Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК УДК 512.542

О КОМПАКТНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФОРМАХ АЛГЕБР ЛИ ТИПОВ E_6 И F_4

Р. А. Уилсон

Аннотация. Приводится конструкция компактных вещественных форм алгебры Ли типа E_6, использующая конечную неприводимую подгруппу типа $3^{3+3}{:}\,\mathrm{SL}_3(3)$, которая изоморфна максимальной подгруппе ортогональной группы $\Omega_7(3)$. В частности, показано, что алгебра единственным образом определяется этой подгруппой. Обратно, с привлечением базовых свойств доказано, что алгебра удовлетворяет тождеству Якоби, и, таким образом, дано элементарное доказательство существования алгебры Ли типа E_6. Компактная вещественная форма приводится для F_4 как для подалгебры.

Ключевые слова: алгебра Ли, компактные вещественные формы.

1. Введение

Стандартное построение комплексных простых алгебр Ли, использующее их системы корней (см., например, книгу Картера [1]), приводит к так называемому базису Шевалле, в котором структурные константы алгебры являются целыми числами. Тем самым этот базис можно использовать для того определения алгебры Ли над произвольным полем. В частности, эти алгебры над вещественными числами известны как *расщепленные вещественные формы* простых алгебр Ли. Соответствующие группы Ли не являются компактными.

С другой стороны, группы Ли, возникающие в практических приложениях, часто компактны, и желательно иметь хорошие конструкции для этих групп и соответствующих алгебр, называемых *компактными вещественными формами.* Известно, что любая комплексная простая алгебра Ли имеет единственную компактную вещественную форму и подходящий базис можно получить из базиса Шевалле, заменяя каждую пару $\{e_r, e_{-r}\}$ корневых векторов парой $\{e_r + e_{-r}, \sqrt{-1}(e_r - e_{-r})\}$ и каждый базисный вектор h_r подалгебры Картан на $\sqrt{-1}h_r$ (см., например, [2, с. 149]).

Простейшим примером является алгебра типа A_1. Расщепленная вещественная форма обычно берется по отношению к базису $\{e, f, h\}$ и скобке Ли

$$[e, f] = h, \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f.$$

Полагая

$$i = \sqrt{-1}h/2, \quad j = (e - f)/2, \quad k = \sqrt{-1}(e + f)/2,$$

легко вычисляем $[i, j] = k$, $[j, k] = i$, и $[k, i] = j$, так что получаем хорошо знакомое векторное произведение трехмерного евклидова пространства. В общем случае ортогональных групп следует взять ортонормированный базис $\{v_1, \dots, v_n\}$ евклидова пространства, на котором (компактная) ортогональная группа действует естественным образом. Тогда алгеба Ли является в точности внешним квадратом этого модуля, поэтому имеет базис $\{v_i \wedge v_j = -v_j \wedge v_i\}$, который более или менее эквивалентен базису Шевалле, приведенному выше. Скобка Ли в этом базисе легко задается правилом

$$[v_i \wedge j_j, v_j \wedge v_k] = v_i \wedge v_k$$

для различных i, j, k, все остальные произведения базисных векторов равны 0.

В случае пяти исключительных простых алгебр Ли G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8 более сложные изменения базиса могут открыть более интересную конструкцию. Российской математической школой была проведена большая работа по компактным вещественным формам (см., например, книгу Кострикина и Тьепа [3]). Но даже в этой работе трудно найти по-настоящему красивые конструкции. В [4] автором приведена конструкция компактной вещественной формы для G_2, использующая только действие группы $2^{3 \cdot}\,\mathrm{L}_3(2)$. В частности, там показано, что эта группа полностью определяет соответствующую алгебру. Ее действие состоит в перестановке семи попарно ортогональных подалгебр Картана, и скобка Ли определяется единственной простой формулой и ее образом относительно данной группы.

Возвращаясь к алгебре E_6, заметим, что, как известно, комплексная группа Ли $E_6(\mathbb{C})$ содержит конечную подгруппу типа $3^{3+3}{:}\,\mathrm{SL}_3(3)$. Более того, эта подгруппа изоморфна стабилизатору максимального изотропного подпространства (размерности 3) в конечной простой ортогональной группе $\Omega_7(3)$. Поскольку эта подгруппа действует неприводимо на 78-мерной алгебре Ли, она сохраняет единственную (с точностью до умножения на скаляр) эрмитову форму. Кроме того, данное представление вещественно, и если мы запишем его таким образом, то эрмитова форма станет квадратичной (положительно или отрицательно) определенной. Следовательно, она (вновь с точностью до умножения на скаляр) является формой Киллинга, и это влечет, что форма Киллинга отрицательно определена и данная 78-мерная вещественная алгебра Ли является компактной вещественной формой алгебры E_6.

В настоящей работе эта алгебра строится с самого начала без использования чего-либо, кроме строения данной конечной группы. В частности, алгебра единственным образом определена (с точностью до умножения на скаляр) данной группой. Можно надеяться, что представленная конструкция даст полезный способ вычислений компактной вещественной формы алгебры E_6. Более того, вложение алгебры F_4 в E_6 отражается вложением группы $3^3{:}\,\mathrm{SL}_3(3)$ в $3^{3+3}{:}\,\mathrm{SL}_3(3)$, и, следовательно, получаем также простое описание компактной вещественной формы алгебры F_4. Этот факт частично объясним, поскольку он выражается в терминах 13-мерного пространства кватернионов, но, конечно, скобка Ли не (би-)линейна на кватернионах.

Существует очень немного смежных конструкций в литературе, наиболее заметная принадлежит В. П. Буриченко [5] (см. также [6]). Наша работа перекрывает эти работы, и мы идем несколько дальше: наша формула немного более конкретная и точная; мы доказываем существование алгебры Ли типа E_6 независимо от конструкции Шевалле; мы обобщаем результаты на любое поле характеристики, отличной от 3, и находим выражение для подалгебры типа F_4 в терминах гурвицева кольца целых кватернионов.

Существует очень интересная конструкция тройного накрытия $3{\cdot}E_6(\mathbb{C})$ в его 27-мерном представлении, предложенная Гриссом [7] и использующая лупу Муфанг порядка 3^4. Группа автоморфизмов этой лупы изоморфна $3^3{:}\,\mathrm{SL}_3(3)$ и аналогична группе автоморфизмов лупы Муфанг порядка 2^4 октонионов $\{\pm 1, \pm i_0, \dots, \pm i_6\}$, которая изоморфна группе $2^{3}{}^{\cdot}\,\mathrm{SL}_3(2)$. В. П. Буриченко [8] предложил аналогичную конструкцию 27-мерного представления группы $3{}^{\cdot}E_6(\mathbb{C})$ и соответствующего 27-мерного представления группы $3{}^{\cdot}\Omega_7(3)$, которые также кратко приведены в [3, разд. 14.1].

2. Группа $3^{3+3}{:}\,\mathrm{SL}_3(3)$

Простейший способ определить требуемую группу $3^{3+3}{:}\,\mathrm{SL}_3(3)$ как абстрактную группу — сказать, что она изоморфна стабилизатору максимального изотропного подпространства (размерности 3) в простой ортогональной группе $\Omega_7(3)$, действующей на естественном модуле. Однако не будем использовать здесь это определение (хотя оно используется для задания входных данных в некоторых компьютерных вычислениях, приводящих к данным ниже определениям). Вместо этого непосредственно получим действие этой группы на 78-мерном вещественном евклидовом пространстве. Недостаток такого подхода, однако, в том, что не так легко установить, что наша группа имеет в точности требуемое строение, по крайней мере до самого последнего этапа рассуждений.

Напомним, что $\mathrm{L}_3(3)$ (которую можно считать изоморфной любой из групп $\mathrm{SL}_3(3)$, $\mathrm{PSL}_3(3)$ или $\mathrm{PGL}_3(3)$ в соответствии с предпочтениями) является группой автоморфизмов проективной плоскости порядка 3. Данная плоскость состоит из 13 точек и 13 прямых, причем каждая прямая содержит четыре точки. Их можно пометить элементами поля $\mathbb{F}_{13}$ порядка 13 таким образом, что прямые содержат точки $\{t, t+1, t+3, t+9\}$ для любого $t \in \mathbb{F}_{13}$. Как группу подстановок на этих 13 точках $\mathrm{L}_3(3)$ можно породить тремя подстановками

$$a : t \mapsto t+1, \quad b : t \mapsto 3t, \quad c = (3,9)(4,X)(5,6)(7,E),$$

где считаем $X = 10$, $E = 11$, $T = 12$ во избежание путаницы в дальнейшем.

