Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 517.55

НЕАБЕЛЕВЫ 1–КОГОМОЛОГИИ И СОПРЯЖЕННОСТЬ КОНЕЧНЫХ ПОДГРУПП В НЕКОТОРЫХ РАСШИРЕНИЯХ

М. А. Шевелин

Аннотация. С помощью понятий 1-коцикла и 1-кограницы со значениями в некоммутативной группе описаны классы сопряженности конечных подгрупп в некоторых расщепляемых расширениях. Доказано, что каждая конечная подгруппа в группе автоморфизмов свободной алгебры Ли ранга 3 сопряжена с подгруппой линейных автоморфизмов при условии, что порядок группы не делит характеристику основного поля.

Ключевые слова: 1-коцикл, расщепляемое расширение, классы сопряженности конечных подгрупп, свободная алгебра Ли, группа автоморфизмов.

В недавнее время был достигнут значительный прогресс в изучении групп автоморфизмов приведенно свободных алгебр. В частности, И. П. Шестаков и У. У. Умирбаев в [1, 2] положительно решили проблему Нагаты, установив существование неручных автоморфизмов алгебры многочленов от трех неизвестных над полем характеристики 0. В последовавших за этими работах [3, 4] У. У. Умирбаев нашел определяющие соотношения в группе ручных автоморфизмов алгебры многочленов от трех неизвестных и в группах автоморфизмов свободных алгебр конечного ранга в шрайеровых многообразиях. Это открывает дорогу к изучению представлений этих групп. Во введении к [4] можно найти неплохой обзор литературы.

П. М. Кон в [5] доказал, что каждая конечная группа автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры ранга 2 сопряжена с подгруппой группы линейных автоморфизмов при условии, что характеристика основного поля не делит порядок группы. Он существенно использовал разложение группы автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры ранга 2 в свободное произведение с объединенной подгруппой.

Настоящая статья продолжает и обобщает работу [6]. В § 1 напоминаются понятия 1-коцикла группы G со значениями в некоммутативной группе I, кограницы и гомологичных коциклов. При этом обозначение $\mathrm{H}^1(G, I)$ не используется, потому что автору неизвестен способ превратить множество коциклов в группу. Результат этого параграфа — следствие 1.5, где представлен случай, когда I является свободным произведением делимых абелевых групп.

В § 2 извлекаются следствия из основного результата работы [4] применительно к случаю свободной алгебры Ли ранга 3. Для этого используется метод Рейдемейстера — Шрайера. Здесь же доказан основной результат всей статьи — следствие 2.3.2, утверждающее, что каждая конечная группа автоморфизмов свободной алгебры Ли ранга 3, порядок которой взаимно прост с характеристикой основного поля, сопряжена с подгруппой группы линейных автоморфизмов.

В § 3 приведены некоторые примеры и замечания.

§ 1. Некоммутативные 1-когомологии

Об изложенном в этом параграфе см. [7, § 5].

Пусть G, I — две группы, $\lambda : G \to \mathrm{Aut}(I)$ — фиксированный гомоморфизм. Действие автоморфизмов будем записывать в показательной форме. Для двух элементов x, y из некоторой группы через x^y обозначается элемент $y^{-1}xy$, а через (x, y) — коммутатор $x^{-1}y^{-1}xy$. Под 1-*коцепью* понимаем произвольное отображение $\sigma : G \to I$.

Такая коцепь называется λ-1-*коциклом* или λ-*дифференцированием*, если для всех $x, y \in G$ выполнено соотношение

$$\sigma(xy) = \sigma(x)^{\lambda(y)}\sigma(y).$$

В дальнейшем вместо «λ-1-коцикл» пишем «коцикл».

Коцикл σ называется *когранщей* или *внутренним дифференцированием*, если найдется такой элемент $w \in I$, что для всех $x \in G$ справедливо равенство $\sigma(x) = w^{-\lambda(x)}w$.

Таким образом определенный коцикл далее будет обозначаться через σ_w. Согласно определению σ_w

$$\sigma_1(x) = 1^{-\lambda(x)}1 = 1 \quad \text{для всех } x \in G.$$

Отметим, что если G и I являются подгруппами некоторой группы, G нормализует I и $\lambda(x)$ — сопряжение при помощи x, суженное на I, то внутреннее дифференцирование $\sigma(x) = (x, w)$ есть коммутатор x и w.

Автору неизвестен разумный способ определить сумму двух коциклов. Однако для случая, когда второе слагаемое является кограницей, такое определение возможно. А именно, для заданных коцикла σ и элемента $w \in I$ определим новое отображение $\sigma' : G \to I$ по правилу

$$\sigma'(x) = w^{-\lambda(x)}\sigma(x)w.$$

Это отображение является коциклом. Действительно, $\sigma'(xy)$ по определению равно

$$\begin{aligned} w^{-\lambda(xy)}\sigma(xy)w &= w^{-\lambda(x)\lambda(y)}\sigma(x)^{\lambda(y)}\sigma(y)w \\ &= w^{-\lambda(x)\lambda(y)}\sigma(x)^{\lambda(y)}w^{\lambda(y)}w^{-\lambda(y)}\sigma(y)w = (w^{-\lambda(x)}\sigma(x)w)^{\lambda(y)}w^{-\lambda(y)}\sigma(y)w \\ &= \sigma'(x)^{\lambda(y)}\sigma'(y). \end{aligned}$$

Отображение σ', определенное выше, будет обозначаться через $\sigma + \sigma_w$. В этом контексте знак $+$ не коммутативен, но ассоциативен. Отметим также, что $\sigma + \sigma_w + \sigma_{w_1} = \sigma + \sigma_{ww_1}$, в частности, внутренние дифференцирования из G в I образуют группу.

