Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК 512.542

О ПРОНОРМАЛЬНОСТИ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП

Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин

Аннотация. Зафиксируем некоторое множество π простых чисел. Говорят, что конечная группа *обладает свойством* C_π или, по-другому, *является* C_π*-группой*, если она содержит ровно один класс сопряженных π-холловых подгрупп. Доказана пронормальность π-холловых подгрупп в C_π-группах или, эквивалентно, наследуемость свойства C_π надгруппами π-холловых подгрупп. Тем самым решена проблема 17.44(a) из «Коуровской тетради». Также построен пример, показывающий, что в произвольной конечной группе холловы подгруппы, вообще говоря, не являются пронормальными.

Ключевые слова: пронормальная подгруппа, π-холлова подгруппа, холловы свойства E_π, C_π, D_π.

Виктору Даниловичу Мазурову к 70-летию

Введение

Термин «группа» употребляется нами в значении «конечная группа». Обозначение mod CFSG применительно к любому утверждению обозначает, что справедливость этого утверждения установлена с использованием классификации конечных простых групп.

Всюду через π обозначается некоторое фиксированное множество простых чисел, а через π' — дополнение к нему в множестве всех простых чисел.

Подгруппа H группы G называется *π-холловой подгруппой*, если она является π-группой (т. е. все простые делители ее порядка лежат в π), а ее индекс не делится на числа из π. Понятие π-холловой подгруппы обобщает понятие силовской p-подгруппы и совпадает с ним, если $\pi = \{p\}$. Множество π-холловых подгрупп группы G будем обозначать символом $\mathrm{Hall}_\pi(G)$. Подгруппу, которая является π-холловой для некоторого множества π, будем называть просто *холловой*.

В соответствии с [1] будем говорить, что группа G *обладает свойством* (*принадлежит классу*) E_π, если в G имеется π-холлова подгруппа. Если $G \in E_\pi$ и любые ее две π-холловы подгруппы сопряжены, то будем будем говорить, что G *обладает свойством* C_π (и писать $G \in C_\pi$). Если $G \in C_\pi$ и любая π-подгруппа группы G содержится в некоторой π-холловой подгруппе, то будем говорить, что G *обладает свойством* D_π (и писать $G \in D_\pi$).

Свойства E_π, C_π и D_π обобщают на случай π-холловых подгрупп известные свойства силовских подгрупп, но в отличие от последних в произвольной группе свойства E_π, C_π и D_π могут не иметь места. Группы, в которых эти свойства имеют место, будем называть соответственно E_π-, C_π- и D_π-*группами*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11–01–00456, 12–01–33102).

В теории свойств E_π, C_π и D_π важную роль играют вопросы наследования этих свойств подгруппами, гомоморфными образами и расширениями. Эти вопросы изучались в [1–19] (подробности см. в [2, 3]). В частности, известно, что свойства E_π и (mod CFSG) D_π наследуются нормальными подгруппами, в то время как свойство C_π, вообще говоря, нет. Однако произвольными подгруппами не наследуются даже E_π и D_π. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Согласно [4, теорема 3] группа $G = \mathrm{SL}_2(16) \simeq A_1(16)$ обладает свойством D_π для множества $\pi = \{3, 5\}$ и в G естественным образом вложена подгруппа $M = \mathrm{SL}_2(4) \simeq \mathrm{Alt}_5$ порядка $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Эта подгруппа не обладает даже свойством E_π, поскольку не содержит элементов (а следовательно, и подгрупп) порядка 15.

Естественный вопрос: какими подгруппами, кроме нормальных, наследуются свойства E_π, C_π и D_π?

Очевидно, что в E_π-группе π-холлова подгруппа будет π-холловой и в любой содержащей ее подгруппе, т. е. *свойство E_π наследуется надгруппами π-холловых подгрупп.*

Сформулируем в виде гипотез аналогичные утверждения для свойств C_π и D_π.

Гипотеза 1 [20, проблема 17.44(а); 21, проблема 2; 5, гипотеза 3]. *Если $G \in C_\pi$ и $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, то $M \in C_\pi$ для любой подгруппы M такой, что $H \leq M \leq G$.*

Гипотеза 2 [20, проблема 17.44(б); 21, проблема 3]. *Если $G \in D_\pi$ и $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, то $M \in D_\pi$ для любой подгруппы M такой, что $H \leq M \leq G$.*

В [5] доказана следующая важная теорема, позволившая получить критерий свойства C_π для конечной группы в терминах ее произвольного нормального ряда.