Возьмем 13 евклидовых пространств размерности 6, занумерованных V_0, $\dots$, V_T с индексами из поля $\mathbb{F}_{13}$, как и раньше. Пусть V — ортогональная прямая сумма подпространств V_t. Каждое 6-мерное пространство записано как 3-мерное комплексное пространство с

$$\omega = e^{2\pi i/3} = (-1+\sqrt{-3})/2, \quad \theta = \sqrt{-3} = \omega - \overline{\omega}$$

и евклидовой нормой, равной обычной эрмитовой норме. Тогда 72 корня алгебры E_6 можно взять как образы относительно перестановок координат и произведений каждой координаты на степени числа ω векторов

$$\pm(\theta,0,0) \quad (18 \text{ векторов такого типа}),$$
$$\pm(1,1,1) \quad (54 \text{ вектора такого типа}).$$

Для любого вектора $v \in \mathbb{C}^3$ запишем v_t в качестве соответствующего вектора из V_t.

Опишем действие некоторых элементов на 78-мерном пространстве V. Во-первых, элемент a группы $\mathrm{L}_3(3)$ поднимается до элемента порядка 13 (также называемого a), который переводит каждый вектор v_t в v_{t+1}, так что, например, $(\theta,0,0)_0 \mapsto (\theta,0,0)_1$. Во-вторых, элемент b переводит v_t в v_{3t} и затем умножает его на диагональную матрицу $\mathrm{diag}(\omega, \overline{\omega}, \overline{\omega})$, так что, например, $(1,1,1)_2 \mapsto (\omega, \overline{\omega}, \overline{\omega})_6$. Действие элемента c описать сложнее. Пусть

$$M_1 = \frac{\theta}{3}\begin{pmatrix} \omega & 1 & 1 \\ 1 & \omega & 1 \\ 1 & 1 & \omega \end{pmatrix}, \quad M_2 = \frac{\theta}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \overline{\omega} & \omega \\ 1 & \omega & \overline{\omega} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \frac{\theta}{3}\begin{pmatrix} \omega & \omega & \omega \\ \overline{\omega} & \omega & 1 \\ \overline{\omega} & 1 & \omega \end{pmatrix}, \quad M_4 = \frac{\theta}{3}\begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega \\ \overline{\omega} & \overline{\omega} & \omega \\ \overline{\omega} & \omega & \overline{\omega} \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрицы M_i унитарны, получаем $M_i^{-1} = \overline{M}^\top$, значит, $\overline{M_i^{-1}} = M_i^\top$. Тогда c определен правилом

$$(x,y,z)_0 \mapsto -(\bar{x},\bar{z},\bar{y})_0, \quad (x,y,z)_1 \mapsto -(x,z,y)_1, \quad (x,y,z)_3 \leftrightarrow -(x\omega, z\overline{\omega}, y\overline{\omega})_9,$$

$$(x,y,z)_4 \leftrightarrow (\bar{x},\bar{y},\bar{z})_X, \quad (x,y,z)_T \mapsto (\bar{x},\bar{y},\bar{z})_T, \quad (x,y,z)_2 \mapsto (\bar{x},\bar{y},\bar{z})_2 M_1,$$

$$(x,y,z)_8 \mapsto (\bar{x},\bar{y},\bar{z})_8 M_2, \quad (x,y,z)_5 \leftrightarrow (\bar{x},\bar{y},\bar{z})_6 M_3, \quad (x,y,z)_7 \leftrightarrow (\bar{x},\bar{y},\bar{z})_E M_4.$$

Для ясности также добавим

$$(x,y,z)_9 \mapsto -(x\overline{\omega}, z\omega, y\omega)_3, \quad (x,y,z)_X \mapsto (\bar{x},\bar{y},\bar{z})_4,$$

$$(x,y,z)_6 \mapsto (\bar{x},\bar{y},\bar{z})_5 M_3^\top, \quad (x,y,z)_E \mapsto (\bar{x},\bar{y},\bar{z})_7 M_4^\top.$$

Действие группы, заданной этими порождающими, подстановками на 13 подпространствах $V_0, \ldots, V_T$ в точности совпадает со стандартным подстановочным действием группы $\mathrm{SL}_3(3)$. На самом деле ядро этого действия тривиально, так что a, b и c порождают группу, изоморфную $\mathrm{SL}_3(3)$, но здесь этот факт не нужен и доказывать его не будем. (В любом случае непосредственно можно показать, что все эти порождающие оставляют неподвижным множество из $13 \times 72 = 936$ корней 13 копий алгебры E_6, после этого порядок группы легко получить вычислениями.)

Зададим некоторые элементы, порождающие нормальную подгруппу 3^{3+3}. Во-первых, нормальная подгруппа порядка 3^3 порождается элементами, сопряженными с элементом d, действующим как степени ω на каждом 6-мерном пространстве следующим образом:

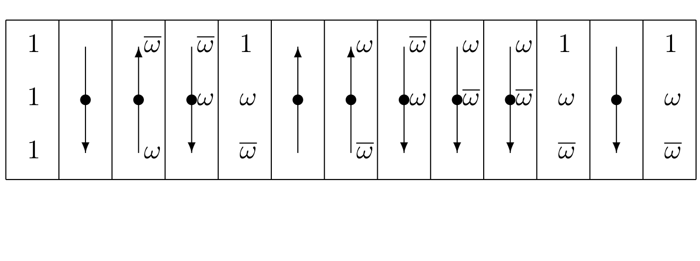
$$(1,\omega,1,\omega,\omega,\omega,\overline{\omega},\overline{\omega},1,\omega,\overline{\omega},\omega,1),$$

так что $v_0 \mapsto v_0$, $v_1 \mapsto \omega v_1$, и т. д.

Лемма 1. *Группа $\langle D, a\rangle$ имеет тип $3^3{:}13$, в котором нормальная подгруппа типа 3^3 порождена элементами d, d^a, d^{a^2}.*

Доказательство. Заметим сначала, что относительно покомпонентного умножения произведение элемента $(1,\omega,1,\omega,\omega,\omega,\overline{\omega},\overline{\omega},1,\omega,\overline{\omega},\omega,1)$ на элемент $(\omega,1,\omega,\omega,\omega,\overline{\omega},\overline{\omega},1,\omega,\overline{\omega},\omega,1,1)$ равно $(\omega,\omega,\omega,\overline{\omega},\overline{\omega},1,\omega,\overline{\omega},\omega,1,1,\omega,1)$. Таким образом, $dd^{a^{-1}} = d^{a^{-3}}$, тем самым минимальный многочлен элемента a при его действии на элементах, сопряженных с d, равен x^3+x^2-1. В частности, сопряженные степенями элемента a с d элементы порождают элементарную абелеву группу порядка 3^3. $\square$

По модулю этой группы D следующий 3^3-фактор действует мономиально на каждом 6-мерном пространстве, порожденном элементами, сопряженными с элементом e, который действует следующим образом:



Лемма 2. *Группа* $H = \langle a,b,d,e\rangle$ *имеет тип* $3^{3+3}{:}13{:}3$, *в котором нормальная подгруппа* $E \cong 3^{3+3}$ *порождена элементами* e, e^a, e^{a^2}.

Доказательство. Похожие вычисления, примененные к e, влекут

$$e^a.e = e^{a^3}.d^{-1},$$

так что по модулю группы $D = \langle d, d^a, d^{a^2}\rangle \cong 3^3$ элементы, сопряженные с e, порождают еще одну группу 3^3. В этом случае минимальный многочлен действия элемента a равен $x^3 - x - 1$. Следовательно, группа, порожденная a, d и e, имеет тип $3^{3+3}{:}13$. Осталось проверить, что b нормализует эту группу. Действительно, легко видеть, что $a^b = a^3$, и нетрудно проверить, что $e^b = e$, так что эти равенства завершают доказательство. $\square$

Пусть G — группа (на самом деле типа $3^{3+3}{:}\,\mathrm{L}_3(3)$), порожденная элементами a,b,c,d,e, и пусть L обозначает группу $\langle a,b,c\rangle$, которая на самом деле изморфна группе $\mathrm{SL}_3(3)$ (хотя мы и не доказываем этот факт здесь). Элемент c оставляет неподвижными точки $0,1,2,8,T$, и, следовательно, подгруппа

$$F = \langle E, c, c^{a^{-1}}, c^{a^{-2}}, c^{a^5}, c^a\rangle$$

оставляет неподвижной точку 0. При действии группы F на V_0 видим, что d, d^a, e лежат в ядре и e^a, e^{a^2} порождают экстраспециальную группу порядка 3^3, которая является образом группы E, значит, очевидно, нормальна в F по модулю ядра этого действия. Простые вычисления показывают, что F действует на V_0 как группа $3^{1+2}{:}2S_4$, которая также известна как $\Gamma\,\mathrm{U}_3(2)$ и изоморфна максимальной подгруппе группы Вейля типа E_6, которая, в свою очередь, изоморфна группе $\Sigma\,\mathrm{U}_4(2)$. Легко видеть, что F действует неприводимо на V_0 и, следовательно, G действует на V.