Это позволяет назвать два коцикла *гомологичными*, если они находятся в том же отношении, что коциклы σ и σ' для некоторого $w \in I$. Коцикл, гомологичный кограние, называется *тривиальным*.

1.1. Расщепляемые расширения. Пусть группа $\Gamma = \Lambda \cdot I$ — расщепляемое расширение своей нормальной подгруппы I с помощью подгруппы Λ. Возьмем в Γ некоторую подгруппу G. Тогда для каждого $g \in G$ найдутся однозначно определенные элементы $\lambda(g) \in \Lambda$ и $\sigma(g) \in I$ со свойством $g = \lambda(g)\sigma(g)$.

Отображение $\lambda : G \to \Lambda$ является гомоморфизмом, а $\sigma : G \to I$ — коциклом. При этом считаем, что $w^{\lambda(g)} = \lambda(g)^{-1} w \lambda(g)$ для $w \in I$, $g \in G$. Если рассмотреть подгруппу $G^w = w^{-1} G w$, то этой подгруппе соответствуют «тот же» (в том смысле, что $\lambda(g^w) = \lambda(g)$) гомоморфизм λ и гомологичный σ коцикл $\sigma' = \sigma + \sigma_w$, поскольку

$$g^w = w^{-1}(\lambda(g)\sigma(g))w = \lambda(g) w^{-\lambda(g)} \sigma(g) w = \lambda(g)(\sigma + \sigma_w)(g).$$

Таким образом, сопряженным подгруппам соответствуют гомологичные коциклы.

Напомним, что группа G называется *делимой*, если для каждого ее элемента g и каждого целого числа $m \neq 0$ уравнение $x^m = g$ относительно неизвестной x имеет решение в G.

1.2. Предложение. *Пусть G — конечная группа, I — делимая абелева группа, не содержащая элементов порядка, делящего $|G|$, $\lambda : G \to \mathrm{Aut}(I)$ — гомоморфизм. Тогда каждый λ-коцикл $\sigma : G \to I$ тривиальна.*

Доказательство. Записываем группу I аддитивно. Для каждого коцикла $\sigma : G \to I$ рассмотрим элемент

$$w = \sum_{x \in G} \sigma(x).$$

Тогда для всех $g \in G$

$$\begin{aligned} -w^{\lambda(g)} + w = -\sum_{x \in G} \sigma(x)^{\lambda(g)} + \sum_{x \in G} \sigma(x) &= -\sum_{x \in G} (\sigma(xg) - \sigma(g)) + \sum_{x \in G} \sigma(x) \\ &= |G|\sigma(g) - \sum_{y \in G} \sigma(y) + \sum_{x \in G} \sigma(x) = |G|\sigma(g). \end{aligned}$$

Поэтому $\sigma = \sigma_{|G|^{-1} w}$ — тривиальный коцикл.

1.3. Следствие. *Пусть группа $\Gamma = \Lambda I$ является расщепляемым расширением своей нормальной подгруппы I при помощи подгруппы Λ, G — конечная подгруппа в Γ, $|G| = n$. Допустим, что I имеет конечную цепочку коммутантов, факторы которой суть делимые группы, не содержащие n-кручения. Тогда G сопряжена в Γ с подгруппой группы Λ.*

Доказательство проведем индукцией по ступени разрешимости группы I, начиная с коммутативного случая, разобранного в предложении. В этом случае $\lambda : G \to \Lambda$ является вложением ($\ker \lambda \subseteq I \cap G = 1$) и тривиальность σ означает сопряженность G с $\lambda(G)$. Пусть I_1 — последний нетривиальный член ряда коммутантов. Рассмотрим три подгруппы группы Γ/I_1: $\Lambda/(\Lambda \cap I_1)$, I/I_1, $G/(G \cap I_1)$. Так как I_1 — группа без $|G|$-кручения, $G \cap I_1 = 1, \Lambda \cap I_1 \leq \Lambda \cap I = 1$. По индуктивному предположению, примененному к Γ/I_1, найдется $x \in I$ такой, что $G^x \leq \Lambda I_1$. Группы I_1, Λ, ΛI_1, G^x удовлетворяют условиям предложения 1.2. Поэтому найдется $y \in I_1$ такой, что $G^{xy} \leq \Lambda$.

1.4. Лемма. *Пусть G — конечная группа и $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве G. Предположим, что для любых двух элементов x, y группы G если $x \nsim 1$, $y \nsim 1$, то $x \sim y$ или $x \sim xy$, или $y \sim xy$. Тогда число классов эквивалентности по отношению $\sim$ не превосходит двух.*

Доказательство. Можно считать, что не все элементы группы G эквивалентны единице. Из условия, которому удовлетворяет отношение $\sim$, следует, что для любой пары (x,y) элементов группы G справедливо высказывание

$$(x \nsim 1 \,\&\, y \nsim 1 \,\&\, x \nsim y) \to ((x \sim xy \vee y \sim xy) \,\&\, (x \sim yx \vee y \sim yx)). \qquad (\&)$$

Возьмем x и y из группы G так, чтобы $x \nsim 1$, $y \nsim 1$, и допустим, что $x \nsim y$. Займемся получением противоречия.

