИТЭРА

М. Касальс-Руис, И. В. Казачков

Аннотация. Охарактеризованы конечно порожденные группы, элементарно эквивалентные разрешимым группам Баумслага — Солитэра $\mathrm{BS}(m,1)$. Доказано, что конечно порожденная группа G элементарно эквивалентна $\mathrm{BS}(m,1)$ тогда и только тогда, когда G изоморфна $\mathrm{BS}(m,1)$. Также показано, что две группы Баумслага — Солитэра универсально (экзистенциально) эквивалентны тогда и только тогда, когда они элементарно эквивалентны, что равносильно их изоморфности.

Ключевые слова: группы Баумслага — Солитэра, элементарная эквивалентность групп, разрешимая группа.

1. Введение

Проблема классификации объектов с точностью до некоторой эквивалентности — одна из основных проблем математики. В зависимости от области математики рассматривается та или иная эквивалентность: в алгебре — классификация с точностью до изоморфизма, в теории моделей — классификация по элементарным свойствам, в геометрической теории групп — классификация с точностью до квази-изометрии, и т. д. В данной статье мы рассматриваем проблему классификации групп с точки зрения теории моделей, т. е. проблему классификации с точностью до элементарной эквивалентности.

Обычно задача описания произвольных групп, элементарно эквивалентных данной, исключительно сложна. Единственный пример (кроме класса конечных групп) полного решения этой задачи — это знаменитый результат (см. [1]) о классификации абелевых групп по их элементарным свойствам.

Также трудна задача элементарной классификации групп и в классе конечно порожденных групп. В данном случае известны только несколько примеров такой классификации: классификация конечно порожденных нильпотентных групп, недавнее решение проблемы Тарского об элементарной теории свободной группы и случай гиперболических групп без кручения. Основной результат статьи [2] утверждает, что две конечно порожденные нильпотентные группы G и H элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $G\times\mathbb{Z} \simeq H\times\mathbb{Z}$. В [3, 4] классифицированы группы, элементарно эквивалентные свободной группе конечного ранга. Методы, разработанные в [5], обобщаются и на случай гиперболических групп без кручения.

Результаты данной статьи получены авторами во время их пребывания в Омском филиале Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Авторы выражают благодарность коллегам за гостеприимство (особенно В. Н. Ремесленникову). Работа выполнена при финансовой поддержке Programa de Formación de Investigadores del Departamento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco (первый автор), а также NSERC Postdoctoral Fellowship (второй автор).

Мы приводим классификацию конечно порожденных групп, элементарно эквивалентных некоторым разрешимым группам — группам Баумслага — Солитэра.

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{BS}(m,1)$ *— группа Баумслага — Солитэра,* $m \in \mathbb{Z}$. *Пусть* G *— конечно порожденная группа, элементарно эквивалентная группе* $\mathrm{BS}\,(m,1)$. *Тогда* G *изоморфна* $\mathrm{BS}\,(m,1)$.

Есть несколько примеров хорошего решения проблемы классификации по элементарным свойствам групп из некоторого класса. Выделим следующие результаты.

• Знаменитый результат А. И. Мальцева [6] утверждает, что две классические линейные группы (SL, PSL, GL, PGL) над полем элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны. Результаты Мальцева перенесены А. Михалевым и Е. Буниной на другие классы линейных групп, на некоторые алгебраические группы и группы Шевалле.

• В [7] авторы показали, что две прямоугольные группы Коксетера элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны.

• В случае разрешимых групп известно только два примера решения задачи элементарной классификации групп: в [8] показано, что конечно порожденные свободные разрешимые группы элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны; второй пример — теорема из [9], утверждающая, что две частично коммутативные метабелевы группы элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны.

В следующей теореме дана классификация групп Баумслага — Солитэра с точностью до универсальной (экзистенциальной) эквивалентности.