Аналогично пять прямых, которые оставляет неподвижными элемент c, суть

$$\{0,1,3,9\},\quad \{1,2,4,X\},\quad \{5,6,8,1\},\quad \{E,T,1,7\},\quad \{T,0,2,8\},$$

так что прямая $\{0,1,3,9\}$ неподвижна относительно c, $c^{a^{-1}}$, $c^{a^{-5}}$, c^{a^2}, c^a. Эти элементы действуют на данной прямой как подстановки $(3,9)$, $(3,9)$, $(0,1)$, $(0,9)$ и 1 соответственно, таким образом, индуцируют всю группу S_4 подстановок. В самом деле, они порождают стабилизатор прямой $3^2{:}2S_4$ в группе $\mathrm{L}_3(3)$. Элементы группы D, действующие нетривиально на этой линии, действуют как

$$(1,\omega,\omega,\omega),\quad (\omega,1,\omega,\overline{\omega}),\quad (\omega,\omega,\overline{\omega},1),\quad (\omega,\overline{\omega},1,\omega)$$

или их обратные. Эти элементы будут часто использоваться в дальнейшем.

3. Скобка Ли

В данном разделе покажем, что существует (с точностью до умножения на вещественный скаляр) единственное билинейное произведение, инвариантное относительно действия группы $G = \langle a,b,c,d,e\rangle$ на 78-мерном пространстве V, и, более того, это произведение удовлетворяет тождеству Якоби. Покажем сначала, что существует не более одного такого произведения и что любое произведение, определенное таким образом, является антисимметричным, прежде чем использовать эти утверждения для доказательства того, что действительно существует такое ненулевое произведение, инвариантное относительно G, и что это произведение удовлетворяет тождеству Якоби.

Лемма 3. *С точностью до умножения на вещественный скаляр существует единственное G-инвариантное билинейное произведение на V.*

Доказательство. Поскольку G действует 2-транзитивно на 13 пространствах V_t, достаточно определить произведение на $V_0 \times V_0$ и на $V_0 \times V_1$. Далее действие сопряженных с d элементов немедленно показывает, что произведение должно быть нулевым на $V_0 \times V_0$ и что произведение любого вектора из V_0 на любой вектор из V_1 лежит в $V_3 + V_9$.

Поскольку группа 3^{3+3} действует неприводимо на V_0, необходимо лишь рассмотреть произведения вектора $(1,0,0)_0$ с векторами из V_1. Более того, стабилизатор в 3^{3+3} вектора $(1,0,0)_0$ переставляет девять порождающих векторов

$$(\omega^i,0,0)_1, \quad (0,\omega^i,0)_1, \quad (0,0,\omega^i)_1$$

пространства V_1 транзитивно, значит, достаточно определить произведение вектора $(1,0,0)_0$ на вектор $(1,0,0)_1$.

Элемент e^a оставляет неподвижными векторы $(1,0,0)_0$ и $(1,0,0)_1$ и переводит

$$(x,y,z)_3 \mapsto (y\overline{\omega},z,x\omega)_3, \quad (x,y,z)_9 \mapsto (z\omega,x\overline{\omega},y)_9.$$

Следовательно, произведение вектора $(1,0,0)_0$ на $(1,0,0)_1$ лежит в $\mathbb{C}(\overline{\omega},1,1)_3 + \mathbb{C}(\omega,1,1)_9$.

Далее, c^a оставляет неподвижным $(1,0,0)_0$ и инвертирует $(1,0,0)_1$ и действует на $\mathbb{C}(\overline{\omega},1,1)_3$, оставляя неподвижным $\theta(\overline{\omega},1,1)_3$ и инвертируя $(\overline{\omega},1,1)_3$. Аналогично он оставляет неподвижным $\theta(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9$ и инвертирует $(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9$. Следовательно, данное произведение лежит в $\mathbb{R}(\overline{\omega},1,1)_3 + \mathbb{R}(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9$.

Наконец, c сам инвертирует оба вектора $(1,0,0)_0$ и $(1,0,0)_1$ и переставляет $(\overline{\omega},1,1)_3$ с $-(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9$. Тем самым данное произведение является вещественно кратным вектору $(\overline{\omega},1,1)_3 - (1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9$. Значит, с точностью до умножения на скаляр существует не более одного билинейного произведения, инвариантного относительно группы G. $\square$

Наша стратегия доказательства того, что такое (ненулевое) произведение действительно существует, разбивается на четыре шага, рассматриваемых в леммах 4–7 соответственно:

(1) показать, что любое такое произведение антисимметрично;

(2) найти два частных значения данного произведения, образов которых относительно H достаточно, чтобы определить все произведение;

(3) доказать, что это произведение корректно определено, т. е. инвариантно относительно H;

(4) доказать, что это произведение инвариантно относительно c.

Лемма 4. *Любое G-инвариантное произведение на V антисимметрично.*

Доказательство. В силу доказательства леммы 3 можем предполагать, что произведение, обозначаемое $[u,v]$, удовлетворяет равенству

$$[(1,0,0)_0,(1,0,0)_1] = (\overline{\omega},1,1)_3 - (1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9.$$

Применение $c^{a^{-5}}$ к этому равенству дает

$$\left[\frac{\theta}{3}(\omega,\omega,\omega)_1, \frac{\theta}{3}(\omega,\overline{\omega},\overline{\omega})_0\right] = (\omega,1,1)_3 M_2 + (1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9 = (\omega,\overline{\omega},\overline{\omega})_3 + (1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9.$$

Подсчитаем произведение этих двух векторов другим способом. Применяя e к определяющему равенству, имеем

$$[(1,0,0)_0,(1,0,0)_1]=[(1,0,0)_0,(0,1,0)_1]=[(1,0,0)_0,(0,0,1)_1].$$

Аналогично, применяя остальные сопряженные с e и d элементы, получаем следующую таблицу умножения:

	$(1,0,0)_1$	$(0,1,0)_1$	$(0,0,1)_1$
$(1,0,0)_0$	$(\overline{\omega},1,1)_3-(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9$	$(\overline{\omega},1,1)_3-(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9$	$(\overline{\omega},1,1)_3-(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9$
$(0,1,0)_0$	$(1,\overline{\omega},1)_3-(\omega,\omega,\overline{\omega})_9$	$(\overline{\omega},\omega,\overline{\omega})_3-(1,1,\omega)_9$	$(\omega,1,\omega)_3-(\overline{\omega},\overline{\omega},1)_9$
$(0,0,1)_0$	$(1,1,\overline{\omega})_3-(\omega,\overline{\omega},\omega)_9$	$(\omega,\omega,1)_3-(\overline{\omega},1,\overline{\omega})_9$	$(\overline{\omega},\overline{\omega},\omega)_3-(1,\omega,1)_9$

На самом деле применение сопряженных с d элементов довольно просто: если умножим v_0 на ω и зафиксируем v_1, то должны умножить v_3 на ω и v_9 на $\overline{\omega}$. С другой стороны, если зафиксируем v_0 и умножим v_1 на ω, то должны умножить оба вектора v_3 и v_9 на ω. Это быстро приводит к равенствам

$$[(\omega,0,0)_0,(\omega,\omega,\omega)_1]=3(\omega,\overline{\omega},\overline{\omega})_3-3(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9,$$

$$[(0,\overline{\omega},0)_0,(\omega,\omega,\omega)_1]=0,\quad [(0,0,\overline{\omega})_0,(\omega,\omega,\omega)_1]=0,$$