Теорема 1 ([5, теорема 1] mod CFSG). *Если $G \in C_\pi$, $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ и $A \trianglelefteq G$, то $HA \in C_\pi$.*

Эта теорема дает частичное подтверждение гипотезы 1[1)].

Приведем эквивалентную формулировку гипотезы 1.

В соответствии с определением Холла подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g \rangle$. Классическими примерами пронормальных подгрупп являются:

- нормальные подгруппы;
- максимальные подгруппы;
- силовские подгруппы;
- холловы подгруппы разрешимых групп.

Легко видеть, что гипотеза 1 эквивалентна следующей.

Гипотеза 3. *В C_π-группах π-холловы подгруппы пронормальны.*

Можно рассмотреть также более сильное утверждение.

Гипотеза 4. *В любой группе холловы подгруппы пронормальны.*

В [22] доказана (mod CFSG) справедливость гипотезы 4 в некотором частном случае, а именно подтверждена

[1)] Более того, именно эта теорема дала авторам основание впервые высказать эту гипотезу.

Гипотеза 5 [20, проблема 17.45(а)]. *В любой простой группе холловы подгруппы пронормальны.*

Гипотезу 2 также можно переформулировать в духе гипотезы 3, если ввести понятие сильно пронормальной подгруппы.

Подгруппу H группы G назовем *сильно пронормальной*, если для любой подгруппы $K \leq H$ и любого элемента $g \in G$ подгруппа K^g сопряжена с некоторой подгруппой из H (но необязательно с K) с помощью элемента из $\langle H, K^g \rangle$. Ясно, что всякая сильно пронормальная подгруппа является просто пронормальной. При этом все классические примеры пронормальных подгрупп (нормальные, максимальные, силовские, а в разрешимых группах также и холловы) оказываются примерами сильно пронормальных подгрупп. Естественно возникает вопрос: будет ли произвольная пронормальная подгруппа сильно пронормальной? Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующий

Пример 2. Пусть m и n — натуральные числа и $n/2 < m < n-1$. В симметрической группе Sym_n поточечный стабилизатор $(n-m)$-элементного множества (подгруппа Sym_m) является пронормальной, но не сильно пронормальной подгруппой.

В терминах сильной пронормальности гипотеза 2 эквивалентна следующей.

Гипотеза 6. *В D_π-группах π-холловы подгруппы сильно пронормальны.*

Поскольку конечная группа обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда этим свойством обладает каждый ее композиционный фактор [6, теорема 7.7 (mod CFSG)], контрпример наименьшего возможного порядка к эквивалентным гипотезам 2 и 6 должен быть простой D_π-группой. Поэтому эти гипотезы выводятся из следующего предположения.

Гипотеза 7 [20, проблема 17.45(б)]. *В любой простой группе холловы подгруппы сильно пронормальны.*

Наконец, можно рассмотреть предположение, усиливающее все сформулированные выше гипотезы 1–7.

Гипотеза 8. *В любой группе холловы подгруппы сильно пронормальны.*

В данной работе, опираясь на теорему 1 (и, следовательно, используя классификацию конечных простых групп), докажем для сформулированных выше гипотез 1–8 импликацию $5 \Rightarrow 1$ и эквивалентность $4 \Leftrightarrow 8$. Таким образом, гипотезы 1–8 логически связаны друг с другом следующей схемой:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, Leftrightarrow] & 3 & & & 6 \arrow[r, Leftrightarrow] & 2 \\
& & 4 \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & 8 \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& 5 \arrow[uul, Rightarrow, "\text{mod (CFSG)}"] & & & 7 \arrow[uur, Rightarrow, "\text{mod (CFSG)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Полностью проясним ситуацию с гипотезами левого «крыла бабочки». Прежде всего, как уже отмечалось, гипотеза 5 верна (mod CFSG) [22, теорема 1] и, следовательно, верны (mod CFSG) гипотезы 1 и 3. Таким образом, в настоящей работе получена

Теорема 2 (mod CFSG). *Для любого множества π простых чисел справедливы следующие утверждения:*

(1) *в C_π-группах π-холловы подгруппы пронормальны;*

(2) *свойство C_π наследуется надгруппами π-холловых подгрупп.*

Теперь обратимся к гипотезе 4. Будем говорить, что в группе G выполнена π-*гипотеза* для фиксированного множества π простых чисел, если в этой группе все π-холловы подгруппы пронормальны. Наша гипотеза 4 утверждает, таким образом, справедливость π-гипотезы во всех конечных группах для всех множеств π. Во многих специальных случаях π-гипотеза верна:

- для всех простых групп [22, теорема 1],
- для всех групп, не принадлежащих классу E_π (тривиально),
- для всех групп из класса C_π (по теореме 2).

