Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 517.518+517.518.23

КЛАССЫ СОБОЛЕВА НА ПРОИЗВОЛЬНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С МЕРОЙ. КОМПАКТНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ ВЛОЖЕНИЯ

Н. Н. Романовский

Аннотация. Сформулировано новое определение классов Соболева функций, заданных в области метрического пространства, в котором не обязано выполняться условие удвоения. Доказана эквивалентность сформулированного определения классическому определению в случае, когда область определения лежит в евклидовом пространстве со стандартной лебеговой мерой. Исследованы ограниченность и компактность операторов вложения рассматриваемых классов Соболева в пространства L_q и C^α. Сформулирован и доказан критерий компактности семейства функций из $L_p(U)$, где множество U лежит в метрическом пространстве, которое не обязано удовлетворять условию удвоения.

Ключевые слова: класс Соболева, класс Никольского, функция на метрическом пространстве, теоремы вложения, компактность оператора вложения.

В последнее время интенсивно развивается теория классов Соболева функций, заданных в области метрического пространства с мерой (см., например, [1–10]). Отчасти эти исследования мотивированы приложениями к теории уравнений в частных производных (см. [11–15]), а также к некоторым задачам математической физики (см. [16, 17]). Изначально в связи с приложениями к изучению свойств решений некоторых вырождающихся уравнений в частных производных были введены пространства Соболева функций, заданных в области метрического пространства Карно — Каратеодори, а также доказаны аналоги классических теорем вложения для этих функциональных пространств. Для этого были адаптированы некоторые методы классической теории пространств Соболева [18]. Оказалось, что полученные таким образом методы доказательства теорем вложения могут быть практически дословно перенесены на случай функций, заданных на общем метрическом пространстве с мерой, удовлетворяющем условию удвоения, если пространство Соболева определить в терминах обобщенного неравенства Пуанкаре или в терминах поточечных оценок (см., например, [2, 3, 5–7]). Однако если метрическое пространство с мерой не удовлетворяет условию удвоения, то такой подход приводит к существенным трудностям. Условие удвоения для метрического пространства с мерой (X, d, μ) означает выполнение неравенства $\mu(B(x, 2r) \leq C\mu(B(x, r))$, где $B(x, r)$ — шар в метрике d с центром в точке $x \in X$ радиуса r, постоянная C не зависит от x и r.

Работа выполнена при поддержке гранта Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН–ДВО РАН № 56.

В настоящей работе рассматриваются функциональные классы, обобщающие пространства Соболева на случай, когда функции заданы в области произвольного метрического пространства, которое не обязано удовлетворять условию удвоения, более того, может иметь бесконечную размерность по Хаусдорфу. Определяя эти функциональные классы, мы характеризуем функции тем, с какой точностью их можно приблизить по норме пространства L_p кусочно постоянными функциями, подчиненными произвольному разбиению области определения на непересекающиеся измеримые множества диаметра, не превышающего $\epsilon > 0$, в зависимости от ϵ. Этот подход сходен с подходом из работы [19], в которой рассматриваются функции, заданные в области $\mathbb{R}^n$, и область определения разбивается не на произвольные непересекающиеся измеримые множества, а на кубы (см. также [20, 21]). Идеи из [19] перекликаются также с идеями некоторых работ, посвященных теории пространств обобщенно дробно-дифференцируемых функций, в частности пространств Никольского, Бесова (см. [22, 23]). Наряду с аналогами классических пространств Соболева W_p^1 будут рассмотрены аналоги пространств обобщенно дробно-дифференцируемых функций.

Основным результатом работы является оригинальный метод доказательства компактности вложений рассматриваемых классов Соболева в функциональные пространства L_p и C^α. Предварительно доказываем эквивалентность сформулированного здесь определения классов Соболева классическому определению в случае, когда (X, d, μ) — евклидово пространство с мерой Лебега.

Как вспомогательный результат доказываем новый критерий компактности семейства функций из $L_p(U, \mu)$, где U — открытое множество в метрическом пространстве (X, d). Известны несколько критериев компактности множеств в L_p, в том числе классические критерии М. Рисса, А. Н. Колмогорова, Цуджи для множеств функций, заданных в области евклидова пространства, а также их обобщения [8, 24–28] на случай функций, заданных в областях метрических пространств с мерой, удовлетворяющей условию удвоения. Предлагаемый в настоящей работе подход позволяет отказаться от упомянутого условия удвоения, которое представляет собой существенное ограничение. Кроме того, он позволяет рассмотреть случай $p = p(x)$.

Будем предполагать, что (X, d) — сепарабельное метрическое пространство с борелевской мерой μ, удовлетворяющей следующим свойствам: $\mu(B(x, r)) > 0$ для всех $x \in X$ и любого $r > 0$, для любой точки $x \in X$ функция $r \mapsto \mu(B(x, r))$ непрерывна. Пусть $0 < p < \infty$, U — открытое множество, содержащееся в X, $\mu(U) < \infty$.

Произвольной функции f класса $L_p(U)$ сопоставим функцию

$$\theta_p(f, \delta) = \sup_{\sigma \in \Sigma_\delta} \inf_{g \in G_\sigma} \rho_{L_p(U)}(f, g),$$

где Σ_δ — множество всех разбиений области U на непересекающиеся измеримые подмножества, диаметр которых не превышает δ, G_σ — множество всех кусочно постоянных функций g таких, что $g(x) = g(y)$, если точки x и y принадлежат одному множеству из разбиения σ. Через $\rho_{L_p(U)}(f, g)$ обозначаем метрику в $L_p(U)$. В случае $p \geq 1$, как известно, $L_p(U)$ является нормированным пространством и

$$\rho_{L_p(U)}(f, g) = \|f - g\|_{L_p(U)} = \left(\int\limits_U |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

для $0 < p < 1$ расстояние $\rho_{L_p(U)}(f,g)$ равно $\int\limits_U |f(x)-g(x)|^p\,dx$.