из которых получаем

$$\left[\frac{\theta}{3}(\omega,\overline{\omega},\overline{\omega})_0,\frac{\theta}{3}(\omega,\omega,\omega)_1\right]=-(\omega,\overline{\omega},\overline{\omega})_3-(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9=-\left[\frac{\theta}{3}(\omega,\omega,\omega)_1,\frac{\theta}{3}(\omega,\overline{\omega},\overline{\omega})_0\right].$$

Поскольку по лемме 3 единственное ненулевое значение произведения определяет произведение полностью, отсюда следует, что все произведение антисимметрично. $\square$

Лемма 5. *Любое G-инвариантное произведение на V определяется антисимметричностью и образами относительно H в точности двух произведений, которые можно взять (с точностью до умножения на скаляр) равными*

$$[(1,0,0)_0,(1,0,0)_1]=(\overline{\omega},1,1)_3-(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9,$$

$$[(1,0,0)_1,(1,0,0)_9]=-(1,\omega,\omega)_0+(\overline{\omega},\omega,\omega)_3.$$

Доказательство. Поскольку группа 13:3, порожденная элементами a и b, имеет в точности две (регулярные) орбиты на неупорядоченных парах из 13 точек с представителями $\{0,1\}$ и $\{1,9\}$, достаточно определить произведение на $V_1\times V_9$. Рассуждения, аналогичные приведенным во втором абзаце доказательства леммы 3, показывают, что достаточно определить $[(1,0,0)_1,(1,0,0)_9]$.

Применение c к равенству

$$[(1,0,0)_8,(1,0,0)_9]=(\overline{\omega},1,1)_E-(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_4$$

дает

$$-\left[\frac{\theta}{3}(1,1,1)_8,(\overline{\omega},0,0)_3\right]=(\omega,1,1)_7M_4^{\top}-(1,\omega,\omega)_X=(\theta\omega,0,0)_7-(1,\omega,\omega)_X$$

$$\Rightarrow\left[\frac{\theta}{3}(1,1,1)_1,(\overline{\omega},0,0)_9\right]=-(\theta\omega,0,0)_0+(1,\omega,\omega)_3$$

$$\Rightarrow\left[\frac{\theta}{3}(1,1,1)_1,(1,0,0)_9\right]=-(\theta,0,0)_0+(\overline{\omega},1,1)_3.$$

Теперь применим $e^{a^{-3}}$:

$$\left[\frac{\theta}{3}(1,\omega,\overline{\omega})_1,(1,0,0)_9\right] = -(0,\theta\omega,0)_0 + (\omega,1,\omega)_3,$$

$$\left[\frac{\theta}{3}(1,\overline{\omega},\omega)_1,(1,0,0)_9\right] = -(0,0,\theta\omega)_0 + (\omega,\omega,1)_3,$$

и просуммируем последние три равенства, чтобы получить

$$[(\theta,0,0)_1,(1,0,0)_9] = -\theta(1,\omega,\omega)_0 - \theta(\overline{\omega},\omega,\omega)_3$$
$$\Rightarrow [(1,0,0)_1,(1,0,0)_9] = -(1,\omega,\omega)_0 + (\overline{\omega},\omega,\omega)_3,$$

как и требовалось. Для того чтобы найти значения произведения, достаточно лишь применить элементы из H к двум полученным значениям и использовать антисимметричность и билинейность. □

Лемма 6. *Существует единственное H-инвариантное антисимметричное произведение на V, удовлетворяющее равенствам*

$$[(1,0,0)_0,(1,0,0)_1] = (\overline{\omega},1,1)_3 - (1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9,$$
$$[(1,0,0)_1,(1,0,0)_9] = -(1,\omega,\omega)_0 + (\overline{\omega},\omega,\omega)_3.$$

Доказательство. Бóльшая часть группы $H \cong 3^{3+3}{:}13{:}3$ использована для того, чтобы получить новые значения произведения из двух данных значений. В самом деле, сопряженные с d элементы дают умножение на ω, и два сопряженных с e элемента переставляют три координаты в двух факторах. Осталось проверить, что сопряженные с e элементы, которые оставляют неподвижными два фактора, не меняют также и произведение. В случае произведения $[(1,0,0)_0,(1,0,0)_1]$ этот факт использовался для того, чтобы задать произведение в первой части, поэтому он уже проверен. Остальные случаи настолько же простые. Наконец, фактор-группа $13{:}3$ действует регулярно на двух орбитах, каждая из которых состоит из 39 неупорядоченных пар, что дает все произведение на L. □

Для облегчения вычислений приводим более полный вариант таблицы умножения в табл. 1. Он может быть использован вместе с действием группы D, которая показывает, как вычислять произведение векторов с координатами ω или $\overline{\omega}$.

Лемма 7. *Произведение, определенное в лемме* 6, *инвариантно относительно G.*

Доказательство. Достаточно доказать, что это произведение инвариантно относительно c. Поскольку c нормализует группу $3^{3+3}{:}3$, порожденную b вместе с элементами, сопряженными с d и e, достаточно проверить произведение одной пары базисных векторов в каждой из орбит последней группы. Существует 26 таких орбит с представителями

$$[(1,0,0)_t,(1,0,0)_{t+1}], \quad [(1,0,0)_t,(1,0,0)_{t+2}]$$

для каждого $t \in \mathbb{F}_{13}$.

Простейшие случаи — это случаи, когда c действует мономиально, т. е. на координатах $t = 0,1,3,4,9,X,T$. Существует семь таких случаев, а именно, $T0$, 01, 34 и $9X$ вида $t,t+1$, и XT, $T1$ и 13 — вида $t,t+2$. В случае 01 имеем

$$[(1,0,0)_0,(1,0,0)_1] = (\overline{\omega},1,1)_3 - (1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9,$$