Пусть H — подгруппа в G, порожденная x и y. Так как элементы x и y имеют конечные порядки, каждый элемент группы H может быть записан в виде *положительного* слова w в порождающих x, y. Термин «положительное» используется здесь для слова длины не менее 1 в групповой сигнатуре от порождающих x и y с неотрицательными целыми числами в качестве показателей степени у x и y. Индукцией по длине n такого слова w, начиная с очевидного случая $n=1$, докажем, что $w \sim x$ или $w \sim y$. Пусть $n>1$ и w — произвольное положительное слово длины $n-1$. По предположению индукции $w \sim x$ или $w \sim y$, в частности, $w \nsim 1$. Если $x \sim w$, то $y \nsim w$. Подставим в посылку импликации (&) пару (y,w) вместо пары (x,y). В качестве ее заключения получим, что

$$(y \sim yw \vee x \sim w \sim yw) \,\&\, (x \sim w \sim wy \vee y \sim wy).$$

Если же $y \sim w$, то $x \nsim w$, и, рассматривая пару (x,w), получаем

$$(x \sim xw \vee y \sim w \sim xw) \,\&\, (y \sim w \sim wx \vee x \sim wx).$$

Иными словами, для w справедливо высказывание

$$((y \sim yw \vee x \sim yw) \,\&\, (x \sim wy \vee y \sim wy)) \vee ((x \sim xw \vee y \sim xw) \,\&\, (y \sim wx \vee x \sim wx)),$$

что влечет за собой

$$(y \sim yw) \vee (x \sim yw) \vee (x \sim wy) \vee (y \sim wy) \vee (x \sim xw) \vee (y \sim xw) \vee (y \sim wx) \vee (x \sim wx).$$

Каждое положительное слово длины $n>1$ получается из некоторого положительного слова w длины $n-1$ при помощи умножения слева или справа на x или y. Тем самым индуктивное предположение оправдано и, значит, каждое положительное слово эквивалентно x или y . Противоречие получается из того, что среди положительных слов найдется слово, равное единице в H.

1.5. Следствие. *Пусть группа $\Gamma = \Lambda I$ является расщепляемым расширением своей нормальной подгруппы I при помощи подгруппы Λ, S — некоторое множество, n — натуральное число. Допустим, что*

1) I — свободное произведение множества $\{\Phi_s : s \in S\}$ делимых абелевых групп Φ_s, не имеющих n-кручения;

2) группа Λ действует на множестве подгрупп $\{\Phi_s : s \in S\}$ при помощи сопряжений.

Тогда каждая конечная подгруппа G порядка n в Γ сопряжена с подгруппой группы Λ.

Доказательство. Из второго условия следует, что если $g \in G$ и элемент $w \in I$ записан в нормальной форме

$$w = \psi_1 \dots \psi_d \quad (\psi_j \in \Phi_{s(j)},\ 1 \le j \le d),$$

соответствующей разложению $I = *_{s\in S}\Phi_s$ [8, с. 192], то запись $\psi_1^{\lambda(g)} \dots \psi_d^{\lambda(g)}$ тоже является нормальной формой.

(А) Пусть даны два элемента $w = \psi_1 \dots \psi_k$ и $w_1 = \psi_{k+1} \dots \psi_{k+l}$ группы I, записанные в нормальной форме. Допустим, что запись ww_1 не является нормальной формой. Тогда очевидно, что для некоторого $s \in S$ оба элемента ψ_k и ψ_{k+1} принадлежат одной и той же подгруппе Φ_s.

(Б) Возьмем $g \in G$ и докажем, что для некоторых $s \in S$, $u \in I$ и $\psi \in \Phi_s$ справедливо равенство $\sigma(g) = u^{-\lambda(g)}\psi u$.

Элемент $g \in G$ имеет конечный порядок n. Поэтому

$$1 = g^n = (\lambda(g)\sigma(g))^n = \lambda(g)^n \prod_{j=n-1}^{0} \sigma(g)^{\lambda(g)^j},$$

откуда

$$\prod_{j=n-1}^{0} \sigma(g)^{\lambda(g)^j} = 1.$$

Пусть $\psi_1 \dots \psi_k$ — запись $\sigma(g)$ в нормальной форме. Второе условие следствия гарантирует, что при $1 \le j \le n-1$ элементы $\sigma(g)^{\lambda(g)^j} = \psi_1^{\lambda(g)^j} \dots \psi_k^{\lambda(g)^j}$ тоже записаны в нормальной форме. Из (А) следует, что нормальной формой элемента $\psi_k^{\lambda(g)}\psi_1$ является ψ, причем $\psi_k^{\lambda(g)}, \psi_1, \psi \in \Phi_s$ для некоторого $s \in S$, т. е.

$$\sigma(g) = \psi_1(\psi_2 \dots \psi_{k-1}\psi)\psi_1^{-\lambda(g)}.$$

Чтобы продолжить по индукции, запишем $\sigma(g) = \psi_1 w \psi_k$ в нормальной форме. Тогда w в нормальной форме, $\psi_1 w$ в нормальной форме и длина w на два меньше длины $\sigma(g)$. Имеем

$$1 = (\psi_1 w \psi_k)^{\lambda(g)^{n-1}} (\psi_1 w \psi_k)^{\lambda(g)^{n-2}} \dots (\psi_1 w \psi_k)$$
$$= \psi_1^{\lambda(g)^{n-1}} w^{\lambda(g)^{n-1}} \psi^{\lambda(g)^{n-2}} w^{\lambda(g)^{n-2}} \dots \psi w \psi_k.$$

Сопряжем последнее равенство элементом ψ_k^{-1}. Учитывая, что

$$\psi_k \psi_1^{\lambda(g)^{n-1}} = \psi_k \psi_1^{\lambda(g)^{-1}} = \psi^{\lambda(g)^{-1}} = \psi^{\lambda(g)^{n-1}},$$

получим

$$(\psi w)^{\lambda(g)^{n-1}} \dots (\psi w)^{\lambda(g)} \psi w = 1.$$

Если $\psi = 1$, то поскольку длина w меньше длины $\sigma(g)$ и w в нормальной форме, можно применить индукцию. В противном случае если запись ψw не является нормальной формой, то и запись $\psi_1 w$ не является нормальной формой, чего быть не может. Поэтому запись ψw — нормальная форма, длина слова ψw меньше длины $\sigma(g)$, и снова можно применить индукцию.