Наряду с функцией $\theta_p(f,\delta)$ рассмотрим функцию $\omega_p(f,\epsilon) = \sup\{\delta > 0 \mid \theta_p(f,\delta) \le \epsilon\}$. Характеристика $\omega_p(f,\epsilon)$ функции f сходна с модулем непрерывности. Действительно, нетрудно видеть, что если заменить в определении $\omega_p(f,\epsilon)$ величину $\rho_{L_p(U)}(f,g)$ равномерной нормой разности $f-g$, то полученная функция будет равна модулю непрерывности f.

Очевидно, что $\theta_p(f,\delta)$ и $\omega_p(f,\epsilon)$ суть неубывающие функции. Далее покажем, что $\omega_p(f,\epsilon) > 0$ для любого $\epsilon > 0$, т. е. для всякого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\theta_p(f,\delta) \le \epsilon$. Характеристика $\omega_p(f,\epsilon)$ оказывается удобной для того, чтобы сформулировать критерий компактности множества в $L_p(U)$, похожий на теорему Арцела — Асколи.

Характеристика $\theta_p(f,\delta)$ позволяет определить пространства Соболева, а также функциональные пространства, аналогичные пространствам Никольского (см. [22, 23]), состоящие из функций, заданных в области произвольного метрического пространства с мерой.

Определение 1. Будем говорить, что *функция* $f \in L_p(U)$, $0 < p < \infty$, *принадлежит функциональному классу* $S_p^1(U)$, если для любого $\delta > 0$ выполняется неравенство $\theta_p(f,\delta) \le C\delta$, где C не зависит от δ. Наименьшую возможную константу C в последнем неравенстве будем обозначать через $[f]_{S_p^1(U)}$. Иначе говоря,

$$[f]_{S_p^1(U)} = \sup_{\delta>0} \frac{\theta_p(f,\delta)}{\delta}.$$

Метрика в $S_p^1(U)$ определяется равенством

$$\rho_{S_p^1(U)}(f,g) = \rho_{L_p(U)}(f,g) + [f-g]_{S_p^1(U)}.$$

В случае $p \ge 1$ класс Соболева $S_p^1(U)$ является нормированным пространством с нормой

$$\|f\|_{S_p^1(U)} = \|f\|_{L_p(U)} + [f]_{S_p^1(U)} = \|f\|_{L_p(U)} + \sup_{\delta>0} \frac{\theta_p(f,\delta)}{\delta}.$$

Аналогично будем писать, что функция $f \in L_p(U)$ принадлежит функциональному классу $S_p^r(U)$ $(0 < r < 1)$, если для любого $\delta > 0$ выполняется неравенство $\theta_p(f,\delta) \le C\delta^r$, где C не зависит от δ. Обозначим

$$[f]_{S_p^r(U)} = \sup_{\delta>0} \frac{\theta_p(f,\delta)}{\delta^r}.$$

Как и ранее, метрика в $S_p^r(U)$ определяется равенством

$$\rho_{S_p^r(U)}(f,g) = \rho_{L_p(U)}(f,g) + [f-g]_{S_p^r(U)}.$$

В случае $p \ge 1$ функциональный класс $S_p^r(U)$ является нормированным пространством с нормой

$$\|f\|_{S_p^r(U)} = \|f\|_{L_p(U)} + [f]_{S_p^r(U)}.$$

Замечание 1. Ввиду того, что

$$[f]_{S_p^r(U)} = \sup_{\delta>0} \frac{\theta_p(f,\delta)}{\delta^r} = \sup_{t>0} \frac{\theta_p(f,t^{\frac{1}{r}})}{t},$$

последнее определение можно обобщить, рассмотрев случай переменной гладкости $r = r(x)$, где r непрерывно зависит от x, $0 < r(x) \leq 1$. Для этого необходимо изменить определение $\theta_p(f, \delta)$, предположив, что $\delta = \delta(x)$. Соответственно $\Sigma_{\delta(x)}$ будет обозначать множество всех разбиений области U на счетный набор непересекающихся измеримых подмножеств E_i, при этом для всех i должно выполнятся соотношение $\operatorname{diam}(E_i) \leq \delta(x)$ для некоторого $x \in E_i$.

В дальнейшем изучим вопрос о вложениях определенных выше классов в функциональные пространства L_q и C^α, точнее говоря, вопросы об ограниченности и компактности соответствующих операторов вложения.

Сначала сформулируем и докажем критерий компактности подмножества $L_p(U)$ функций, заданных в области U метрического пространства (X, d) с мерой μ.

Докажем предварительно простое вспомогательное утверждение. Будем называть функцию g, заданную на открытом множестве $U \subset X$, *ступенчатой*, если найдется конечный набор непересекающихся множеств $E_i \subset U$, каждое из которых представляет собой пересечение конечного числа шаров таких, что для всех i функция g постоянна на E_i и функция g равна нулю на $U \setminus \bigcup E_i$.

Предложение 1. *Пусть (X, d) — сепарабельное метрическое пространство с борелевской мерой μ и открытое множество U содержится в X, $\mu(U) < \infty$, $0 < p < \infty$. Тогда множество ступенчатых функций плотно в $L_p(U)$.*

Известно, что любая функция класса $L_p(U)$ может быть сколь угодно хорошо приближена простой функцией по норме L_p. Далее, любая простая функция представляет собой линейную комбинацию характеристических функций измеримых множеств. Следовательно, остается показать, что характеристическая функция любого измеримого множества $A \subset U$ может быть приближена ступенчатыми функциями. Найдется открытое множество $V \supset A$ такое, что $\mu(V \setminus A) < \frac{\epsilon}{2}$. Можно считать, что $V \subset U$. В силу сепарабельности метрического пространства X множество V можно представить как счетное объединение шаров B_i. Обозначим $V_k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$. Тогда в силу $\mu(V) \leq \mu(U) < \infty$ найдется k такое, что $\mu(V \setminus V_k) < \frac{\epsilon}{2}$. Отсюда $\rho_{L_p(U)}(\chi(A), \chi(V_k)) < \epsilon^{\min(1, \frac{1}{p})}$. Остается заметить, что $\chi(V_k)$ является ступенчатой функцией. Предложение доказано.