Таблица 1. Скобка Ли на алгебре E_6

	$(1,0,0)_1$	$(0,1,0)_1$	$(0,0,1)_1$
$(1,0,0)_0$	$(\overline{\omega},1,1)_3-(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9$	$(\overline{\omega},1,1)_3-(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9$	$(\overline{\omega},1,1)_3-(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9$
$(0,1,0)_0$	$(1,\overline{\omega},1)_3-(\omega,\omega,\overline{\omega})_9$	$(\overline{\omega},\omega,\overline{\omega})_3-(1,1,\omega)_9$	$(\omega,1,\omega)_3-(\overline{\omega},\overline{\omega},1)_9$
$(0,0,1)_0$	$(1,1,\overline{\omega})_3-(\omega,\overline{\omega},\omega)_9$	$(\omega,\omega,1)_3-(\overline{\omega},1,\overline{\omega})_9$	$(\overline{\omega},\overline{\omega},\omega)_3-(1,\omega,1)_9$
	$(1,0,0)_3$	$(0,1,0)_3$	$(0,0,1)_3$
$(1,0,0)_0$	$(\omega,1,1)_9-(\omega,\omega,\omega)_1$	$(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9-(1,1,1)_1$	$(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9-(1,1,1)_1$
$(0,1,0)_0$	$(\omega,\omega,\overline{\omega})_9-(1,\omega,\overline{\omega})_1$	$(\overline{\omega},\overline{\omega},1)_9-(\omega,\overline{\omega},1)_1$	$(\omega,\omega,\overline{\omega})_9-(1,\omega,\overline{\omega})_1$
$(0,0,1)_0$	$(\omega,\overline{\omega},\omega)_9-(1,\overline{\omega},\omega)_1$	$(\omega,\overline{\omega},\omega)_9-(1,\overline{\omega},\omega)_1$	$(\overline{\omega},1,\overline{\omega})_9-(\omega,1,\overline{\omega})_1$
	$(1,0,0)_9$	$(0,1,0)_9$	$(0,0,1)_9$
$(1,0,0)_0$	$(1,1,1)_1-(\overline{\omega},1,1)_3$	$(\omega,\omega,\omega)_1-(1,\omega,\omega)_3$	$(\omega,\omega,\omega)_1-(1,\omega,\omega)_3$
$(0,1,0)_0$	$(\overline{\omega},1,\omega)_1-(\overline{\omega},\omega,\overline{\omega})_3$	$(\overline{\omega},1,\omega)_1-(\overline{\omega},\omega,\overline{\omega})_3$	$(\omega,\overline{\omega},1)_1-(\omega,1,\omega)_3$
$(0,0,1)_0$	$(\overline{\omega},\omega,1)_1-(\overline{\omega},\overline{\omega},\omega)_3$	$(\omega,1,\overline{\omega})_1-(\omega,\omega,1)_3$	$(\overline{\omega},\omega,1)_1-(\overline{\omega},\overline{\omega},\omega)_3$
	$(1,0,0)_3$	$(0,1,0)_3$	$(0,0,1)_3$
$(1,0,0)_1$	$(\omega,1,1)_0-(\overline{\omega},\overline{\omega},\overline{\omega})_9$	$(1,\omega,1)_0-(\omega,1,\overline{\omega})_9$	$(1,1,\omega)_0-(\omega,\overline{\omega},1)_9$
$(0,1,0)_1$	$(\omega,\omega,\overline{\omega})_0-(1,\overline{\omega},\omega)_9$	$(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_0-(\omega,\overline{\omega},1)_9$	$(1,\omega,1)_0-(1,1,1)_9$
$(0,0,1)_1$	$(\omega,\overline{\omega},\omega)_0-(1,\omega,\overline{\omega})_9$	$(1,1,\omega)_0-(1,1,1)_9$	$(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_0-(\omega,1,\overline{\omega})_9$
	$(1,0,0)_9$	$(0,1,0)_9$	$(0,0,1)_9$
$(1,0,0)_3$	$(\overline{\omega},\overline{\omega},\overline{\omega})_0-(\overline{\omega},1,1)_1$	$(1,\omega,\overline{\omega})_0-(\overline{\omega},\omega,\overline{\omega})_1$	$(1,\overline{\omega},\omega)_0-(\overline{\omega},\overline{\omega},\omega)_1$
$(0,1,0)_3$	$(\omega,\omega,\omega)_0-(1,\overline{\omega},1)_1$	$(1,\omega,\overline{\omega})_0-(\omega,\omega,1)_1$	$(\omega,1,\overline{\omega})_0-(\overline{\omega},1,1)_1$
$(0,0,1)_3$	$(\omega,\omega,\omega)_0-(1,1,\overline{\omega})_1$	$(\omega,\overline{\omega},1)_0-(\overline{\omega},1,1)_1$	$(1,\overline{\omega},\omega)_0-(\omega,1,\omega)_1$
	$(1,0,0)_1$	$(0,1,0)_1$	$(0,0,1)_1$
$(1,0,0)_9$	$(1,\omega,\omega)_0-(\overline{\omega},\omega,\omega)_3$	$(1,1,\overline{\omega})_0-(1,\omega,1)_3$	$(1,\overline{\omega},1)_0-(1,1,\omega)_3$
$(0,1,0)_9$	$(\overline{\omega},\omega,\overline{\omega})_0-(\overline{\omega},1,\overline{\omega})_3$	$(\overline{\omega},1,1)_0-(\overline{\omega},\overline{\omega},1)_3$	$(\overline{\omega},\overline{\omega},\omega)_0-(\omega,1,1)_3$
$(0,0,1)_9$	$(\overline{\omega},\overline{\omega},\omega)_0-(\overline{\omega},\overline{\omega},1)_3$	$(\overline{\omega},\omega,\overline{\omega})_0-(\omega,1,1)_3$	$(\overline{\omega},1,1)_0-(\overline{\omega},1,\overline{\omega})_3$

и левая часть неподвижна относительно c (поскольку оба множителя инвертируются), в то время как слагаемые в правой части переставляются. Таким образом, данное произведение остается неподвижным относительно c, как и требовалось. В случае $T0$ имеем

$$[(1,0,0)_T,(1,0,0)_0]=(\overline{\omega},1,1)_2-(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_8,$$

и на этот раз левая часть инвертируется элементом c, в то время как правая часть переходит в

$$(\omega,1,1)_2M_1-(1,\omega,\omega)_8M_2=-(\overline{\omega},1,1)_2+(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_8,$$

как и требовалось, поскольку $2+\overline{\omega}=\overline{\omega}\theta$ и $1+2\omega=\theta$.

Рассмотрим случай $9X$. Имеем равенство

$$[(1,0,0)_9,(1,0,0)_X]=(\overline{\omega},1,1)_T-(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_5,$$

в котором c переводит левую часть в $-[(\overline{\omega},0,0)_3,(1,0,0)_4]$ и правую — в

$$(\omega,1,1)_T-(1,\omega,\omega)_6M_3=(\omega,1,1)_T-(\omega,\overline{\omega},\overline{\omega})_6.$$

Полученное равенство можно проверить, используя табл. 1, после применения подходящего элемента из D.

В случае 13 имеем

$$[(1,0,0)_1, (1,0,0)_3] = (\omega, 1, 1)_0 - (\overline{\omega}, \overline{\omega}, \overline{\omega})_9,$$

и левая часть равенства элементом c переводится в $[(1,0,0)_1, (\omega,0,0)_9]$, в то время как правая переводится в $-(\overline{\omega},1,1)_0 + (\omega,1,1)_3$. Полученное равенство вновь проверяется с помощью табл. 1. Аналогично правая часть равенства

$$[(1,0,0)_X, (1,0,0)_T] = (\omega,1,1)_9 - (\overline{\omega}, \overline{\omega}, \overline{\omega})_5$$

переходит в элемент

$$-(1,\omega,\omega)_3 - (\omega,\omega,\omega)_6 M_3 = -(1,\omega,\omega)_3 + (\overline{\omega},\omega,\omega)_6,$$

который равен $[(1,0,0)_4, (1,0,0)_T]$, как и требовалось.

В случае $T1$ имеем

$$[(1,0,0)_T, (1,0,0)_1] = (\omega,1,1)_E - (\overline{\omega}, \overline{\omega}, \overline{\omega})_7,$$

и второе слагаемое в правой части элементом c переводится в

$$-(\omega,\omega,\omega)_E M_4 = -(\omega,1,1)_E.$$

Поскольку c имеет порядок 2, он также отправляет первое слагаемое из правой части в противоположное второму слагаемому и, значит, c сохраняет произведение и в этом случае.

Остальные 19 из 26 вычислений более трудные, так как c не нормализует левую часть, и оставляются читателю в качестве упражнений. Вычисления можно уменьшить с 19 случаев до 14, используя тот факт, что c имеет порядок 2. Это случаи

$$12/45/56/78/XE/02/57/79/E0$$

и по одному случаю в каждой из пар

$$23/35, 24/46, 67/68, 89/9E, 8X/ET.$$

На самом деле одно из этих вычислений в точности проделано в лемме 5, где показана эквивалентность следующих равенств:

$$[(1,0,0)_8, (1,0,0)_9] = (\overline{\omega},1,1)_E - (1,\overline{\omega},\overline{\omega})_4,$$

$$[(1,0,0)_8, (1,0,0)_3] = -(1,\omega,\omega)_7 + (\overline{\omega},\omega,\omega)_X.$$

Применяя b ко второму равенству, получаем

$$[(\omega,0,0)_E, (\omega,0,0)_9] = -(\omega,\overline{\omega},\overline{\omega})_8 + (1,\overline{\omega},\overline{\omega})_4$$

и, следовательно,

$$[(1,0,0)_9, (1,0,0)_E] = (\omega,\overline{\omega},\overline{\omega})_8 - (\overline{\omega},\omega,\omega)_4. \quad \square$$

Следующая теорема обобщает все полученные в данном разделе результаты.

Теорема 1. *С точностью до умножения на скаляр существует единственное билинейное произведение 78-мерного пространства V, инвариантное относительно действия группы G. Это произведение определено равенством*

$$[(1,0,0)_0,(1,0,0)_1] = (\overline{\omega},1,1)_3 - (1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9$$

и антисимметрично.

Осталось проверить, что наше произведение удовлетворяет тождеству Якоби

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0.$$

В силу линейности и антисимметричности и инвариантности формулы относительно циклической перестановки x,y,z достаточно проверить тождество для неупорядоченных троек $\{x,y,z\}$ различных базисных векторов.