Теорема 2. *Две группы Баумслага — Солитэра* $\mathrm{BS}(m,n)$ *и* $\mathrm{BS}(k,l)$ *экзистенциально* (*универсально*) *эквивалентны тогда и только тогда, когда существует* $\epsilon = \pm 1$ *такое, что* $m = \epsilon k$ *и* $n = \epsilon l$ *или* $m = \epsilon l$ *и* $n = \epsilon k$.

Как следствие, получаем новое доказательство основного результата из [10] и следующий более общий результат.

Следствие 3. *Для групп Баумслага — Солитэра* $\mathrm{BS}(m,n)$ *и* $\mathrm{BS}(k,l)$ *следующие утверждения эквивалентны:*
1) $m = \epsilon k$ *и* $n = \epsilon l$ *или* $m = \epsilon l$ *и* $n = \epsilon k$, где $\epsilon = \pm 1$;
2) $\mathrm{BS}(m,n)$ *и* $\mathrm{BS}(k,l)$ *изоморфны;*
3) $\mathrm{BS}(m,n)$ *и* $\mathrm{BS}(k,l)$ *элементарно эквивалентны;*
4) $\mathrm{BS}(m,n)$ *и* $\mathrm{BS}(k,l)$ *экзистенциально* (*универсально*) *эквивалентны.*

Группы Баумслага — Солитэра впервые введены в [11] в качестве простых примеров нехопфовых групп. Напомним, что *группой Баумслага — Солитэра* называется следующая группа, заданная порождающими и одним определяющим соотношением: $\mathrm{BS}(m,n) = \langle a, b \mid a^{-1}b^m a = b^n \rangle$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \neq 0$. Эти группы обладают целым рядом очень интересных свойств и служат важным источником идей в теории групп. Например, они являются самым простым примером групп с экспоненциальной изопериметрической функцией и стали первыми примерами асинхронно-автоматных, но не автоматных групп, и т. д.

Предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями и результатами теории моделей и логики первого порядка. Все понятия и результаты, используемые в этой статье, могут быть найдены в первых главах книги [12].

Авторы очень признательны рецензенту за внимательное отношение к работе и конструктивные замечания, а также благодарны Денису Осину, который во время написания этой заметки обратил внимание на статью [13], где доказан результат, аналогичный теореме 1.

2. Доказательства теорем 1 и 2

Очевидно, что $\mathrm{BS}(m,n) \simeq \mathrm{BS}(n,m)$ и $\mathrm{BS}(m,n) \simeq \mathrm{BS}(-m,-n)$. Если $n = 1$ и $m = 1$, то $\mathrm{BS}(1,1)$ — абелева группа, $\mathrm{BS}(1,1) \simeq \mathbb{Z}^2$. Хорошо известно, что конечно порожденная группа G универсально (экзистенциально) эквивалентна $\mathbb{Z}^2$ тогда и только тогда, когда G — свободная абелева группа конечного ранга. Более того, по теореме из [1] G элементарно эквивалентна $\mathrm{BS}(1,1)$ тогда и только тогда, когда $G \simeq \mathrm{BS}(1,1) \simeq \mathbb{Z}^2$. Таким образом, без ограничения общности будем рассматривать только те группы Баумслага — Солитэра $\mathrm{BS}(m,n) = \langle a, b \mid a^{-1}b^m a = b^n\rangle$, для которых $|m| \geq |n|$, $n > 0$ и $mn \neq 1, 0$.

2.1. Доказательство теоремы 2. Определим формулу $\Upsilon_{m,n}(x)$ языка первого порядка с одной свободной переменной:

$$\Upsilon_{m,n}(x) : \begin{cases} \exists y\ (y^{-1}x^m y = x^n), & \text{если } m \neq n, \\ \exists y\ ([y,x] \neq 1) \wedge (y^{-1}x^n y = x^n), & \text{если } m = n. \end{cases}$$

В следующей лемме приведем два хорошо известных факта о группах Баумслага — Солитэра. Доказательство леммы проводится простым применением теории HNN-расширений групп (см. [10, предложения 1, 2; 14, теорема 1]).