Теорема 1. *Пусть (X, d) — сепарабельное метрическое пространство с борелевской мерой μ, удовлетворяющей следующим свойствам: $\mu(B(x, r)) > 0$ для всех $x \in X$ и любого $r > 0$, для любой точки $x \in X$ функция $r \mapsto \mu(B(x, r))$ непрерывна. Пусть открытое множество $U \subset X$ вполне ограничено. Предположим, что $0 < p < \infty$. Множество функций $A \subset L_p(U)$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно, во-первых, ограничено и, во-вторых, существует функция $\omega_p(\epsilon) > 0$ такая, что для всех $f \in A$ выполняется неравенство $\omega_p(\epsilon) \leq \omega_p(f, \epsilon)$.*

Последнее условие полностью аналогично условию существования общего модуля непрерывности из теоремы Арцела — Асколи.

Покажем сначала, что для любой функции $f \in L_p(U)$ и для любого $\epsilon > 0$ выполняется неравенство $\omega_p(f, \epsilon) > 0$. Очевидно, что последнее неравенство выполняется, если для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\theta_p(f, \delta) \leq \epsilon$. Легко видеть, что для любых $f, g \in L_p(U)$ выполняется неравенство

$$\theta_p(f, \delta) \leq \theta_p(g, \delta) + \rho_{L_p(U)}(f, g). \tag{1}$$

Ввиду неравенства (1) и предложения 1 достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции $\psi(x)$ и для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\theta_p(\psi, \delta) \le \epsilon$. Принимая во внимание, что всякая ступенчатая функция есть линейная комбинация характеристических функций множеств, представляющих собой конечное пересечение шаров, можем ограничиться случаем, когда $\psi = \chi_A$, $A = B(x_1, r_1) \cap \dots \cap B(x_m, r_m)$. В силу свойств меры μ можно выбрать $\delta > 0$ так, что

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(B(x_i, r_i + \delta) \setminus B(x_i, r_i - \delta)) \le \epsilon.$$

Рассмотрим произвольное разбиение области U на непересекающиеся измеримые множества E_j, $j = 1, \dots, N$, диаметра, не превосходящего δ. Множество индексов $j = 1, \dots, N$ разобьем на три подмножества: в подмножество M_1 войдут те индексы j, для которых $E_j \subset A$, в M_2 — те j, для которых $E_j \subset U \setminus A$, а в M_3 — все остальные индексы. Определим кусочно постоянную функцию g, подчиненную покрытию E_j, следующим образом: если $x \in A_j$ и $j \in M_1$, то положим $g(x) = 1$, для всех остальных x положим $g(x) = 0$. Иначе говоря, $g(x) = \chi_{\bigcup\limits_{j \in M_1} E_j}$. Очевидно, что $g(x)$ может отличаться от $\psi(x)$, только если $x \in \bigcup\limits_{j \in M_3} E_j$.

Также ясно, что для любого $j \in M_3$ множество E_j содержится в объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{m} B(x_i, r_i + \delta) \setminus B(x_i, r_i - \delta)$. Отсюда следует, что

$$\rho_{L_p(U)}^{\max(1,p)}(\psi, g) \le \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} \mu(B(x_i, r_i + \delta) \setminus B(x_i, r_i - \delta))\right) \le \sum_{i=1}^{m} \mu(B(x_i, r_i + \delta) \setminus B(x_i, r_i - \delta)) \le \epsilon.$$

Перейдем к доказательству того, что перечисленные в теореме условия вполне ограниченности множества функций A необходимы. Ограниченность множества A тривиально следует из его вполне ограниченности. Существование функции $\omega_p(\epsilon)$ эквивалентно тому, что для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\theta_p(f, \delta) \le \epsilon$ для всех $f \in A$. Фиксируем $\epsilon > 0$. Выберем конечную $\frac{\epsilon}{2}$-сеть в A. Обозначим входящие в нее функции через $h_1, \dots, h_N$. В силу неравенства (1) для произвольной функции $f \in A$ и произвольного $\delta > 0$ имеем

$$\theta_p(f, \delta) < \frac{\epsilon}{2} + \max_{i=1}^{N} \theta_p(h_i, \delta).$$

Далее, выберем $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, N$, так, что $\theta_p(h_i, \delta_i) \le \frac{\epsilon}{2}$. Положим $\delta = \min \delta_i$. Очевидно, $\delta > 0$ удовлетворяет требуемым условиям.

Покажем, что перечисленные в теореме условия достаточны для вполне ограниченности множества функций A. Фиксируем $\epsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ такое, что $\theta_p(f, \delta) \le \frac{\epsilon}{2}$ для всех $f \in A$. Выберем какое-нибудь конечное разбиение σ области U на измеримые множества E_i, $i = 1, \dots, N$, диаметра, не превосходящего δ. Такое разбиение существует в силу вполне ограниченности открытого множества $U \subset X$. Естественно предположить, что $\mu_i = \mu(E_i) > 0$ для всех i. Множество кусочно постоянных функций, подчиненных этому разбиению, обозначим через G_σ. Оно представляет собой конечномерное линейное пространство.

По условию для любой функции $f \in A$ имеем $\rho_{L_p(U)}(f,0) \le C$. Рассмотрим множество $M = \{g \in G_\sigma \mid \rho_{L_p(U)}(g,0) \le C + \epsilon\}$. Очевидно, что оно ограничено в смысле равномерной нормы. Соответственно на множестве M, используя стандартные рассуждения, нетрудно построить конечную $\frac{\epsilon}{2}$-сеть как в смысле равномерной нормы, так и в смысле L_p-метрики.

Ясно, что этот конечный набор функций будет ϵ-сетью в A. Таким образом, достаточность доказана.