Предложение 1. *Произведение, определенное в лемме* 6, *удовлетворяет тождеству Якоби.*

Доказательство. Нужно проверить, что

$$[[x_r,y_s],z_t] + [[y_s,z_t],x_r] + [[z_t,x_r],y_s] = 0$$

при подходящем выборе (линейно независимых) векторов x_r, y_s, z_t. Если r,s,t не коллинеарны, то полагаем

$$x_r = (1,0,0)_0, \quad y_s = (1,0,0)_1, \quad z_t = (1,0,0)_2.$$

Если r,s,t коллинеарны и различны, то положим

$$x_r = (1,0,0)_0, \quad y_s = (1,0,0)_1 \ \text{ и } \ z_t = (1,0,0)_3 \text{ или } (\omega,0,0)_3.$$

Если r,s,t коллинеарны и два из них равны, то можно считать, что

$$x_r = (1,0,0)_0, \quad y_s = (1,0,0)_1 \ \text{ и } \ z_t = (\omega,0,0)_0 \text{ или } (0,1,0)_0.$$

Таким образом, нужно проверить пять случаев. Четыре случая, когда r,s,t коллинеарны, довольно просты, и мы оставляем их в качестве упражнений. В самом сложном случае, когда они не коллинеарны, проводим вычисления следующим образом:

$$\begin{aligned}
&[[(1,0,0)_0,(1,0,0)_1],(1,0,0)_2] + [[(1,0,0)_1,(1,0,0)_2],(1,0,0)_0] \\
&\quad + [[(1,0,0)_2,(1,0,0)_0],(1,0,0)_1] = [(\overline{\omega},1,1)_3,(1,0,0)_2] - [(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9,(1,0,0)_2] \\
&\qquad + [(\overline{\omega},1,1)_4,(1,0,0)_0] - [(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_X,(1,0,0)_0] - [(\omega,1,1)_T,(1,0,0)_1] \\
&\qquad\qquad + [(\overline{\omega},\overline{\omega},\overline{\omega})_8,(1,0,0)_1].
\end{aligned}$$

Затем вычисляем каждое слагаемое в правой части таким образом (опускаем вычислительные детали):

$$\begin{gathered}
[(\overline{\omega},1,1)_3,(1,0,0)_2] = -\theta(\omega,\overline{\omega},\overline{\omega})_5 + \theta(\overline{\omega},\omega,\omega)_E, \\
[(\overline{\omega},1,1)_4,(1,0,0)_0] = 3(\overline{\omega},0,0)_5 + \theta(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_7, \\
[(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_X,(1,0,0)_0] = -\theta(\omega,\omega,\omega)_6 - 3(\omega,0,0)_E, \\
[(1,0,0)_2,(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9] = \theta(\overline{\omega},1,1)_6 + 3(\overline{\omega},0,0)_7, \\
[(\omega,1,1)_T,(1,0,0)_1] = \theta(1,\omega,\omega)_E + \theta(\omega,\overline{\omega},\overline{\omega})_7, \\
[(\overline{\omega},\overline{\omega},\overline{\omega})_8,(1,0,0)_1] = \theta(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_5 + \theta(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_6.
\end{gathered}$$

Наконец, объединяем все эти результаты и находим, что все слагаемые сокращаются, давая нам 0, как и требовалось. $\square$

4. Отождествление алгебры с E_6

Легко видеть, что скобка Ли нетождественно равна нулю на любом подпространстве, содержащем V_0 собственным образом, и, следовательно, V_0 является подалгеброй Картана. Стабилизатор подпространства V_0 в G — группа типа $3^{3+3}{:}3^2{:}2S_4$, действующая на V_0 как $3^{1+2}{:}2S_4$. Поскольку эта группа не имеет точного комплексного представления степени меньшей, чем 6, она действует абсолютно неприводимо на V_0. Следовательно, алгебра Ли проста, значит, в силу классификационной теоремы она совпадает с E_6. Поскольку G действует неприводимо, единственные инвариантные квадратичные формы знакоопределенны. В частности, форма Киллинга отрицательно определенная, значит, полученная алгебра является компактной вещественной формой алгебры E_6.

Альтернативное доказательство можно провести, используя базовые предположения расширением поля до $\mathbb{C}$ и явной диагонализацией действия подалгебры V_0 умножениями на L и тем самым получая корневые подпространства. Они, в свою очередь, могут быть явным образом отождествлены с 72 корнями корневой системы E_6, и можно вычислить произведения корневых векторов. После этого было бы ясно, что комплексификация нашей алгебры совпадает с обычной комплексной алгеброй Ли типа E_6.

На первом шаге вычисляем подпространства собственных векторов относительно действия подалгебры V_0. Находим, что одно из подпространств натянуто на

$$v = (1,1,1)_1 + (\omega,\overline{\omega},\overline{\omega})_3 + (\omega,1,1)_9.$$

Чтобы проверить этот факт, вычисляем

$$\begin{aligned}[(1,0,0)_0, v] = 3(\overline{\omega},1,1)_3 - 3(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9 + 3(\overline{\omega},\omega,\omega)_9 - 3(\overline{\omega},\overline{\omega},\overline{\omega})_1 \\ + 3(\omega,\omega,\omega)_1 - 3(1,\omega,\omega)_3 = 3\theta v,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(\omega,0,0)_0, v] = 3(1,\omega,\omega)_3 - 3(\overline{\omega},\omega,\omega)_9 + 3(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9 - 3(\omega,\omega,\omega)_1 \\ + 3(\overline{\omega},\overline{\omega},\overline{\omega})_1 - 3(\overline{\omega},1,1)_3 = -3\theta v,\end{aligned}$$

$$[(0,1,0)_0, v] = [(0,\omega,0)_0, v] = [(0,0,1)_0, v] = [(0,0,\omega)_0, v] = 0.$$

Более того, это комплексное пространство из собственных векторов соответствует паре корней $\pm(1-\omega,0,0)_0 = \pm(\overline{\omega}\theta,0,0)_0$. Применяя подходящие элементы группы D, получаем соответствие

$$\pm(\theta,0,0) \leftrightarrow \langle (1,1,1)_1 + (\overline{\omega},1,1)_3 + (1,\overline{\omega},\overline{\omega})_9, (\omega,\omega,\omega)_1 + (1,\omega,\omega)_3 + (\omega,1,1)_9 \rangle.$$

Заметим, что «умножение на скаляр» всегда интерпретируется как применение подходящего элемента из D, значит, не всегда совпадает со скалярным умножением на ω. Остальные орбиты алгебры E возникают из следующих соответствий:

$$\pm(1,1,1)_0 \leftrightarrow \langle (\theta,0,0)_T + (\overline{\omega},1,1)_2 - (1,\overline{\omega},\overline{\omega})_8, (\omega\theta,0,0)_T + (1,\omega,\omega)_2 - (\overline{\omega},\omega,\omega)_8 \rangle,$$

$$\pm(1,\omega,\omega)_0 \leftrightarrow \langle (\theta,0,0)_X - (\omega,\omega,\omega)_E + (\omega,1,1)_6, (\omega\theta,0,0)_X - (1,1,1)_E + (\overline{\omega},\omega,\omega)_6 \rangle,$$

$$\pm(1,\overline{\omega},\overline{\omega})_0 \leftrightarrow \langle (\theta,0,0)_4 + (1,1,1)_5 - (\overline{\omega},1,1)_7, (\omega\theta,0,0)_4 + (\omega,\omega,\omega)_5 - (\omega,\overline{\omega},\overline{\omega})_7 \rangle.$$

Далее можем использовать элементы из стабилизатора подалгебры V_0 в группе $3^{3+3}{:}\,\mathrm{SL}_3(3)$ для того, чтобы получить все остальные корневые пространства, помеченные соответствующими корнями. Поточечный стабилизатор подалгебры V_0 является элементарной абелевой группой порядка 3^5, порожденной элементами $d, d^a, e, c^{a^{-1}}cc^a, (c^{a^{-2}}c^{a^5}c^{a^{-2}}c)^2b$. Отсюда следует (и это можно проверить непосредственными вычислениями), что v является собственным вектором для этой группы. Элементы e^a, e^{a_2} затем переводят данное подпространство из собственных векторов в девять подпространств из собственных векторов, лежащих в $V_1 + V_3 + V_9$. Подпространства, лежащие в других «прямых», содержащих 0, можно получить, применяя другие сопряженные с элементом c, которые оставляют неподвижной точку 0.

Напомним, что наше 39-мерное комплексное обозначение означает 78-мерное вещественное векторное пространство. Для того чтобы найти базис Шевалле, очевидно, необходимо расширить умножение на скаляр на элементы поля $\mathbb{C}$ (не путая вещественный вектор ω с комплексным скаляром $e^{2\pi i/3}$). Тогда любое из наших «подпространств, состоящих из собственных векторов» превращается в 2-мерное пространство, в котором можно выделить два корневых вектора, соответствующих корню и обратному к нему.