Лемма 4. (1) *Если* $\mathrm{BS}(m,n) \models \Upsilon_{k,l}(g)$, *то* g *сопряжен с элементом* b^p *для некоторого* $p \in \mathbb{Z}$.

(2) *Пусть* $m = m_1 d$, $n = n_1 d$, *где* $d = (m,n)$ — *наибольший общий делитель* m *и* n, *и пусть* p *и* q — *произвольные целые числа,* $p \neq q$. *Тогда элементы* b^p *и* b^q *сопряжены в группе* $\mathrm{BS}(m,n)$ *тогда и только тогда, когда существуют целые числа* i *и* r, *где* $i > 0$, *такие, что либо* $p = m_1^i dr$ *и* $q = n_1^i dr$, *либо* $p = n_1^i dr$ *и* $q = m_1^i dr$.

Определим формулу $\Theta_{m,n}(x)$ языка первого порядка с одной свободной переменной x:

$$\Theta_{m,n}(x) : \begin{cases} \exists y\ (y^{-1}x^m y = x^n) \wedge \bigwedge\limits_{d \mid (m,n)} y^{-1}x^{\frac{m}{d}}y \neq x^{\frac{n}{d}}, & \text{если } m \neq n, \\ \exists y\ (y^{-1}x^n y = x^n) \wedge \bigwedge\limits_{d \mid n,\, d>1} y^{-1}x^{\frac{n}{d}}y \neq x^{\frac{n}{d}}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Очевидно, что для любых m и n группа $\mathrm{BS}(m,n)$ удовлетворяет формуле $\exists x \Theta_{m,n}(x)$ (достаточно взять порождающие a и b группы $\mathrm{BS}(m,n)$ в качестве свидетелей). Рассмотрим группу $\mathrm{BS}(k,l)$ и предположим, что $\mathrm{BS}(k,l) \models \exists x \Theta_{m,n}(x)$. По лемме 4(1) если $\mathrm{BS}(k,l) \models \Upsilon_{m,n}(x)$, то элемент x группы $\mathrm{BS}(k,l)$ сопряжен с b^p для некоторого $p \in \mathbb{Z}$. Без ограничения общности будем считать, что $x = b^p$, $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$. По лемме 4(2) элементы b^{pm} и b^{pn} сопряжены в $\mathrm{BS}(k,l)$ тогда и только тогда, когда $pm = k_1^i (k,l) r$ и $pn = l_1^i (k,l) r$, где $i \in \mathbb{N}$, $0 < r \in \mathbb{Z}$, $k = k_1(k,l)$ и $l = l_1(k,l)$. Так как $(k_1, l_1) = 1$, то p является делителем $(k,l)r$. Следовательно, k_1 делит m, а l_1 делит n. Аналогичными рассуждениями показывается, что если $\mathrm{BS}(m,n) \models \exists x \Theta_{k,l}(x)$, то m_1 делит k, а n_1 делит l.

Из равенств $pm = pm_1(m,n) = k_1^i (k,l) r$, $pn = pn_1(m,n) = l_1^i (k,l) r$ и в силу $(k_1, l_1) = 1$ получаем, что (m,n) делит $(k,l)r$. Предположим, что (m,n)

не является делителем (k, l). Тогда (m, n) можно представить в виде $(m, n) = d'd$, где $d' = ((k, l), (m, n))$, а d является делителем r, $d > 1$. Следовательно, $\frac{pm}{d} = k_1^i (k, l) \frac{r}{d}$, $\frac{pn}{d} = l_1^i (k, l) \frac{r}{d}$ и $\frac{r}{d} \in \mathbb{Z}$. По лемме 4(2) элемент $b^{\frac{pm}{d}}$ сопряжен с элементом $b^{\frac{pn}{d}}$ (причем, как нетрудно видеть, тем же элементом, который сопрягает b^{pm} с b^{pn}). Таким образом, так как d является делителем (m, n), то $\mathrm{BS}(k, l) \not\models \exists x \Theta_{m,n}(x)$; противоречие. Следовательно, если $\mathrm{BS}(k, l) \models \exists x \Theta_{m,n}(x)$, то (m, n) делит (k, l). Поэтому если группы $\mathrm{BS}(m, n)$ и $\mathrm{BS}(k, l)$ универсально (экзистенциально) эквивалентны, то $(m, n) = (k, l)$.