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 может быть обобщено на случай, когда p зависит от x, в предположении, что $p(x)$ непрерывна и $0 < p_{\min} \le p(x) \le p_{\max} < \infty$, т. е. $p(x)$ равномерно ограничена,

$$\rho_{L_{p(x)}(U)}(f,g) = \left(\int\limits_\Omega |f(x) - g(x)|^{p(x)}\,dx\right)^{\min(1, \frac{1}{p_{\max}})}.$$

Соответствующее доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы 1. Действительно, нетрудно видеть, что доказательства предложения 1 и теоремы 1 используют только следующие свойства метрики $\rho_{L_p(U)}(f,g)$: неравенство треугольника, плотность множества простых функций, оценку расстояния между характеристическими функциями двух множеств оценку расстояния между линейными комбинациями функций. Поскольку выполнено неравенство $0 < p_{\min} \le p(x) \le p_{\max} < \infty$, аналогичные свойства имеет метрика $\rho_{L_{p(x)}(U)}(f,g)$.

Замечание 3. Необходимость приведенных в теореме условий имеет место и в случае, когда область определения U рассматриваемых функций не вполне ограниченная. Достаточность также верна для ослабленных условий. Именно, приведенное в теореме второе условие может быть заменено условием: для любого $\epsilon > 0$ найдется разбиение σ области определения U на конечный набор непересекающихся измеримых множеств такое, что $\sup\limits_{f\in A} \inf\limits_{g\in G_\sigma} \rho_{L_p(U)}(f,g) < \epsilon$.

Далее изучаем вопрос об эквивалентности определения 1 классическому определению пространств Соболева в случае, когда $1 < p < \infty$, открытое множество U содержится в евклидовом пространстве и μ является мерой Лебега.

Теорема 2. *Пусть U — ограниченное открытое множество, содержащееся в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $1 < p < \infty$. Тогда имеет место вложение $S_p^1(U) \hookrightarrow W_p^1(U)$. Обратно, для $1 \le p < \infty$ при дополнительном предположении, что существует ограниченный оператор продолжения из $W_p^1(U)$ в $W_p^1(\mathbb{R}^n)$, имеет место вложение $W_p^1(U) \hookrightarrow S_p^1(U)$.*

В доказательстве будем использовать следующий результат, полученный в [19–21] (см. также [29]).

Пусть $f \in L_p(U)$, $1 < p < \infty$. Фиксируем $h \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $\Delta_{h,i} f(x) = \frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}$. Предполагаем, что функция $\Delta_{h,i} f(x)$ определена в области $U_{h,i}$, которая содержит все точки $x \in U$ такие, что $x + the_i \in U$ для всех $t \in (0,1]$. Тогда согласно результату Ю. А. Брудного [19] f принадлежит $W_p^1(U)$ тогда и только тогда, когда для всех $i = 1,\dots,n$

$$\liminf_{h\to 0} \|\Delta_{h,i} f(x)\|_{L_p(U_{h,i})} < \infty,$$

где $\Delta_{h,i} f(x) = \frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}$. При этом

$$\|f\|_{W_p^1(U)} = \|f\|_{L_p(U)} + \liminf_{h\to 0} \|\Delta_{h,i} f(x)\|_{L_p(U_{h,i})}.$$

Легко видеть, что вместо $U_{h,i}$ в предпоследнем равенстве можно взять $U_{5h} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{5h,i}$. Фиксируем i. Покроем область U_{5h} замкнутыми кубами K_j, $j = 1, \ldots, m$, с ребрами длины $2h$, параллельными координатным осям, пересекающимися только в том случае, если они имеют общую грань. Можно предположить, что кубы K_j', получаемые из кубов K_j сдвигом на h вдоль вектора $-e_i$, также покрывают область U_{5h}. Кроме того, будем предполагать, что K_j и K_j', $j = 1, \ldots, m$, содержатся в области U.

Отметим, что замкнутые кубы K_j, $j = 1, \ldots, m$, попарно пересекаются только по множествам меры 0. Поскольку функция f принадлежит пространству $S_p^1(U)$, найдутся константы $A_1, \ldots, A_m$ такие, что $\sum\limits_{j=1}^{m} \|f - A_j\|_{L_p(K_j)}^p < Ch^p$.

Аналогично найдутся константы $B_1, \ldots, B_m$ такие, что $\sum\limits_{j=1}^{m} \|f - B_j\|_{L_p(K_j')}^p < Ch^p$. Отметим, что объем пересечения кубов K_j и K_j' равен половине объема этих кубов. Отсюда получаем оценку $\sum\limits_{j=1}^{m} \|B_j - A_j\|_{L_p(K_j)}^p < C_1 h^p$.

С другой стороны, рассмотрим функцию $f_h(x) := f(x + he_i)$. Очевидно, имеем

$$\sum_{j=1}^{m} \|f - A_j\|_{L_p(K_j)}^p = \sum_{j=1}^{m} \|f_h - A_j\|_{L_p(K_j')}^p.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\|f - f_h\|_{U_{5h}}^p \le \sum_{j=1}^{m} \|f - f_h\|_{L_p(K_j')}^p &\lesssim \sum_{j=1}^{m} \|f - A_j\|_{L_p(K_j')}^p + \sum_{j=1}^{m} \|f_h - A_j\|_{L_p(K_j')}^p \\
= \sum_{j=1}^{m} \|f - A_j\|_{L_p(K_j')}^p &+ \sum_{j=1}^{m} \|f - A_j\|_{L_p(K_j)}^p \lesssim \sum_{j=1}^{m} \|f - B_j\|_{L_p(K_j')}^p \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \|B_j - A_j\|_{L_p(K_j')}^p + Ch^p \lesssim C.
\end{aligned}$$

Таким образом, в силу результата Ю. А. Брудного функция f должна принадлежать пространству Соболева $W_p^1(U)$.