(В) Докажем, что конечная циклическая подгруппа $G = (g)$ группы Γ сопряжена с подгруппой в Λ. Достаточно проверить, что σ — тривиальный коцикл. По (Б) имеем $\sigma = \sigma' + \sigma_u$, где коцикл σ' однозначно определен равенством $\sigma'(g) = \psi \in \Phi_s$ для некоторого $s \in S$. Условие $g^n = 1$, как в (Б), дает $\Phi_s^{\lambda(g)} \le \Phi_s$. Поэтому элементы $\sigma'(g^j)$ $(0 \le j \le n-1)$ лежат в коммутативной делимой группе Φ_s. Положим

$$w = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \sigma'(g^j) \right)^{n^{-1}}.$$

Проверка равенства $\sigma'(x) = (\lambda(x), w)$ та же, что в предложении 1.2.

(Г) Докажем, что последние буквы нормальных форм всех неединичных элементов $\sigma(x)$ ($x \in G$) определяют элементы, лежащие в одной общей подгруппе Φ_s. С этой целью введем свойство P пар элементов группы G. А именно, $P(x, y)$ истинно тогда и только тогда, когда либо $\sigma(x) = \sigma(y) = 1$, либо длины $\sigma(x)$ и $\sigma(y)$ в их нормальной форме положительны и эти нормальные формы имеют последнюю букву в общей подгруппе Φ_s для некоторого $s \in S$. Очевидно, что P является отношением эквивалентности на G. Проверим, что для этого отношения выполнены условия леммы 1.4.

В (В) установлено, что для каждого $x \in G$ найдется элемент $w_x \in I$ такой, что $\sigma(x) = w_x^{-\lambda(x)} w_x$. Если в качестве w_x выбирать наиболее короткий представитель того правого смежного класса по централизатору элемента $\lambda(x)$ в I, который содержит w_x, то w_x определяется по x однозначно. Так дальше и поступим.

Для любых двух элементов $x, y \in G$

$$\begin{aligned} w_{xy}^{-\lambda(xy)} w_{xy} &= \sigma(xy) = \sigma(x)^{\lambda(y)} \sigma(y) \\ &= \big(w_x^{-\lambda(x)} w_x\big)^{\lambda(y)} w_y^{-\lambda(y)} w_y = w_x^{-\lambda(x)\lambda(y)} w_x^{\lambda(y)} w_y^{-\lambda(y)} w_y. \end{aligned}$$

Поэтому

$$w_{xy}^{-\lambda(x)\lambda(y)} w_{xy} w_y^{-1} w_y^{\lambda(y)} w_x^{-\lambda(y)} w_x^{\lambda(x)\lambda(y)} = 1.$$

Очевидно, что одно из произведений $w_{xy} w_y^{-1}$, $w_y w_x^{-1}$ или $w_x w_{xy}^{-1}$ не имеет в указанной записи нормальной формы. Тем самым для отношения P выполнены условия леммы 1.4 и, следовательно, найдется $s \in S$ такой, что для всех $x \in G$, для которых $\sigma(x) \neq 1$, последняя буква нормальной формы элемента $\sigma(x)$ принадлежит Φ_s.

(Д) Обозначим через $m(\sigma)$ максимум по всем $x \in G$ длин нормальных форм элементов $\sigma(x)$, и пусть $x_0 \in G$ такой элемент, что длина $\sigma(x_0)$ равна $m(\sigma)$.

При $m(\sigma) = 0$ доказывать нечего. При $m(\sigma) = 1$ согласно (Г) существует $s \in S$ такой, что $\sigma(x) \in \Phi_s$ для всех $x \in G$, и можно применить предложение 1.2, чтобы закончить доказательство.

Рассмотрим случай $m(\sigma) = 2$. Используя (Г), заключаем, что при некотором $s \in S$ для каждого $x \in G$ существует такой элемент $\psi_x \in \Phi_s$, что $\sigma(x) = \psi_x^{-\lambda(x)} \psi_x$. Тогда для любых x, $y \in G$

$$\psi_{xy} \psi_y^{-1} \psi_y^{\lambda(y)} \psi_x^{-\lambda(y)} \psi_x^{\lambda(xy)} \psi_{xy}^{-\lambda(xy)} = \psi_1 \psi_2^{\lambda(y)} \psi_3^{\lambda(xy)} = 1,$$

где ψ_1, ψ_2, $\psi_3 \in \Phi_s$. Если ни один из элементов ψ_1, ψ_2, ψ_3 не равен единице, то в зависимости от того, в каком месте средней части предыдущего равенства начинаются сокращения при приведении ее к нормальной форме, возможны три полностью симметричных (с точностью до возможных сопряжений) варианта: $\lambda(y)$ нормализует Φ_s, $\lambda(x)$ нормализует Φ_s или $\lambda(xy)$ нормализует Φ_s. Каждый из этих вариантов влечет два остальных. Например, если $\lambda(x)$ нормализует Φ_s, то $\lambda(xy)$ нормализует Φ_s и, следовательно $\lambda(x)$ нормализует Φ_s. Если же хотя бы один из этих элементов есть 1, то же самое получается еще проще. Отсюда следует в противоречие с предположением, что $m(\sigma) \leq 1$. Таким образом, равенство $m(\sigma) = 2$ невозможно.