Так как $(m, n) = (k, l)$, то $pm_1 = k_1^i r$, $pn_1 = l_1^i r$, следовательно, поскольку p делит r, то k_1 является делителем m_1, а l_1 — делителем n_1. Аналогичными рассуждениями показывается, что если $\mathrm{BS}(m, n) \models \exists x \Theta_{k,l}(x)$, то m_1 является делителем k_1, а n_1 — делителем l_1. Поэтому если группы $\mathrm{BS}(m, n)$ и $\mathrm{BS}(k, l)$ универсально (экзистенциально) эквивалентны, то $|m_1| = |k_1|$ и $n_1 = l_1$, а следовательно, $|m| = |k|$ и $n = l$. Осталось лишь заметить, что по лемме 4 $\mathrm{BS}(m, n) \models \exists x \Upsilon_{m,n}(x)$ и $\mathrm{BS}(m, n) \not\models \exists x \Upsilon_{-m,n}(x)$. Следовательно, группы $\mathrm{BS}(m, n)$ и $\mathrm{BS}(-m, n)$ универсально (экзистенциально) не эквивалентны. Теорема 2 доказана.

2.2. Доказательство теоремы 1. Напомним, что без ограничения общности мы рассматриваем только те группы Баумслага — Солитэра $\mathrm{BS}(m, n)$, для которых $|m| \geq n > 0$. Группа Баумслага — Солитэра $\mathrm{BS}(m, n)$ разрешима тогда и только тогда, когда она метабелева, а это равносильно тому, что $n = 1$.

Отображение $b \mapsto 0$ продолжается до естественного гомоморфизма группы $\mathrm{BS}(m, 1)$ на бесконечную циклическую группу. Стандартными методами показывается, что ядро этого гомоморфизма — коммутант $\mathrm{BS}(m, 1)'$ группы $\mathrm{BS}(m, 1)$ и что оно порождается элементами вида $a^{-i} b a^i$, где $i \in \mathbb{N}$ и изоморфно аддитивной группе кольца $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right]$ (см. [15]). Более того, для любого элемента $x \in \mathrm{BS}(m, 1)$ его централизатор вычисляется по формуле

$$C(x) = \begin{cases} \mathrm{BS}(m, 1)', & \text{если } x \in \mathrm{BS}(m, 1)', \\ \text{бесконечная циклическая группа} & \text{иначе.} \end{cases}$$

В следующей лемме приведем два хорошо известных факта из теории моделей (см. [12]).

Лемма 5. 1. *Пусть G — группа, и пусть N — нормальная подгруппа группы G. Предположим, что N интерпретируема в G. Тогда фактор-группа G/N также интерпретируема в G.*

2. *Предположим, что группы G_1, G_2 элементарно эквивалентны и, кроме того, H_1 интерпретируется в G_1 и H_2 интерпретируется в G_2 одними и теми же формулами. Тогда группа H_1 элементарно эквивалентна группе H_2.*

Лемма 6. 1. *В языке первого порядка теории групп существует формула $\Psi_m(x)$ с областью истинности, состоящей из элементов x группы G, централизатор которых — нормальная m-делимая абелева подгруппа группы G, содержащая коммутант G'.*

2. *Областью истинности формулы $\Psi_m(x)$ в группе* $\mathrm{BS}(m, 1)$ *является централизатор $C(b) = \mathrm{BS}(m, 1)'$.*

Доказательство. Определим формулу $\Psi_m(x)$ следующим образом:

• $\forall y \ ([y, x] = 1 \to \exists z \ y = z^m)$ — централизатор $C(x)$ элемента x является m-делимой подгруппой;

• $\forall y, z \ [x, [y, z]] = 1$ — централизатор элемента x содержит коммутант;

• $\forall y, z\ [y, x] = 1 \to [y^z, x] = 1$ — централизатор элемента x является нормальной подгруппой;

• $\forall y, z\ (([y, x] = 1 \wedge [z, x] = 1) \to [z, y] = 1)$ — централизатор элемента x является абелевой подгруппой.