Тем самым требуется исследовать справедливость π-гипотезы для групп из разности $E_\pi \setminus C_\pi$. Отметим, что существуют множества π, для которых $E_\pi \setminus C_\pi = \varnothing$. Приведем очевидные примеры: множество всех простых чисел, пустое множество и одноэлементное множество. Этим свойством будет обладать также любое множество нечетных простых чисел (mod CFSG) [23, теорема A]. Для таких множеств π-гипотеза выполнена во всех группах. Однако если между классами E_π и C_π имеется непустой «зазор», то для некоторой группы π-гипотеза неверна.

Теорема 3. *Пусть множество π простых чисел таково, что $E_\pi \setminus C_\pi \neq \varnothing$. Тогда существуют группы $G \in E_\pi \setminus C_\pi$ и $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ такие, что H не прономальна в G.*

Как будет видно из доказательства теоремы 3, в качестве такой группы G можно взять регулярное сплетение произвольной группы $X \in E_\pi \setminus C_\pi$ и циклической группы $\mathbb{Z}_p$ порядка $p \in \pi'$ (при этом $\pi' \neq \varnothing$, так как в противном случае $E_\pi = C_\pi$).

Таким образом, получаем

Следствие 4. *Для любого множества π простых чисел следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *во всех конечных группах π-холловы подгруппы пронормальны;*

(2) $E_\pi = C_\pi$.

Было бы интересно найти все такие множества π, для которых $E_\pi = C_\pi$ (см. [2, проблема 7.20; 21, проблема 6]).

Теорема 3 опровергает не только гипотезу 4, но и более сильную гипотезу 8. Тем самым, в частности, доказана импликация $4 \Rightarrow 8$, поскольку ее посылка ложна.

Возможно, у симметрии «логической бабочки» имеется более глубокая причина: авторам неизвестно ни одного контрпримера к следующей гипотезе.

Гипотеза 9. *В любой группе пронормальные холловы подгруппы сильно пронормальны.*

Если эта гипотеза верна, то любое утверждение правого «крыла» будет справедливым тогда и только тогда, когда справедливо симметричное ему утверждение левого «крыла».

Частичные результаты по изучению гипотез 2 и 6 правого «крыла» получены в [24], где эти гипотезы подтверждены для групп, неабелевы композиционные факторы которых изоморфны знакопеременным, спорадическим группам и группам лиева типа в характеристике, принадлежащей π. Обсудим еще один возможный подход к этим гипотезам. Как уже отмечалось, контрпример G наименьшего порядка к любой из них должен быть простой D_π-группой. При этом очевидно, что G не является π-группой и порядок G делится по крайней мере на два различных простых числа из π (в противном случае π-холловы подгруппы группы G сильно пронормальны). Из классификации простых D_π-групп (mod CFSG) [4, теорема 3] следует, что либо $2 \notin \pi$, либо $3 \notin \pi$, и ввиду [23, теорема B; 6, лемма 5.1, теорема 5.2] π-холловы подгруппы в G обладают силовской башней. Напомним определение.

Пусть H — группа и $\pi(H) = \{p_1, \dots, p_n\}$. Согласно [1] будем говорить, что группа H *обладает силовской башней типа* $(p_1, \dots, p_n)$, если H обладает нормальным рядом

$$H = H_0 > H_1 > \dots > H_n = 1$$

таким, что каждая его секция H_{i-1}/H_i изоморфна силовской p_i-подгруппе группы H.

Известно [1, теорема A1], что холловы подгруппы, обладающие силовской башней одного типа, сопряжены. В частности, если холлова подгруппа обладает силовской башней, то она пронормальна.

Гипотезу 6, таким образом, удалось бы подтвердить для простых D_π-групп и, следовательно, для всех групп, если бы удалось доказать следующее утверждение.

Гипотеза 10 [20, проблема 17.45(в)]. *Холловы подгруппы, обладающие силовской башней, сильно пронормальны.*

1. Обозначения, соглашения и предварительные результаты

Тот факт, что подгруппа H группы G пронормальна, будем записывать так: $H \operatorname{prn} G$.