Обратно, предположим, что f принадлежит пространству Соболева $W_p^1(U)$. По условию открытое множество U ограничено и допускает ограниченный оператор продолжения из $W_p^1(U)$ в $W_p^1(\mathbb{R}^n)$. Для простоты записи в дальнейшем продолженную функцию будем также обозначать через f. Имеем $\|f\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{W_p^1(U)}$. В силу ограниченности U найдется куб K, содержащий U. Разобьем этот куб на малые кубы K_j, $j = 1, \ldots, m$, с ребром h. Для каждого малого куба K_j рассмотрим концентрический куб $\widetilde{K}_j$ с ребром $3h$. Для каждого куба $\widetilde{K}_j$, $j = 1, \ldots, m$, воспользуемся обобщенным неравенством Пуанкаре. Имеем

$$\left\| f - \frac{1}{(3h)^n} \int\limits_{\widetilde{K}_j} f(x)\,dx \right\|_{L_p(\widetilde{K}_j)} \le Ch\|\nabla f\|_{L_p(\widetilde{K}_j)}.$$

Рассмотрим произвольное разбиение открытого множества U на непересекающиеся измеримые множества E_k, $k = 1, \ldots, N$, диаметр которых не превосходит h. Обозначим через I_j множество индексов $k \in \{1, \ldots, N\}$ таких, что пересечение E_k и K_j непусто. Очевидно, что для любого $k \in I_j$ множество E_k содержится в $\widetilde{K}_j$. Любой индекс $k \in \{1, \dots, N\}$ принадлежит по крайней мере одному набору I_j.

Определим кусочно постоянную функцию g, подчиненную разбиению E_k, $k = 1, \dots, N$, полагая, что для всех $x \in E_k$ выполняется $g(x) = \frac{1}{(3h)^n} \int\limits_{\widetilde{K}_j} f(y)\,dy$, где в качестве j выберем одно из чисел таких, что $k \in I_j$. Ясно, что, вообще говоря, функцию g можно определить несколькими способами, однако для дальнейших рассуждений это не имеет значения. Имеем

$$\|f - g\|_{L_p(U)} \le \sum_{j=1}^{m} \Big\| f - \frac{1}{(3h)^n} \int\limits_{\widetilde{K}_j} f(x)\,dx \Big\|_{L_p(\widetilde{K}_j)} \le Ch \sum_{j=1}^{m} \|\nabla f\|_{L_p(\widetilde{K}_j)}$$
$$= 3^n Ch \|\nabla f\|_{L_p\left(\bigcup\limits_{j=1}^{m} \widetilde{K}_j\right)} \le 3^n Ch \|\nabla f\|_{L_p(U)}.$$

В силу произвольности h из последнего неравенства получаем, что $f \in S_p^1(U)$, причем $\|f\|_{S_p^1(U)} \le \widetilde{C} \|f\|_{W_p^1(U)}$, где постоянная $\widetilde{C}$ не зависит от f.

Далее будем изучать вопрос о вложениях функциональных пространств $S_p^r(U)$, $0 < r \le 1$, в пространства $L_q(U)$ и $C^\alpha(U)$, где U — открытое подмножество метрического пространства X.

Для этого предварительно определим необходимые в дальнейших рассуждениях семейства открытых множеств.

Определение 2. Зафиксируем непрерывную неубывающую функцию $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ такую, что $\psi(0) = 0$. Открытое множество $U \subset X$ *принадлежит семейству* A_ψ, если найдется последовательность разбиений $\Xi_k = \left\{E_1^k, \dots, E_{n_k}^k\right\}$, $k = 1, 2, \dots$, множества U на непересекающиеся измеримые множества такие, что каждое разбиение Ξ_{k+1} является измельчением разбиения Ξ_k, причем для любого i диаметр множества E_i^k не превосходит $C_1 2^{-k}$, а мера множества E_i^k больше либо равна $C_2 \psi(2^{-k})$. Разбиение Ξ_{k+1} является измельчением разбиения Ξ_k, если каждое из множеств E_i^{k+1} разбиения Ξ_{k+1} содержится в некотором множестве E_j^k разбиения Ξ_k.

Очевидно, что если $\psi_1 \le C\psi_2$, то $A_{\psi_1} \supset A_{\psi_2}$, т. е. любая область из A_{ψ_2} принадлежит A_{ψ_1}.

Ясно, что любая ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, звездная относительно шара, принадлежит классу A_{t^n}. Также этому классу принадлежат ограниченные области с липшицевой границей, области, удовлетворяющие условию Джона, и области, удовлетворяющие условию гибкого конуса. По поводу определений перечисленных областей см. [18, 23]. Под областью понимаем связное открытое множество.

Действительно, поскольку область Ω ограничена, найдется куб K в $\mathbb{R}^n$, содержащий Ω. Поделим этот куб на 2^n равных кубов, затем каждый из этих кубов на 2^n равных кубов, и т. д. Получим последовательность разбиений куба K на равные кубы, каждое последующее из которых является измельчением предыдущего, при этом два куба из одного разбиения могут пересекаться только по собственной грани, т. е. по множеству меры нуль. Рассмотрим любое из этих разбиений такое, что по крайней мере один из кубов разбиения содержится в области Ω.

Нетрудно видеть, что для всех перечисленных выше классов областей выполняется следующее свойство. Пусть область Ω удовлетворяет одному из перечисленных выше условий. Тогда найдется константа C, зависящая только от Ω, такая, что если рассмотреть кубы упомянутого разбиения, содержащиеся в Ω и растянуть их в C раз, то объединение полученных кубов будет содержать всю область Ω.

Построим требуемую последовательность разбиений области Ω. Рассмотрим куб K_i^j из j-го разбиения куба K, полностью содержащийся в области Ω. Если куб CK также содержится в Ω, то полагаем, что K_i^j содержится в j-м разбиении области Ω. В противном случае рассмотрим куб CK (не ограничивая общности, предположим, что число C целое нечетное), выбросим из него все кубы K_m^j такие, что $CK_m^j \subset \Omega$, и пересечем полученное множество с областью Ω. Таким образом, любое множество в разбиении Ξ_j содержит некоторый куб K_i^j и содержится в кубе CK_i^j, откуда очевидно вытекают требуемые неравенства. Кроме того, из приведенных построений легко видеть, что разбиение Ξ_{j+1} будет измельчением разбиения Ξ_j.