5. Подалгебра типа F_4

Подпространство W_t пространства V_t, состоящее из векторов $(x, y, y)_t$, имеет (вещественную) размерность 4. Прямая сумма W подпространств W_t является пространством размерности 52, которое, как легко видеть, инвариантно относительно действия элементов a, b, c, d. Эти элементы на самом деле порождают группу симметрий типа $3^3{:}\,\mathrm{L}_3(3)$.

Данная группа на каждом W_t индуцирует группу типа $(3\times 2A_4){:}2$, действующую неприводимо. Используя группу симметрий, нетрудно показать, что пространство W замкнуто относительно скобки Ли. Следовательно, W является простой алгеброй Ли ранга 4 и размерности 52 и может быть только компактной вещественной формой алгебры F_4.

Короткие корни корневой системы F_4 могут быть выбраны как 24 вектора вида

$$\pm\omega^n(\theta, 0, 0), \quad \pm\omega^n(1, 1, 1), \quad \pm\omega^n(1, \omega, \omega), \quad \pm\omega^n(1, \overline{\omega}, \overline{\omega}).$$

Мы можем пометить эти векторы единицами алгебры кватернионов, определив

$$1 = -(\theta, 0, 0), \quad i = (1, 1, 1), \quad j = (1, \omega, \omega), \quad k = (1, \overline{\omega}, \overline{\omega})$$

и отождествив (левое) умножение на комплексное число ω с левым умножением на кватернион $\omega = (-1 + i + j + k)/2$. Пусть q_t обозначает кватернион q в пространстве W_t.

В этих обозначениях компактная вещественная форма алгебры Ли типа F_4 становится 13-мерным объектом над алгеброй кватернионов. Он, конечно, не является линейным, но кватернионы обеспечивают компактное обозначения для умножения и действия некоторых автоморфизмов. Например, d превращается в лево-кватернионное умножение на $(1, \omega, 1, \omega, \omega, \omega, \overline{\omega}, \overline{\omega}, 1, \omega, \overline{\omega}, \omega, 1)$ на 13 пространствах W_t. Аналогично элемент b превращается в $q_t \mapsto q_{3t}\omega$, т. е. в комбинацию право-кватернионного умножения на ω с перестановкой координат $(1, 3, 9)(2, 6, 5)(4, T, X)(8, E, 7)$.

Аналогично матрицы M_1, M_2, M_3, M_4, определенные ранее, индуцируют правое умножение на кватернионы $j\omega$, i, $k\omega$, j соответственно. Комплексное сопряжение индуцирует обратный к автоморфизму $*$, который инвертирует i и переставляет j с $-k$. Тогда c переводит

$$q_0 \mapsto q_0^*, \quad q_1 \mapsto -q_1, \quad q_3 \leftrightarrow -(q\omega)_9, \quad q_4 \leftrightarrow -q_X^*, \quad q_T \mapsto -q_T^*,$$

$$q_2 \mapsto -(q^* j\omega)_2, \quad q_8 \mapsto -(q^* i)_8, \quad q_5 \leftrightarrow -(q^* k\omega)_6, \quad q_7 \leftrightarrow -(q^* j)_E.$$

Для удобства также заметим, что

$$q_9 \mapsto -(q\overline{\omega})_3, \quad q_X \mapsto -q_4^*, \quad q_6 \mapsto -(q^* i\omega)_5, \quad q_E \mapsto -(q^* k)_7.$$

Скобка Ли, подходящим образом масштабированная (на самом деле она равна предыдущему произведению, разделенному на -3), записана более детально в табл. 2. Все произведения корней в W_t можно получить из этой таблицы, применяя элементы группы $D \cong 3^3$. На самом деле эта таблица может также быть полезной при вычислении произведения в E_6 при применении элементов из $E \cong 3^{3+3}$ к элементам таблицы.

Замечание 1. Можно ожидать, что результат, похожий на теорему 1, должен быть справедлив также для F_4. Иначе говоря, можно предположить, что существует единственная алгебра, инвариантная относительно подходящего 52-мерного представления группы $3^3{:}\,\mathrm{L}_3(3)$. Однако это не так.

В группе $3^3{:}\,\mathrm{SL}_3(3)$ поточечный стабилизатор пространства W_0 является элементарной абелевой группой порядка 3^4, порожденной элементами d, d^a, $c^{a^{-1}}cc^a$, $(c^{a^{-2}}c^{a^5}c^{a^{-2}}c)^2b$. Можем повторно вычислить действие элемента $c^{a^{-1}}cc^a$ в F_4 следующим образом:

$$q_0 \mapsto q_0, \quad q_1 \mapsto -(qk\overline{\omega})_1, \quad q_2 \mapsto (qj\omega)_T, \quad q_3 \mapsto -(qi\overline{\omega})_3, \quad q_4 \mapsto (q^* i\omega)_7,$$
$$q_5 \mapsto (qi\omega)_4, \quad q_6 \mapsto (qk\omega)_X, \quad q_7 \mapsto -(q^* j)_5, \quad q_8 \mapsto -(q^* i\overline{\omega})_2, \quad q_9 \mapsto -(qj\overline{\omega})_9,$$
$$q_X \mapsto (q^* j\overline{\omega})_E, \quad q_E \mapsto -(q^* k\omega)_6, \quad q_T \mapsto (q^* k)_8.$$

Окончательно элемент $(c^{a^{-2}}c^{a^5}c^{a^{-2}}c)^2b$ действует следующим образом:

$$q_0 \mapsto q_0, \quad q_1 \mapsto (q\omega)_3, \quad q_2 \mapsto (qj)_T, \quad q_3 \mapsto -(qi)_9, \quad q_4 \mapsto (q\overline{\omega})_4,$$
$$q_5 \mapsto -(qk\overline{\omega})_5, \quad q_6 \mapsto (q^*\overline{\omega})_E, \quad q_7 \mapsto (qk\omega)_7, \quad q_8 \mapsto (q^* k\omega)_2, \quad q_9 \mapsto (qi\overline{\omega})_1,$$
$$q_X \mapsto -(qj\omega)_6, \quad q_E \mapsto (q^* i\omega)_X, \quad q_T \mapsto (q^* j\omega)_8.$$

Мы можем найти общий «собственный вектор» этой группы 3^4, где вновь умножение на скаляр определено элементом из D. Эти векторы являются образами относительно D и a векторов

$$\pm 1_0 \leftrightarrow \langle i_1 + \overline{\omega} j_3 + k_9, \omega i_1 + j_3 + \omega k_9 \rangle,$$

$$\pm i_0 \leftrightarrow \langle 1_T - \overline{\omega} j_2 + k_8, \omega_T - j_2 + \overline{\omega} k_8 \rangle,$$

$$\pm j_0 \leftrightarrow \langle 1_X + \omega i_E - \omega k_6, \omega_X + i_E - \overline{\omega} k_6 \rangle,$$

$$\pm k_0 \leftrightarrow \langle 1_4 - i_5 + \overline{\omega} j_7, \omega_4 - \omega i_5 + \omega j_7 \rangle.$$

Остальные собственные векторы можно найти, применяя элементы из стабилизатора пространства W_0.

Более точно, можно использовать часть группы Вейля корневой системы F_4, которая лежит в $3^3{:}\,\mathrm{SL}_3(3)$. Это группа $(3 \times 2{\cdot}A_4){:}2$, являющаяся централизатором инволюции в $3^3{:}\,\mathrm{SL}_3(3)$. Если возьмем инволюцию $c^{a^{-1}}$, то она централизуется элементом $d^{a^{-1}}$ в нормальной подгруппе 3^3 и элементами $c^{a^{-2}}$ и