Лемма 5. *Пусть G — произвольная группа и A — ее нормальная подгруппа. Если $G \in E_\pi$ и $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, то $A, G/A \in E_\pi$, причем $H \cap A \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$, $HA/A \in \mathrm{Hall}_\pi(G/A)$.*

Доказательство. См. [1, лемма 1]. □

Конечная группа, обладающая (суб)нормальным рядом, все факторы которого являются π- или π'-группами, называется *π-разделимой.* Заметим, что подгруппа π-разделимой группы π-разделима.

Лемма 6. *Всякая π-разделимая группа обладает свойством D_π.*

Доказательство. См. [7; 1, следствие D5.2]. □

Из леммы 6 вытекает

Лемма 7. *В π-разделимой группе π-холловы подгруппы сильно пронормальны.*

Доказательство. Пусть группа G является π-разделимой, и пусть $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Пусть $K \leq H$ и $g \in G$. Рассмотрим подгруппу $M = \langle H, K^g \rangle$. Она π-разделима как подгруппа π-разделимой группы, и по лемме 6 имеем $M \in D_\pi$. Отсюда следует, что π-подгруппа K^g группы M сопряжена в $M = \langle H, K^g \rangle$ с некоторой подгруппой из $H \in \mathrm{Hall}_\pi(M)$. Значит, подгруппа H группы G сильно пронормальна. □

Наряду с теоремой 1 нам потребуется следующее утверждение из [5].

Лемма 8 (mod CFSG). *Если $G \in C_\pi$ и $A \trianglelefteq G$, то $G/A \in C_\pi$.*

Доказательство. См. [5, лемма 9]. $\square$

Для доказательства теоремы 2 используем также основной результат из [22], подтверждающий гипотезу 5 и сформулированный в следующей лемме.

Лемма 9 (mod CFSG). *Холловы подгруппы в простых группах пронормальны.*

Доказательство. См. [22, теорема 1]. $\square$

Лемма 10. *Пусть H — подгруппа группы G и $g \in G$, $y \in \langle H, H^g\rangle$. Тогда если подгруппы H^y и H^g сопряжены в $\langle H^y, H^g\rangle$, то подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g\rangle$.*

Доказательство. Пусть $z \in \langle H^y, H^g\rangle$ и $H^{yz} = H^g$. Тогда $z \in \langle H, H^g\rangle$, так как $\langle H^y, H^g\rangle \leq \langle H, H^g\rangle$. Поэтому $x = yz \in \langle H, H^g\rangle$ и $H^x = H^g$. $\square$

Лемма 11. *Пусть $\overline{} : G \to G_1$ — гомоморфизм групп, $H \leq G$. Тогда если $H \operatorname{prn} G$, то $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{G}$.*

Доказательство очевидно. $\square$

Лемма 12. *Пусть G — группа и $G_1, \dots, G_n$ — нормальные подгруппы группы G такие, что $[G_i, G_j] = 1$ при $i \neq j$ и $G = G_1 \dots G_n$. Пусть для любого $i = 1, \dots, n$ в группе G_i выбрана пронормальная подгруппа H_i и $H = \langle H_1, \dots, H_n\rangle$. Тогда $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $g \in G$. Тогда $g = g_1 \dots g_n$ для некоторых элементов $g_1 \in G_1, \dots, g_n \in G_n$. Так как по условию для любого $i = 1, \dots, n$ подгруппа H_i пронормальна в G_i, существуют элементы $x_i \in \big\langle H_i, H_i^{g_i}\big\rangle$ такие, что $H_i^{x_i} = H_i^{g_i}$. Ввиду условия $[H_i, H_j] = 1$ при $i \neq j$ для всех $i = 1, \dots, n$ имеем $H_i^g = H_i^{g_i}$. Из тех же соображений $H_i^{x_i} = H_i^x$, где $x = x_1 \dots x_n$. Очевидно, что