Нетрудно видеть, что объединение конечного набора непересекающихся множеств класса $A_{\psi(t)}$ также будет принадлежать классу $A_{\psi(t)}$. Для бесконечного набора множеств это, вообще говоря, неверно. Однако несложно построить открытое множество в $\mathbb{R}^n$, состоящее из бесконечного числа компонент связности, принадлежащее A_{t^n}.

Перейдем к доказательству теорем вложения. Сначала сформулируем и докажем аналог классических теорем вложения, т. е. разберем случай, когда множество, на котором определены функции из рассматриваемого пространства, принадлежит классу A_{t^η}, где $\eta \in [1, \infty)$. В классических теоремах вложения η целое и равно размерности объемлющего пространства. Позже рассмотрим случай, когда множество, на котором определены функции из рассматриваемого пространства, принадлежит классу $A_{\psi(t)}$, где функция $\psi(t)$ стремится к нулю быстрее, чем любая степень t.

Теорема 3. *Пусть открытое множество U, содержащееся в метрическом пространстве X с мерой μ, вполне ограничено и принадлежит классу A_{t^η}, $\eta \in [1, \infty)$. Предположим, что $p \le q < \frac{\eta p}{\eta - rp}$, где $1 \le p < \infty$, $0 < r \le 1$, $\eta > rp$. Тогда пространство $S_p^r(U)$ компактно вкладывается в пространство $L_q(U)$.*

В силу того, что $U \in A_{t^\eta}$, найдется последовательность разбиений $\Xi_k = \left\{E_1^k, \dots, E_{n_k}^k\right\}$, $k = 1, 2, \dots$, таких, что разбиение Ξ_k является измельчением разбиения Ξ_{k-1}, причем для любого i диаметр множества E_i^k не превосходит $C_1 2^{-k}$, а мера множества E_i^k больше либо равна $C_2 2^{-k\eta}$.

По определению функционального пространства $S_p^r(U)$ для каждого разбиения $\Xi_k = \left\{E_1^k, \dots, E_{n_k}^k\right\}$ найдется кусочно постоянная функция g_k, подчиненная этому разбиению, такая, что

$$\|f - g_k\|_{L_p(U)} \le [f]_{S_p^r(U)} C_1^r 2^{-kr}.$$

Исходя из того, что Ξ_{k+1} является измельчением разбиения Ξ_k, оценим норму $\|g_{k+1} - g_k\|_{L_p(U)}$. Очевидно, что функция $h_k = g_{k+1} - g_k$ постоянна на каждом множестве E_i^{k+1}, $i = 1, \dots, n_{k+1}$. Кроме того, $\|h_k\|_{L_p(U)} \le C[f]_{S_p^r(U)} 2^{-kr}$, где $C = 2C_1^r$.

Имеем

$$
\begin{aligned}
\|h_k\|^q_{L_q(U)} &= \sum_{i=1}^{n_{k+1}} \|h_k\|^q_{L_q(E_i^{k+1})}\\
&= \sum_{i=1}^{n_{k+1}} \left(\frac{\int\limits_{E_i^{k+1}} |h_k|^p}{\mu(E_i^{k+1})}\right)^{\frac{q}{p}} \mu(E_i^{k+1}) = \sum_{i=1}^{n_{k+1}} \Bigg(\int\limits_{E_i^{k+1}} |h_k|^p\Bigg)^{\frac{q}{p}} \mu(E_i^{k+1})^{1-\frac{q}{p}}.
\end{aligned}
$$

Принимая во внимание, что $1-\frac{q}{p} \le 0$, получаем

$$
\sum_{i=1}^{n_{k+1}} \Bigg(\int\limits_{E_i^{k+1}} |h_k|^p\Bigg)^{\frac{q}{p}} \mu(E_i^{k+1})^{1-\frac{q}{p}} \le (C_2 2^{-(k+1)\eta})^{1-\frac{q}{p}} \sum_{i=1}^{n_{k+1}} \Bigg(\int\limits_{E_i^{k+1}} |h_k|^p\Bigg)^{\frac{q}{p}}.
$$

Учитывая, что $\frac{q}{p} \ge 1$, выводим

$$
\sum_{i=1}^{n_{k+1}} \Bigg(\int\limits_{E_i^{k+1}} |h_k|^p\Bigg)^{\frac{q}{p}} \le \Bigg(\sum_{i=1}^{n_{k+1}} \int\limits_{E_i^{k+1}} |h_k|^p\Bigg)^{\frac{q}{p}} = \|h_k\|^q_{L_p(U)} \le C^q [f]^q_{S_p^r(U)} 2^{-krq}.
$$

Таким образом,

$$
\|h_k\|_{L_q(U)} \le C_3 [f]_{S_p^r(U)} (2^{-k\eta})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} 2^{-kr} = C_3 [f]_{S_p^r(U)} 2^{-k(r+\eta(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}))}.
$$

Отсюда неравенство $r+\eta\big(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\big) > 0$ влечет $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|h_k\|_{L_q(U)} < \infty$. Из последнего неравенства следует фундаментальность последовательности g_k по норме пространства $L_q(U)$, откуда вытекает принадлежность функции f пространству $L_q(U)$. Остается переписать неравенство $r+\eta\big(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\big) > 0$ в требуемом виде. Имеем $r+\eta\big(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\big) > 0$ $rpq > \eta(q-p)$ $\eta p > (\eta - rp)q$ $q < \frac{\eta p}{\eta - rp}$. Обозначим $\kappa = r+\eta\big(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\big)$. Далее,

$$
\|f-g_k\|_{L_q(U)} \le \sum_{j=k}^{\infty} \|h_j\|_{L_q(U)} \le C_3 \frac{2^{-k\kappa}}{1-2^{-\kappa}} [f]_{S_p^r(U)}. \tag{2}
$$