Из описания централизаторов элементов группы $\mathrm{BS}(1, n)$ следует, что областью истинности формулы $\Psi_m(x)$ в $\mathrm{BS}(m, 1)$ является коммутант $\mathrm{BS}(m, 1)' = C(b)$.

Следствие 7. *Пусть* $\mathrm{BS}(m, 1)$ *— неабелева группа Баумслага — Солитэра. Тогда подгруппа* $C(b) = \mathrm{BS}(m, 1)'$ *и группа* $\mathrm{BS}(m, 1)/\,\mathrm{BS}(m, 1)'$ *интерпретируемы в* $\mathrm{BS}(m, 1)$.

Пусть G — элементарно эквивалентная $\mathrm{BS}(m, 1)$ конечно порожденная группа. Так как свойства метабелевости и свойство «быть без кручения» выразимы предложениями языка первого порядка, группа G — метабелева группа без кручения. Кроме того, поскольку $\mathrm{BS}(m, 1) \models \forall x \forall y (\Psi_m(x) \wedge \Psi_m(y) \to [x, y] = 1)$ и G элементарно эквивалентна $\mathrm{BS}(m, 1)$, область истинности $A \subset G$ формулы $\Psi_m(x)$ в G — нормальная абелева m-делимая подгруппа, содержащая коммутант G'. По лемме 6 подгруппа A элементарно эквивалентна $\mathrm{BS}(m, 1)'$ и фактор-группа $Q = G/C(x)$ элементарно эквивалентна $\mathbb{Z}$. Таким образом, имеем короткую точную последовательность

$$1 \to A \hookrightarrow G \twoheadrightarrow Q \to 1.$$

Группа G конечно порождена тогда и только тогда, когда Q — конечно порожденная абелева группа, а группа A конечно порождена как Q-модуль. По теореме из [1] так как Q — конечно порожденная группа, элементарно эквивалентная $\mathbb{Z}$, то $Q \simeq \mathbb{Z}$. Аналогично $\dim(A/kA) = \dim\bigl(\mathbb{Z}\bigl[\frac{1}{m}\bigr]/k\mathbb{Z}\bigl[\frac{1}{m}\bigr]\bigr)$ для всех k. По структурной теореме для делимых абелевых групп (см. [16]), используя тот факт, что A — конечно порожденный Q-модуль, заключаем, что $A \simeq \mathbb{Z}\bigl[\frac{1}{m}\bigr]$.

Таким образом, структура группы G полностью определяется действием Q на A. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. порождающий Q действует на A умножением на m, $-m$, $\frac{1}{m}$ или $-\frac{1}{m}$,

Случай 2. $m = kl$, где $|k| \neq 1 \neq |l|$, а порождающий Q действует на A умножением на $\frac{k}{l}$.

В случае 1 группа G изоморфна $\mathrm{BS}(m, 1)$ либо $\mathrm{BS}(-m, 1)$; в случае 2 группа G может быть задана следующими порождающими и определяющими соотношениями: $G = G_{k,l} = \langle a, b \mid a^{-1}b^k a = b^l,\ [b, a^{-i}ba^i] = 1, \text{ где } i > 0\rangle$ (см. [17–19]).