$$x \in \big\langle H_i, H_i^{g_i} \mid i = 1, \dots, n\big\rangle = \big\langle H_i, H_i^{g_i} \mid i = 1, \dots, n\big\rangle = \langle H, H^g\rangle.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} H^g = \big\langle H_i^g \mid i = 1, \dots, n\big\rangle &= \big\langle H_i^{g_i} \mid i = 1, \dots, n\big\rangle \\ &= \big\langle H_i^{x_i} \mid i = 1, \dots, n\big\rangle\big\langle H_i^x \mid i = 1, \dots, n\big\rangle = H^x. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 13. *Пусть G — группа, $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ для некоторого множества π простых чисел, $A \trianglelefteq G$ и $G = HA$. Тогда если $H \cap A \operatorname{prn} A$, то $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Пусть $H \cap A \operatorname{prn} A$. Возьмем произвольно $g \in G$ и покажем, что $H^x = H^g$ для некоторого элемента $x \in \langle H, H^g\rangle$. Так как $G = HA$, существуют $h \in H$ и $a \in A$ такие, что $g = ha$. Поскольку $H \cap A \operatorname{prn} A$, найдется элемент $y \in \langle H \cap A, H^a \cap A\rangle$ такой, что $H^y \cap A = H^a \cap A$. С учетом леммы 10 ввиду того, что

$$y \in \langle H \cap A, H^a \cap A\rangle \leq \langle H, H^a\rangle = \langle H, H^{ha}\rangle = \langle H, H^g\rangle,$$

можно считать, что $H = H^y$ и, в частности, $H \cap A = H^a \cap A = H^g \cap A$. Теперь H, H^g и g содержатся в $N_G(H \cap A)$. Так как $G = HA$, имеем $G = AN_G(H \cap A)$. Заметим, что группа

$$N_G(H \cap A)/N_G(H \cap A) \simeq AN_G(H \cap A)/A = G/A$$

является π-группой. Рассмотрим нормальный ряд

$$N_G(H \cap A) \trianglerighteq N_A(H \cap A) \trianglerighteq H \cap A \trianglerighteq 1$$

группы $N_G(H \cap A)$. Каждый его фактор является π- или π'-группой, поэтому группа $N_G(H \cap A)$ является π-разделимой. По лемме 7 имеем $H \operatorname{prn} N_G(H \cap A)$. Таким образом, подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. $\square$

2. Доказательство теоремы 2

Эквивалентные утверждения (1) и (2) теоремы будем доказывать одновременно. Допустим, что теорема 2 неверна и $G \in C_\pi$ — группа наименьшего порядка, обладающая непронормальной π-холловой подгруппой H. Тогда существует элемент $g \in G$ такой, что подгруппа $M = \langle H, H^g \rangle$ не обладает свойством C_π.

Согласно лемме 9 группа G непроста. Пусть A — минимальная нормальная подгруппа группы G. Ввиду леммы 8 и выбора группы G имеем $HA/A \operatorname{prn} G/A$ и, стало быть, $H^gA = H^yA$ для некоторого элемента $y \in M = \langle H, H^g \rangle$. Учитывая лемму 10, можно считать, что $H = H^y$ и $HA = H^gA$.

Теперь $HA \in C_\pi$ согласно теореме 1, и если $HA < G$, то из минимальности порядка группы G следует $H \operatorname{prn} HA$, а поскольку $H^g \leq HA$, получаем, что группы H и H^g сопряжены в M (отметим, что H и H^g сопряжены в HA ввиду того, что $HA \in C_\pi$). Следовательно, $G = HA$.

Группа A как минимальная нормальная подгруппа является прямым произведением некоторых изоморфных простых групп:

$$A = S_1 \times \cdots \times S_n.$$

Заметим, что группы S_i неабелевы (в противном случае A будет π- или π'-группой, группа $G = HA$ будет π-разделимой, а π-холловы подгруппы в такой группе пронормальны согласно лемме 7). Поскольку все подгруппы S_i субнормальны в G, в силу леммы 5 имеем $H \cap S_i \in \mathrm{Hall}_\pi(S_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Далее, $H \cap S_i \operatorname{prn} S_i$ для всех i по лемме 9, и

$$H \cap A = \langle H \cap S_1, \ldots, H \cap S_n \rangle \operatorname{prn} A$$

по лемме 12. Наконец, применяя лемму 13, заключаем, что $H \operatorname{prn} G$. Теорема доказана. $\square$

3. Доказательство теоремы 3

Так как $E_\pi \neq C_\pi$, множество π отлично от множества всех простых чисел и $\pi' \neq \varnothing$. Пусть $p \in \pi'$. Пусть также $X \in E_\pi \setminus C_\pi$. Тогда в группе X имеются две несопряженные π-холловы подгруппы U и V.