Пусть теперь $m(\sigma) > 2$ и $\psi \in \Phi_s$ — последняя буква в нормальной форме элемента x_0. Рассмотрим коцикл $\sigma' = \sigma + \sigma_{\psi^{-1}}$. Проверим, что $m(\sigma') < m(\sigma)$.

Возьмем сначала $x \in G$ такой, что $\sigma(x) \neq 1$. Тогда можно написать

$$\sigma(x_0) = \psi^{-\lambda(x_0)} w\psi, \quad \sigma(x) = \psi_1^{-\lambda(x)} w'\psi_1,$$

где $w \neq 1$, $\psi, \psi_1 \in \Phi_s$ и в правых частях равенств указаны нормальные формы. Очевидно, что последняя буква слова $w \in I$ не лежит в Φ_s. Для коцикла σ'

$$\sigma'(x_0) = w, \quad \sigma'(x) = (\psi\psi_1^{-1})^{-\lambda(x)} w'\psi\psi_1^{-1}.$$

Если $\psi\psi_1^{-1} \neq 1$, то для σ' получаем противоречие со свойством, доказанным в (Г). Поэтому $\psi = \psi_1$ и $\sigma'(x) = w'$.

Теперь возьмем $x \in G$ с $\sigma(x) = 1$. Тогда $\sigma'(x) = \psi^{\lambda(x)}\psi^{-1}$. Нормальная форма правой части последнего равенства не может иметь в качестве последней буквы элемент группы Φ_s (так как $w\psi$ — нормальная форма и $w \neq 1$). Следовательно, $\psi^{\lambda(x)} = \psi$. Тогда длина нормальной формы элемента $\sigma'(x)$ равна 0.

Тем самым проверено, что $m(\sigma') < m(\sigma)$. Можно воспользоваться индукцией по $m(\sigma)$, так как σ и σ' — гомологичные коциклы. Следствие доказано.

§ 2. Теорема Умирбаева

Многообразие алгебр над полем K называется *шрайеровым*, если каждая подалгебра свободной алгебры этого многообразия сама свободна.

Хорошо известно [9, 10], что многообразия всех алгебр, коммутативных, антикоммутативных алгебр и алгебр Ли над полем K являются шрайеровыми.

Пусть V — шрайерово многообразие алгебр над полем K, F_r — свободная алгебра ранга r многообразия V с множеством свободных порождающих $\{x_1, \dots, x_r\}$. Через $\langle S\rangle$ обозначаем подалгебру, порожденную множеством S.

Автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut}(F_r)$ полностью определен, как только известно действие φ на порождающие $x_1, \dots, x_r$. В этой ситуации удобно писать

$$(x_1, \dots, x_r)\varphi = (x_1\varphi, \dots, x_r\varphi).$$

Автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut}(F_r)$ называется *элементарным*, если для некоторого целого числа j выполнено равенство

$$(x_1, \dots, x_j, \dots, x_r)\varphi = (x_1, \dots, \alpha x_j + u, \dots, x_r), \tag{1}$$

причем $1 \leq j \leq r$, $u \in \langle x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_r\rangle$ и $\alpha \in K^*$. П. М. Кон доказал в [11], что если V — многообразие алгебр Ли, то группа $\operatorname{Aut}(F_r)$ порождается элементарными автоморфизмами.

Обозначим автоморфизм, определенный правилом (1), через $\varphi(j, \alpha, u)$, кроме того, для различных целых чисел k, $s \in \{1, \dots, r\}$ обозначим

$$(ks) = \varphi(s, 1, x_k)\varphi(k, 1, -x_s)\varphi(s, -1, x_k).$$

В $\operatorname{Aut}(F_r)$ выполняются соотношения

$$\varphi(i, \alpha, u)\varphi(i, \beta, v) = \varphi(i, \alpha\beta, \alpha v + u) \quad (u, v \in \langle X \setminus \{x_i\}\rangle), \tag{2}$$

$$\varphi(i, \alpha, u)^{\varphi(j,\beta,v)} = \varphi(i, \alpha, u\varphi(j, \beta, v)) \quad (i \neq j,\ v \in \langle X \setminus \{x_i, x_j\}\rangle), \tag{3}$$

$$\varphi(i, \alpha, u)^{(ks)} = \varphi(i(ks), \alpha, u(ks)). \tag{4}$$

В правой части формулы (4) при действии на первый аргумент под (ks) понимается транспозиция соответствующих символов. Предмет этого параграфа — следующая теорема Умирбаева.

2.1. Теорема [4]. *Соотношения* (2)–(4) *являются определяющими соотношениями группы* $\mathrm{Aut}(F_r)$ *по отношению к порождающему множеству* (1).

Пусть W — линейная оболочка $\sum\limits_{i=1}^{r} Kx_i$. Автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(F_r)$ называется *линейным*, если $W\varphi = W$. В [4] доказана также следующая

2.2. Теорема (ср. [4, лемма 2]). *Если в* (1)–(4) *вместо* $\varphi(i,\alpha,u)$ *брать только линейные элементарные автоморфизмы, то* (2)–(4) *составят множество определяющих соотношений для подгруппы* $GL(W)$ *линейных автоморфизмов.*

Далее предполагаем, что V — многообразие всех алгебр Ли над полем K. Верхний штрих над значком группы или алгебры Ли обозначает операцию взятия коммутанта.

Группа $\mathrm{Aut}(F_r)$ является расщепляемым расширением своей нормальной подгруппы $I = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(F_r) : x_i\varphi \equiv x_i (\mathrm{mod} F_r') \ (1 \le i \le r)\}$ при помощи подгруппы $GL(W) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(F_r) : W\varphi = W\}$. Очевидно, что группа I имеет множество порождающих $\varphi(i,\,1,\,u)^\lambda$, где λ — линейный автоморфизм вида (1), а $u \in \langle X \setminus \{x_i\}\rangle'$. При помощи теорем 2.1, 2.2 и метода Рейдемейстера — Шрайера [10, с. 92] найдем множество определяющих соотношений группы I.