Из последнего неравенства вытекают ограниченность оператора вложения, а также в силу замечания к теореме 1 компактность этого оператора. Действительно, взяв в (2) $k=1$, имеем $\|f-g_1\|_{L_q(U)} \le C_4 [f]_{S_p^r(U)}$. Используя неравенство $\|g_1\|_{L_q(U)} \le C\|g_1\|_{L_p(U)}$, выводим $\|f\|_{L_q(U)} \le C_5(\|g_1\|_{L_p(U)} + [f]_{S_p^r(U)})$. С другой стороны, $\|g_1\|_{L_p(U)} \le \|f\|_{L_p(U)} + [f]_{S_p^r(U)} C_1^r 2^{-r}$. Следовательно, имеем ограниченность оператора вложения в $L_q(U)$:

$$
\|f\|_{L_q(U)} \le C_6(\|f\|_{L_p(U)} + [f]_{S_p^r(U)}).
$$

Для доказательства компактности оператора вложения используем вытекающее из (2) равенство

$$
\sup_{f:[f]_{S_p^r(U)} \le M} \inf_{g \in G_{\Xi_k}} \rho_{L_q(U)}(f,g) \le C_3 \frac{2^{-k\kappa}}{1-2^{-\kappa}} M = C_7 M 2^{-k\kappa}
$$

(см. замечание 3 к теореме 1). Из последнего равенства следует, что если A представляет собой ограниченное семейство функций из $S_p^r(U)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\sup\limits_{f\in A} \inf\limits_{g \in G_{\Xi_k}} \rho_{L_q(U)}(f,g) < \varepsilon$. Воспользовавшись замечанием к теореме 1, получаем компактность A как подмножества $L_q(U)$.

Теорема 4. *Пусть открытое множество U, содержащееся в метрическом пространстве X с мерой μ, вполне ограничено и принадлежит классу A_{t^η}, $\eta \in [1,\infty)$. Предположим, что $\eta < rp$, где $1 \le p < \infty$, $0 < r \le 1$. Тогда имеет место вложение функциональных пространств $S_p^r(U) \hookrightarrow C^{\frac{rp-\eta}{p}}(U)$ и оператор вложения ограничен.*

В силу того, что $U \in A_{t^\eta}$, найдется последовательность разбиений $\Xi_k = \{E_1^k, \dots, E_{n_k}^k\}$ множества U на непересекающиеся измеримые множества E_i^k, $k = 1, 2, \dots$, таких, что Ξ_k является измельчением разбиения Ξ_{k-1}, причем для любого i диаметр множества E_i^k не превосходит $C_1 2^{-k}$, а $\mu(E_i^k) \ge C_2 2^{-k\eta}$.

Из определения $S_p^r(U)$ следует, что для каждого разбиения $\Xi_k = \{E_1^k, \dots, E_{n_k}^k\}$ найдется кусочно постоянная функция g_k, подчиненная этому разбиению, для которой выполняется неравенство $\|f - g_k\|_{L_p(U)} \le [f]_{S_p^r(U)} (C_1)^r 2^{-kr}$. Как и ранее, функция $h_k = g_{k+1} - g_k$ постоянна на каждом множестве E_i^{k+1}, $i = 1, \dots, 2^{k+1}$. Кроме того, $\|h_k\|_{L_p(U)} \le C[f]_{S_p(U)} 2^{-kr}$. Отсюда

$$\|h_k\|_{C(U)} = \max_i \|h_k\|_{C(E_i^k)} = \max_i \left(\frac{1}{\mu(E_i^k)}\right)^{\frac{1}{p}} \|h_k\|_{L_p(E_i^k)}$$
$$\le C 2^{\frac{k\eta}{p}} \|h_k\|_{L_p(U)} \le C 2^{\frac{k\eta}{p} - kr} [f]_{S_p^r(U)} = C 2^{(\frac{\eta - rp}{p})k} [f]_{S_p^r(U)}. \quad (3)$$

По условию теоремы $\eta - rp < 0$. Суммируя геометрическую прогрессию, выводим, что последовательность функций g_k фундаментальна по равномерной норме. Кроме того, в силу записанного выше неравенства последовательность g_k сходится к функции f по норме $L_p(U)$ и, значит, по норме $L_1(U)$.

Далее, существует подпоследовательность последовательности g_k, сходящаяся к функции f почти всюду. Принимая во внимание фундаментальность последовательности g_k по равномерной норме, получаем, что вся последовательность g_k сходится к функции f почти всюду. Обозначим через F множество нулевой меры, на котором сходимость может не иметь места.

Зафиксируем точки $x, y \in U \setminus F$. Через k_0 обозначим наибольшее натуральное k такое, что $d(x,y) \le C_1 2^{-k}$. Наряду с последовательностью разбиений Ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, рассмотрим последовательность разбиений $\widetilde{\Xi}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющую дополнительному условию, которое состоит в том, что для $k = 0, \dots, k_0$ точки x и y должны принадлежать одному множеству $\widetilde{E}_k^j$. Поскольку в силу нашего определения множества E_k^j из разбиения Ξ_k не обязаны быть связными, этого можно добиться для $k = 1, \dots, k_0$, объединяя множества $E_k^{j_1}$ и $E_k^{j_2}$, содержащие x и y. Иначе говоря, для $k = 1, \dots, k_0$ полагаем $\widetilde{E}_{k-1}^j = E_k^j$, если множество E_k^j не содержит точки x и y, в противном случае полагаем $\widetilde{E}_{k-1}^j = E_k^j \cup E_k^l$, где $x \in E_k^j$, $y \in E_k^l$. Для $k_0 + 1, \dots$ положим $\widetilde{\Xi}_k = \Xi_k$.

Выберем последовательность функций $\tilde{g}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, подчиненную разбиению $\widetilde{E}_k^j$ и приближающую рассматриваемую функцию f согласно определению $S_p^r(U)$. При этом будем считать, что $\tilde{g}_k = g_k$ для всех $k \ge k_0$. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{g}_k(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x), \quad \lim_{k\to\infty} \tilde{g}_k(y) = \lim_{k\to\infty} g_k(y) = f(y).$$

Обозначим $\tilde{h}_k = \tilde{g}_{k+1} - \tilde{g}_k$. Тогда $\tilde{h}_k = h_k$ для $k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$. Кроме того, $\tilde{h}_k(x) = \tilde{h}_k(y) = 0$ для $k = 0, \dots, k_0 - 1$.