Рассмотрим прямое произведение

$$Y = \underbrace{X \times X \times \cdots \times X \times X}_{p \text{ раз}}$$

p изоморфных копий группы X. Отображение $\tau : Y \to Y$, заданное по правилу

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_p, x_1), \quad x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p \in X,$$

является автоморфизмом порядка p группы Y. Рассмотрим естественное расщепляемое расширение G группы Y с помощью группы $\langle \tau \rangle$, изоморфное регулярному сплетению $X \wr \mathbb{Z}_p$.

Поскольку Y — нормальная подгруппа группы G и индекс $|G : Y| = p$ не делится на числа из π, имеем $\mathrm{Hall}_\pi(G) = \mathrm{Hall}_\pi(Y)$. В группе Y естественным образом определим подгруппы

$$H = V \times \underbrace{U \times \cdots \times U \times U}_{p-1 \text{ раз}}, \quad K = \underbrace{U \times U \times \cdots \times U}_{p-1 \text{ раз}} \times V.$$

Ясно, что $H, K \in \mathrm{Hall}_\pi(Y) = \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Так как U и V не сопряжены в X, подгруппы H и K не сопряжены в Y и, следовательно, не сопряжены в $\langle H, K\rangle$. Вместе с тем из определения τ получаем равенство $H^\tau = K$, поэтому H и K не являются пронормальными подгруппами в G. Теорема доказана. $\square$

В связи с доказательством теоремы 3 отметим, что авторам неизвестно ни одного контрпримера к следующему утверждению.

Гипотеза 11. *Холловы подгруппы пронормальны в своем нормальном замыкании.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6, N 22. P. 286–304.
2. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.
3. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Generalizations of the Sylow theorem // Groups St. Andrews, 2009 in Bath. V. 2 (eds. C. M. Campbell, M. R. Quick, E. F. Robertson, C. M. Roney-Dougal, G. C. Smith, G. Traustason). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011. P. 488–519. (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.; V. 388).
4. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в конечных простых группах // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 364–394.
5. *Ревин Д. О., Вдовин Е. П.* Критерий сопряженности холловых подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 506–516.
6. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Hall subgroups of finite groups // Contemp. Math. 2006. V. 402. P. 229–265.
7. *Чунихин С. А.* О силовских свойствах конечных групп // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73, № 1. С. 29–32.
8. *Gross F.* On the existence of Hall subgroups // J. Algebra. 1986. V. 98, N 1. P. 1–13.
9. *Revin D. O., Vdovin E. P.* On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups // J. Algebra. 2010. V. 324, N 12. P. 3614–3652.
10. *Revin D. O., Vdovin E. P.* An existence criterion for Hall subgroups of finite groups // J. Group Theory. 2011. V. 14, N 1. P. 93–101.
11. *Wielandt H.* Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen // Proc. Intern. Congress Math., Edinburgh, 1958. London: Cambridge Univ. Press, 1960. P. 268–278.
12. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Холловы подгруппы нечетного порядка конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 1. С. 15–56.
13. *Мазуров В. Д., Ревин Д. О.* О холловом D_π-свойстве для конечных групп // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 125–134.
14. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в одном классе конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 335–370.
15. *Чунихин С. А.* О силовских правильных группах // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 5. С. 773–774.
16. *Чунихин С. А.* О существовании и сопряженности подгрупп конечной группы // Мат. сб. 1953. Т. 33, № 1. С. 111–132.
17. *Шеметков Л. А.* Обобщения теоремы Силова // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1425–1431.
18. *Шеметков Л. А.* О силовских свойствах конечных групп // Докл. АН БССР. 1972. Т. 16, № 10. С. 881–883.
19. *Шеметков Л. А.* Новая D-теорема в теории конечных групп // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 2. С. 290–293.

20. *The Kourovka notebook.* Unsolved problems in group theory. Ed. V. D. Mazurov and E. I. Khukhro. 17th. ed. Russian Acad. Sci. Siberian Division. Novosibirsk: Sobolev Inst. Math., 2010.

21. *Ревин Д. О.* Вокруг гипотезы Ф. Холла // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. Т. 6. С. 366–380.

22. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 527–542.

23. *Вдовин Е. П., Манзаева Н. Ч., Ревин Д. О.* О наследуемости свойства D_π подгруппами // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 44–52.

24. *Gross F.* Conjugacy of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. 1987. V. 19, N 4. P. 311–319.

Статья поступила 5 августа 2011 г.

Вдовин Евгений Петрович, Ревин Данила Олегович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vdovin@math.nsc.ru, revin@math.nsc.ru