Для каждого элемента $u \in F_r$ обозначим его проекции на W и F_r' через $l(u)$ и $c(u)$ соответственно. Из соотношений (2) следует, что

$$\varphi(i,\alpha,u) = \varphi(i,\alpha,l(u))\varphi(i,1,\alpha^{-1}c(u)). \tag{5}$$

Другим следствием соотношений (2) является равенство

$$\varphi(i,1,u)^{\varphi(i,\beta,v)} = \varphi(i,1,\beta^{-1}u) \quad (u \in F_r',\ v \in W). \tag{6}$$

Тогда (2) можно переписать так:

$$\begin{aligned}\varphi(i,\alpha,l(u))\varphi(i,\beta,l(v))\varphi(i,1,\beta^{-1}\alpha^{-1}c(u))\varphi(i,1,\beta^{-1}c(v))\\ = \varphi(i,\alpha\beta,\alpha l(v)+l(u)))\varphi(i,1,\beta^{-1}c(v)+\alpha^{-1}\beta^{-1}c(u))).\end{aligned}$$

Последнее равенство показывает, что соотношения (2) следуют из соотношений (2), в которых $u, v \in W$, соотношений (2), в которых $\alpha = 1$, $\beta = 1$, а $u, v \in F_r'$, и соотношений (5), (6). То же самое верно и для соотношений (4): все соотношения (4) выводятся из тех соотношений (4), в которых $u \in W$, и тех соотношений (4), в которых $\alpha = 1$, $u \in F_r'$, а также соотношений (5). Про соотношения (3) в общем случае информации мало.

2.3. Случай $r = 3$. Рассмотрим соотношения (3). Поскольку $i \ne j$ и $v \in \langle X \setminus \{x_i, x_j\}\rangle$, для v не остается другой возможности, кроме $v = \gamma x_k$ ($\gamma \in K$, $k \ne i, j$). Иными словами, автоморфизм $\varphi(j,\beta,v)$ в соотношении (3) необходимо является линейным. Так как линейные автоморфизмы сохраняют разложение в прямую сумму векторных пространств $F_3 = W + F_3'$, при $1 \le j \le 3$, $v \in W$ и произвольном $u \in F_3$ выполнены равенства

$$l(u\varphi(j,\beta,v)) = l(u)\varphi(j,\beta,v), \quad c(u\varphi(j,\beta,v)) = c(u)\varphi(j,\beta,v).$$

Поэтому соотношения (3) можно переписать в виде

$$\varphi(i,\alpha,l(u))^{\varphi(j,\beta,v)}\varphi(i,1,c(u))^{\varphi(j,\beta,v)} = \varphi(i,\alpha,l(u)\varphi(j,\beta,v))\varphi(i,\alpha,c(u)\varphi(j,\beta,v)).$$

Это равенство показывает, как вывести соотношения (3) из соотношений (5), (6), соотношений (3) для автоморфизмов вида $\varphi(i,\alpha,u)$ ($u \in W$), соотношений вида (3) для $\varphi(i,1,u)$ с $u \in F_3'$ и соотношений (2) для того и другого случая соответственно. Иными словами, $\mathrm{Aut}(F_3)$ порождается множеством

$$\{\varphi(i,\alpha,u) : u \in W,\ 1 \le i \le 3\} \cup \{\varphi(i,1,u)^\lambda : u \in F_3',\ \lambda \in GL(W),\ 1 \le i \le 3\}$$

и имеет относительно этого множества следующие определяющие соотношения, в которых считается, что $i,j,k \in \{1,2,3\}$ попарно различны:

$$\varphi(i,\alpha,u)\varphi(i,\beta,v) = \varphi(i,\alpha\beta,\alpha v+u) \quad (u,v \in W), \tag{7}$$

$$\varphi(i,1,u)\varphi(i,1,v) = \varphi(i,1,v+u) \quad (u,v \in F_3'), \tag{8}$$

$$\varphi(i,\alpha,u)\varphi(i,1,v) = \varphi(i,1,\alpha v+u) \quad (u \in W,\ v \in F_3'), \tag{9}$$

$$\varphi(i,1,u)^{\varphi(i,\alpha,v)} = \varphi(i,1,\alpha^{-1}u) \quad (u \in F_3',\ v \in W), \tag{10}$$

$$\varphi(i,1,u)^{\varphi(j,\beta,v)} = \varphi(i,1,u\varphi(j,\beta,v)) \quad (u \in F_3',\ v = \gamma x_k), \tag{11}$$

$$\varphi(i,\alpha,u)^{\varphi(j,\beta,v)} = \varphi(i,\alpha,u\varphi(j,\beta,v)) \quad (u \in W,\ v = \gamma x_k), \tag{12}$$

$$\varphi(i,\alpha,u)^\theta = \varphi(i\theta,\alpha,u\theta)) \quad (u \in W,\ \theta \in S_3), \tag{13}$$

$$\varphi(i,1,u)^\theta = \varphi(i\theta,1,u\theta)) \quad (u \in F_3',\ \theta \in S_3). \tag{14}$$

Выберем шрайерово множество представителей левых смежных классов группы $\mathrm{Aut}(F_r)$ по подгруппе I состоящим из всех линейных автоморфизмов и применим переписывающий процесс τ Рейдемейстера — Шрайера к соотношениям (7)-(14). Тогда представляющая функция $x \mapsto \bar{x}$ будет совпадать с отображением, сопоставляющим автоморфизму его линейную часть. Порождающий символ

$$s_{\varphi(i,\alpha,u),\lambda} \quad (\text{слово } \lambda \text{ определяет элемент из } GL(W))$$