Таблица 2. Таблица умножения алгебры F_4

	$\overline{\omega}1_1$	$\overline{\omega}i_1$	$\overline{\omega}j_1$	$\overline{\omega}k_1$
$\overline{\omega}1_0$	j_3+k_9	$\theta j_3+\theta k_9$	$-j_3-k_9$	j_3+k_9
$\overline{\omega}i_0$	$-i_3+j_9$	$-j_3+k_9$	1_3-1_9	k_3-i_9
$\overline{\omega}j_0$	k_3+1_9	$-j_3+k_9$	i_3+i_9	-1_3+j_9
$\overline{\omega}k_0$	-1_3-i_9	$-j_3+k_9$	$-k_3-j_9$	$-i_3+1_9$
	$\overline{\omega}1_3$	$\overline{\omega}i_3$	$\overline{\omega}j_3$	$\overline{\omega}k_3$
1_0	k_9+i_1	k_9+i_1	$\theta k_9+\theta i_1$	$-k_9-i_1$
i_0	-1_9-j_1	$-j_9+1_1$	$-k_9+i_1$	$-i_9-k_1$
j_0	$-j_9+k_1$	i_9-j_1	$-k_9+i_1$	1_9-1_1
k_0	i_9+1_1	-1_9+k_1	$-k_9+i_1$	j_9+j_1
	$\overline{\omega}1_9$	$\overline{\omega}i_9$	$\overline{\omega}j_9$	$\overline{\omega}k_9$
$\omega 1_0$	i_1+j_3	$-i_1-j_3$	i_1+j_3	$\theta i_1+\theta j_3$
ωi_0	j_1+1_3	k_1+k_3	-1_1+i_3	$-i_1+j_3$
ωj_0	-1_1-k_3	$-j_1-i_3$	$-k_1+1_3$	$-i_1+j_3$
ωk_0	$-k_1+i_3$	1_1-1_3	j_1-k_3	$-i_1+j_3$
	$\overline{\omega}1_3$	$\overline{\omega}i_3$	$\overline{\omega}j_3$	$\overline{\omega}k_3$
1_1	$-k_0-i_9$	$-i_0+j_9$	1_0-k_9	j_0-1_9
i_1	-1_0-k_9	-1_0-k_9	$-\theta 1_0+\theta k_9$	1_0+k_9
j_1	i_0-1_9	j_0+i_9	-1_0+k_9	$-k_0+j_9$
k_1	$-j_0+j_9$	$-k_0+1_9$	1_0-k_9	i_0+i_9
	1_9	i_9	j_9	k_9
$\overline{\omega}1_3$	$-i_0-j_1$	k_0-1_1	$-j_0+k_1$	1_0-i_1
$\overline{\omega}i_3$	$-k_0+k_1$	j_0+j_1	$-i_0+1_1$	1_0-i_1
$\overline{\omega}j_3$	-1_0-i_1	1_0+i_1	-1_0-i_1	$-\theta 1_0+\theta i_1$
$\overline{\omega}k_3$	j_0-1_1	$-i_0+k_1$	k_0+j_1	-1_0+i_1
	$\omega 1_1$	ωi_1	ωj_1	ωk_1
$\omega 1_9$	$-j_0-k_3$	1_0-j_3	i_0-1_3	$-k_0+i_3$
ωi_9	k_0-1_3	-1_0+j_3	$-j_0+i_3$	i_0+k_3
ωj_9	$-i_0+i_3$	1_0-j_3	k_0+k_3	$-j_0+1_3$
ωk_9	-1_0-j_3	$-\theta 1_0+\theta j_3$	1_0+j_3	-1_0-j_3

$(bc^{a^{-1}}b)^2$, порождающими $2S_4$ в группе $\mathrm{SL}_3(3)$. Для удобства явным образом приводим элемент $(bc^{a^{-1}}b)^2$:

$$q_0\mapsto q\omega_0,\quad q_1\mapsto q_1,\quad q_3\mapsto qk\omega_3,\quad q_9\mapsto -qj\overline{\omega}_9,$$
$$q_2\mapsto qj_X,\quad q_X\mapsto q\overline{\omega}_4,\quad q_4\mapsto -qi\omega_2,$$
$$q_5\mapsto q^*j_8,\quad q_8\mapsto q^*\omega_6,\quad q_6\mapsto qi\overline{\omega}_5,$$
$$q_7\mapsto q^*k_T,\quad q_T\mapsto q^*i_E,\quad q_E\mapsto -qk_7.$$

Если ε является скаляром порядка 3, можно взять корневой вектор

$$e_1=i_1+\overline{\omega}j_3+k_9-\varepsilon(\omega i_1+j_3+\omega k_9),$$

где индекс обозначает соответствующий корень в W_0. Тогда можем применить элементы из указанной выше группы $(3 \times 2{\cdot}A_4){:}2$ для того, чтобы получить оставшиеся (длинные) корневые векторы. Имеем

$$e_i = -\omega_T + j_2 - \overline{\omega}k_8 - \varepsilon(-\overline{\omega}_T + \omega j_2 - \omega k_8),$$

$$e_j = -\overline{\omega}_X - \overline{\omega}i_E + k_6 - \varepsilon(-1X - \omega i_E + \omega k_6),$$

$$e_k = -1_4 + i_5 - \overline{\omega}j_7 - \varepsilon(-\omega_4 + \omega i_5 - \omega j_7),$$

и соответствующие обратные корни получаются перестановкой коэффициентов 1 и $-\varepsilon$ из двух половинок вектора. Левое умножение на ω и $\overline{\omega}$ легко получить, применяя элемент $d^{a^{-1}}$.

6. Редукция по модулю p

Если p — простое число, отличное от 2 и 3, то все вычисления проходят без изменений, если заменить $\mathbb{R}$ на $\mathbb{F}_p$ или на любое поле $\mathbb{F}$ характеристики p. В частности, теорема 1 и предложение 1 остаются справедливыми при этих более общих предположениях. Везде поле $\mathbb{C}$ заменяется 2-мерным пространством над $\mathbb{F}$ с базисом $\{1, \omega\}$. (Необходимо быть внимательным, чтобы разделить вектор ω и элемент порядка 3 в $\mathbb{F}$, если таковой существует.)

В характеристике 3, однако, общая стратегия проваливается по многим причинам: G не содержит точного неприводимого представления в характеристике 3, 2-мерное пространство не допускает линейного отображения ω порядка 3, действующего без неподвижных точек, и определение элемента c требует деления на 3, и это лишь немногие примеры.

В характеристике 2 доказательство леммы 3 проваливается, но построение алгебры Ли проходит. При ограничении на алгебру F_4 можно получить, что группа $3^3{:}\mathrm{SL}_3(3)$ больше не является неприводимой в характеристике 2, но она имеет две конституэнты, каждая из которых степени 26. Это отражается в том факте, что алгебра Ли типа F_4 больше не является простой, а содержит идеал размерности 26. Этот идеал можно рассматривать, используя (2-сторонний) идеал $\langle 1+i \rangle$ в $\mathbb{Z}[i,\omega]$. Последний идеал аддитивно порождается длинными корнями корневой системы типа F_4, и по модулю $2\mathbb{Z}[i,\omega]$ содержит в точности три ненулевых смежных класса, содержащих соответственно $i+j$, $j+k$ и $k+i$. Записывая

$$a_t = i_t + j_t, \quad b_t = j_t + k_t, \quad c_t = k_t + i_t,$$

получаем следующую таблицу умножения для идеала:

	a_1	b_1	c_1
a_0	$c_3 + c_9$	$a_3 + a_9$	$b_3 + b_9$
b_0	$a_3 + b_9$	$b_3 + c_9$	$c_3 + a_9$
c_0	$b_3 + a_9$	$c_3 + b_9$	$a_3 + c_9$

Это, очевидно, такая же операция, как и умножение в исключительной йордановой алгебре в характеристике 2. (Это единственная характеристика, в которой исключительная йорданова алгебра является также алгеброй Ли.)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London; New York: John Wiley & Sons Ltd, 1972.
2. *Jacobson N.* Lie algebras. New York: Intersci., 1962.
3. *Kostrikin A., Tiep P.* Orthogonal decompositions and integral lattices. Berlin: de Gruyter, 1994.
4. *Wilson R. A.* On the compact real form of the Lie algebra $\mathfrak{g}_2$ // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2010. V. 148. P. 87–91.
5. *Буриченко В. П.* Транзитивные ортогональные разложения простых комплексных алгебр Ли типов F_4 и E_6 // Вестн. МГУ. Серия I. Математика и механика. 1988. № 4. С. 78–80.
6. *Burichenko V. P., Tiep P. H.* Invariant lattices of type F_4 and E_6: the automorphism groups // Comm. Algebra. 1993. V. 21. P. 4641–4677.
7. *Griess R. L.* A Moufang loop, the exceptional Jordan algebra, and a cubic form in 27 variables // J. Algebra. 1990. V. 131. P. 281–293.
8. *Буриченко В. П.* О специальных лупах, формах Диксона и решетках, связанных с $O_7(3)$ // Мат. сб. 1991. Т. 182. С. 1408–1429.

Статья поступила 11 сентября 2012 г.

Robert A. Wilson (Уилсон Роберт А.)
School of Mathematical Sciences, Queen Mary University of London,
Mile End Road, London E1 4NS, UK
R.A.Wilson@qmul.ac.uk