По теореме 2 группа $\mathrm{BS}(-m, 1)$ элементарно не эквивалентна $\mathrm{BS}(m, 1)$. Покажем, что группа $G_{k,l}$ также элементарно не эквивалентна $\mathrm{BS}(m, 1)$. Рассмотрим формулу $\Phi_m : \forall x\, \Psi_m(x)\, \exists y \in G/\Psi_m(x)\ x^y = x^m$. По лемме 5 Φ_n — предложение языка первого порядка теории групп. Очевидно, что $\mathrm{BS}(m, 1) \models \Phi_m$. Прямыми вычислениями показывается, что, с одной стороны, $G_{k,l} \models \Phi_m(b)$, а с другой, $b^y \neq b^m$ для всех $y \in G_{k,l}/G'_{k,l}$. Следовательно, $G_{k,l} \not\models \Phi_m$. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Szmielew W.* Elementary properties of Abelian groups // Fund. Math. 1955. V. 41. P. 203–271.
2. *Oger F.* Cancellation and elementary equivalence of finitely generated finite-by-nilpotent groups // J. London Math. Soc. (2). 1991. V. 44, N 1. P. 173–183.

3. *Kharlampovich O., Myasnikov A.* Elementary theory of free non-abelian groups // J. Algebra. 2006. V. 302, N 2. P. 451–552.
4. *Sela Z.* Diophantine geometry over groups. VI. The elementary theory of a free group // Geom. Funct. Anal. 2006. V. 16, N 3. P. 707–730.
5. *Sela Z.* Diophantine geometry over groups VII: The elementary theory of a hyperbolic group // Proc. London Math. Soc. 2009. V. 99. P. 217–273.
6. *Мальцев А. И.* Об элементарных свойствах линейных групп // Некоторые проблемы математики и механики (к шестидесятилетию академика М. А. Лаврентьева). Новосибирск: Изд-во Сиб. отд. АН СССР, 1961. С. 110–132.
7. *Casals-Ruiz M., Kazachkov I., Remeslennikov V.* Elementary equivalence of right-angled Coxeter groups and graph products of finite abelian groups // Bull. London Math. Soc. 2010. V. 42. P. 130–136.
8. *Rogers P., Smith H., Solitar D.* Tarski's problem for solvable groups // Proc. Am. Math. Soc. 1986. V. 96, N 4. P. 668–672.
9. *Гупта Ч., Тимошенко Е. И.* Частично коммутативные метабелевы группы: централизаторы и элементарная эквивалентность // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 3. С. 309–341.
10. *Молдаванский Д. И.*. Об изоморфизме групп Баумслага — Солитэра // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 12. С. 1684–1686.
11. *Baumslag G., Solitar D.* Some two generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 689. P. 199–201.
12. *Hodges W.* Model theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. (Encycl. Math. Appl.; V. 42).
13. *Nies A.* Comparing quasi-finitely axiomatizable and prime groups // J. Group Theory. 2007. V. 10. P. 347–361.
14. *Anshel M.* Non-Hopfian groups with fully invariant kernels. II // J. Algebra. 1973. V. 24. P. 473–485.
15. *Collins D.* Baumslag–Solitar group // Encyclopedia of mathematics (Ed. M. Hazewinkel). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
16. *Fuchs L.* Infinite abelian groups. New York: Acad. Press, 1970. V. 1.
17. *Gildenhuys D.* Classification of soluble groups of cohomological dimension two // Math. Z. 1979. Bd 166. S. 21–25.
18. *Bieri R.* Homological dimension of discrete groups. London: Queen Mary College (Univ. London), 1976. (Queen Mary College Math. Notes).
19. *Baumslag G., Strebel R.* Some finitely generated, infinitely related metabelian groups with trivial multiplicator // J. Algebra. 1976. V. 40. P. 46–62.

Статья поступила 15 марта 2001 г., окончательный вариант — 24 марта 2012 г.

Montserrat Casals-Ruiz (Касальс-Руис Монсеррат),
Казачков Илья Владимирович (Ilya Kazachkov)
Department of Mathematics,
1326 Stevenson Center
Vanderbilt University
Nashville, TN 37240, USA
montsecasals@gmail.com, ilya.kazachkov@gmail.com