соответствует при этом элементу группы I, определяемому словом

$$(\overline{\varphi(i,\alpha,u)\lambda})^{-1}\varphi(i,\alpha,u)\lambda = \lambda^{-1}(\overline{\varphi(i,\alpha,u)})^{-1}\varphi(i,\alpha,u)\lambda = \varphi(i,1,\alpha^{-1}c(u))^\lambda$$

(см. [8, с. 109, задача 25]), откуда $s_{\lambda\varphi(i,\alpha,f)1} = s_{\varphi(i,\alpha,f),1}$. Соотношения (7) и (12), (13) превратятся в тривиальные соотношения, а (8), (10), (11) и (14) соответственно дают ($\lambda \in GL(W)$)

$$\varphi(i,1,u)^\lambda\varphi(i,1,v)^\lambda = \varphi(i,1,v+u)^\lambda \quad (u,v \in F_3'), \tag{15}$$

$$\varphi(i,1,u)^{\varphi(i,\alpha,v)\lambda} = \varphi(i,1,\alpha^{-1}u)^\lambda \quad (u \in F_3',\ v \in W), \tag{16}$$

$$\varphi(i,1,u)^{\varphi(j,\beta,v)\lambda} = \varphi(i,1,u\varphi(j,\beta,v))^\lambda \quad (u \in F_3',\ v = \gamma x_k,\ \gamma \in K), \tag{17}$$

$$\varphi(i,1,u)^{\theta\lambda} = \varphi(i\theta,1,u\theta)^\lambda \quad (u \in F_3',\ \theta \in S_3), \tag{18}$$

соотношения (9) дают то же, что (10).

Для заданного числа $i \in \{1,2,3\}$ рассмотрим подгруппу N_i, порожденную множеством

$$\{\varphi(i,\alpha,u),\ \varphi(j,\beta,\gamma x_k) : i,j,k \text{ попарно различны},\ u \in Kx_j + Kx_k\}.$$

(Это нормализатор группы $\varphi(i,K^*,Kx_j+Kx_k)$ в $GL(W)$, если $|K^*|>1$.) Обозначим через C_1 множество представителей правых смежных классов группы $GL(W)$ по подгруппе N_1. Для автоморфизма θ, переставляющего порождающие x_1,x_2,x_3 (и соответствующей подстановки $\theta \in S_3$), справедливо равенство

$N_1^\theta = N_{1\theta}$. Поэтому множество $C_1^\theta = C_{1\theta}$ является множеством представителей правых смежных классов группы $GL(W)$ по подгруппе $N_{1\theta}$. Очевидно, что множество

$$\bigcup_{\theta\in S_3} \varphi(1,1,\langle x_2,x_3\rangle')^{C_1\theta} = \bigcup_{\theta\in S_3} \varphi(1\theta,1,\langle x_{2\theta},x_{3\theta}\rangle')^{C_{1\theta}}$$

порождает I. При помощи преобразований Титце от представления (15)–(18) можно перейти к представлению

$$I = \langle \varphi(1,1,u)^{\theta\lambda},\ u\in\langle x_2,x_3\rangle',\ \lambda\in C_{1\theta},\ \theta\in S_3 : \\ \varphi(1,1,u)^{\theta\lambda}\varphi(1,1,v)^{\theta\lambda} = \varphi(1,1,u+v)^{\theta\lambda}\rangle.$$

2.3.1. Следствие. *Группа I является свободным произведением своих подгрупп $\varphi(i,K^*,\langle x_j,x_k\rangle')^\lambda$ ($i,\ j,\ k\in\{1,2,3\}$ попарно различны, $\lambda\in C_i$).*

2.3.2. Следствие. *Пусть G — конечная подгруппа в $\mathrm{Aut}(F_3)$, порядок которой взаимно прост с характеристикой поля K. Тогда G сопряжена в $\mathrm{Aut}(F_3)$ с подгруппой группы $GL(W)$ линейных автоморфизмов.*

Доказательство. Нужно проверить условия следствия 1.5. Группа $\mathrm{Aut}(F_3)$ — расщепляемое расширение своей нормальной подгруппы I с помощью группы линейных автоморфизмов $GL(W)$. По следствию 2.3.2 группа I — свободное произведение подгрупп $\varphi(i,K^*,\langle x_j,x_k\rangle')^\lambda$ ($i,\ j,\ k\in\{1,2,3\}$ попарно различны, $\lambda\in C_i$). Эти подгруппы, будучи изоморфными аддитивным группам векторных пространств, коммутативны и делимы. Возьмем группу $\varphi(i,K^*,\langle x_j,x_k\rangle')^\lambda$ и сопряжем ее при помощи линейного автоморфизма μ, предварительно представив $\lambda\mu$ в виде

$$\lambda\mu = \mu'\lambda' \quad (\mu'\in N_i,\ \lambda'\in C_i).$$

Тогда $\varphi(i,K^*,\langle x_j,x_k\rangle')^{\lambda\mu} = \varphi(i,K^*,\langle x_j,x_k\rangle')^{\mu'\lambda'} \subseteq \varphi(i,K^*,\langle x_j,x_k\rangle')^{\lambda'}$. Поэтому действие $GL(W)$ на I сопряжениями переставляет сомножители свободного произведения. Все условия следствия 1.5 выполнены, что и требовалось.

§ 3. Замечания и примеры

3.1. Пусть $r\geq 3$, поле K имеет положительную характеристику p. Рассмотрим автоморфизм $1\neq\psi=\varphi(1,1,[x_2,x_3])\in\mathrm{Aut}(F_r)$. Тогда $\psi^p=1$, но ψ не может быть сопряжен ни с каким линейным автоморфизмом: он лежит в нормальной подгруппе I, пересечение которой с $GL(W)$ тривиально. Поэтому условие на порядок группы G в следствии 2.3.2 является необходимым.

3.2. Приведенный в тексте подход к доказательству следствия 2.3.2 не может быть перенесен на ранги, большие 3. Это связано с тем, что при $r>3$ подгруппа I не раскладывается в свободное произведение абелевых групп. Чтобы это увидеть, достаточно рассмотреть ее подгруппу

$$J = \{\varphi\in\mathrm{Aut}(F_r) : x_1\varphi = x_1+u_2,\ x_2\varphi = x_2+u_3,\dots,x_r\varphi = x_r\},$$

где через u_i ($2\leq i\leq r$) обозначен элемент подалгебры $\langle x_i,\dots,x_r\rangle'$ алгебры F_r. Если $r=3$, то группа J совпадает с $\varphi(1,1,\langle x_2,x_3\rangle')$, тогда как при $r>3$ группа J является разрешимой неабелевой группой, отличной от свободного произведения двух групп порядка 2, и не может содержаться в свободном произведении абелевых групп.

3.3. Из следствия 2.3.1 нетрудно вывести, что при $r = 3$ первая группа гомологий $\mathrm{H}_1(I, K) \cong (I/I') \otimes_{\mathbb{Z}} K$ не является конечно порожденной как модуль над $GL(W)$. Возможно, что при $r > 3$ это не так, поскольку из соотношений (3) следует, что при $v \in \langle X \setminus \{x_i, x_j\} \rangle'$

$$\varphi(i, 1, \langle X \setminus \{x_i\} \rangle') \cap I' \supseteq (\varphi(i, 1, \langle X \setminus \{x_i\} \rangle'), \varphi(j, 1, v)) \\ = \varphi(i, 1, \langle X \setminus \{x_i\} \rangle'(1 - \varphi(j, 1, v))) \neq 1.$$

Заметим, что согласно теореме Андреадакиса [12] и недавнему результату Кавазуми [13], Коэна — Пакианатана и Фарба при $r \geq 3$ имеет место изоморфизм $GL_r(\mathbb{Z})$-модулей

$$IA_r / IA'_r \cong W^* \oplus_{\mathbb{Z}} (W \wedge W),$$

где IA_r — группа автоморфизмов, тождественных по модулю коммутанта свободной группы F_r ранга r, $W = F_r/F'_r$, $W^* = \mathrm{Hom}(W, \mathbb{Z})$, а $\wedge$ обозначает внешнее произведение.

3.4. Замечание при корректуре. Неизвестный мне рецензент в своем отзыве привел следующее альтернативное доказательство следствия 1.5:

«В рассматриваемых условиях группа Γ является свободным произведением с объединением. Сомножители устанавливаются так: в каждой орбите действия группы Λ на свободных сомножителях Φ выберем по представителю F, в группе Λ отметим стабилизатор S этого представителя и породим стабилизатором и представителем подгруппу H, являющуюся расщепляемым расширением делимой абелевой группы F. Группа P, порожденная H и Λ, будет их свободным произведением с объединением по S. Тогда Γ будет свободным произведением подгрупп P по всем Λ-орбитам с объединением по Λ. Хорошо известно, что конечная подгруппа в таком произведении сопряжена с подгруппой одного из сомножителей P, в нем она аналогично сопряжена либо с подгруппой из Λ, либо с подгруппой из H. В последнем случае по следствию 1.3 автора конечная подгруппа сопряжена с подгруппой из $S \leq \Lambda$.»

Из этого наблюдения вытекает не только следствие 1.5, но и следующая

3.4.1. Теорема. *Группа* $\mathrm{Aut}(F_3)$ *является свободным произведением с объединенной подгруппой. Точный вид сомножителей и объединенной подгруппы можно извлечь из выкладок п.* 2.3.

Я благодарен рецензенту за его вклад в эту работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials // J. Amer. Math. Soc. 2004. V. 17, N 1. P. 181–196.
2. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables // J. Amer. Math. Soc. 2004. V. 17, N 1. P. 197–227.
3. *Umirbaev U. U.* Defining relations of the tame authomorphism group of polynomial algebras in three variables // J. Reine Angew. Math. 2006. V. 206, N 600. P. 203–235.
4. *Umirbaev U. U.* Defining relations for automorphism groups of free algebras // eprint arXiv: math/0607237.
5. *Cohn P. M.* The automorphism group of the free algebra of rank two // Serdica Math. J. 2002. V. 28. P. 255–266.

6. *Шевелин М. А.* Периодические автоморфизмы свободной алгебры Ли ранга 3 // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 3. С. 690–701.
7. *Serre J. P.* Galois cohomology. Berlin: Springer-Verl., 2002.
8. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
9. *Ширшов А. И.* Кольца и алгебры. М.: Наука, 1984.
10. *Witt E.* Die Unterringe der freien Lieschen Ringe // Math. Z. 1956. Bd 64. S. 195–216.
11. *Cohn P. M.* Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. 1964. V. 56. P. 618–632.
12. *Andreadakis S.* On automorphisms of free groups and free nilpotent groups // Proc. London Math Soc. 1965. V. 15, N 3. P. 239–268.
13. *Kawazumi N.* Cohomological aspects of Magnus expansions // preprint, arXiv:math.GT/0505497.

Статья поступила 3 сентября 2012 г.

Шевелин Михаил Александрович
Омский гос. университет, кафедра алгебры,
пр. Мира, 55а, Омск 644041
shma2001@gmail.com