Множества разбиений $\widetilde{\Xi}_k$, $k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$, будут удовлетворять всем условиям из определения 2, за исключением того, что их диаметр будет не превосходить $3C_1 2^{-k}$.

Имеем

$$|f(y)-f(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_k(y)-f_k(x)| = |\lim_{k\to\infty} (\tilde{f}_k(y)-\tilde{f}_k(x))| = \left|\sum_{k=k_0}^{\infty} (\tilde{h}_k(y) - \tilde{h}_k(x))\right|.$$

Далее

$$\left|\sum_{k=k_0}^{\infty} (\tilde{h}_k(y) - \tilde{h}_k(x))\right| \le \sum_{k=k_0}^{\infty} |\tilde{h}_k(y) - \tilde{h}_k(x)| \le 2 \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\tilde{h}_k\|_{C(U)}.$$

В силу свойств разбиений $\widetilde{\Xi}_k$, $k = k_0, k_0+1, k_0+2, \dots$, функции $\tilde{h}_k$ будут удовлетворять неравенствам, аналогичным неравенствам (3). Таким образом, будем иметь

$$|f(y) - f(x)| \le 2 \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\tilde{h}_k\|_{C(U)} \le 2C[f]_{S_p^r(U)} \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{(\frac{\eta-rp}{p})k} = C[f]_{S_p^r(U)} \frac{2^{(\frac{\eta-rp}{p})k_0}}{1-2^{(\frac{\eta-rp}{p})}}.$$

Принимая во внимание $C_1 2^{-k_0-1} < d(x,y) \le C_1 2^{-k_0}$, получаем

$$|f(y) - f(x)| \le C(\eta, r, p)[f]_{S_p^r(U)} d(x,y)^{\frac{rp-\eta}{p}}.$$

Константа $C(\eta, r, p)$ в последнем неравенстве не зависит от выбора $x, y \in U \setminus F$. Следовательно, получаем, что f эквивалентна функции из $C^{\frac{rp-\eta}{p}}(U)$ и оператор вложения ограничен. Таким образом, теорема доказана.

Замечание 4. Нетрудно видеть, что любая область U класса A_{t^η}, $\eta \in (0, \infty)$, удовлетворяет следующему условию: пусть $x \in U$, тогда $\mu(B(x,r) \cap U) \ge Cr^\eta$, где C не зависит от x и $r \le \operatorname{diam}(U)$. Действительно, очевидно, что можно подобрать k таким, что $\frac{1}{4}r < \operatorname{diam}\big(E_k^i\big) < r$ для всех i, остается зафиксировать i такое, что $x \in E_k^i$, и воспользоваться неравенством $\mu\big(E_i^k\big) \ge C_2 2^{-k\eta}$. В литературе сформулированное условие называется условием Альфорса или условием η-регулярности (см., например, [2, 16]).

Замечание 5. Легко видеть, что условия, участвующие в определении класса областей A_{t^η}, можно несколько ослабить, не нарушая рассуждений в доказательстве теорем 3, 4. А именно, вместо того, чтобы требовать существование бесконечной последовательности разбиений Ξ_j, $j = 1, 2, \dots$, можно потребовать, чтобы для каждого натурального N существовала последовательность разбиений $\Xi_1, \dots, \Xi_N$, удовлетворяющая условиям из определения 2, и соответствующие константы C_1 и C_2 не зависели от N. Кроме того, вместо 2^{-k} в определении можно использовать 10^{-k} для всех k (либо τ^{-k}, где $\tau > 1$ не зависит от k). Исходя из этого, можно утверждать, что теоремы 3 и 4 справедливы также для вполне ограниченных областей U, удовлетворяющих условию η-регулярности.

Лемма. *Пусть открытое множество U, содержащееся в метрическом пространстве (X, d) с мерой μ, вполне ограничено и удовлетворяет условию η-регулярности, $\eta \in [1, \infty)$. Тогда U также удовлетворяет условиям, сформулированным в замечании 5.*

Доказательство. Фиксируем натуральное N. В силу вполне ограниченности U и леммы о покрытиях Витали найдется конечный набор непересекающихся шаров $B_i = B(x_i, r_N)$, $i = 1, \dots, m(N)$, радиуса $r_N = 10^{-N}$ таких, что $U \subset \bigcup 3B_i$, где $3B_i = B(x_i, 3r_N)$. Разбиение Ξ_N определим таким образом, что $B_i \cap U \subset E_i^N \subset 3B_i \cap U$. Это можно сделать, например, полагая $E_1^N = (3B_1 \setminus (B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_{m(N)})) \cap U$, $E_2^N = (B_2 \cup (3B_2 \setminus (3B_1 \cup B_3 \cup B_4 \cup \dots \cup B_{m(N)}))) \cap U$, $E_3^N = (B_3 \cup (3B_3 \setminus (3B_1 \cup 3B_2 \cup B_4 \cup B_5 \cup \dots \cup B_{m(N)}))) \cap U$ и т. д. Очевидно, что множества E_i^N не пересекаются и измеримы $U = \bigcup\limits_{i=1}^{m(n)} E_i^N$ в силу $U \subset \bigcup 3B_i$. Кроме того, из соотношения $B_i \cap U \subset E_i^N \subset 3B_i \cap U$ и η-регулярности множества U вытекают требуемые оценки на меру и диаметр множеств E_i^N.

Определим разбиения Ξ_j, $j = N-1, N-2, \dots, 1$, состоящие из множеств E_i^j, $i = 1, \dots, m(j)$, по индукции по убыванию индекса j.

Для каждого $j = 1, \dots, N-1$ рассмотрим конечный набор непересекающихся шаров B_i^j, $i = 1, \dots, m(n)$, радиуса 10^{-j} таких, что $U \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m(j)} 3B_i^j$.

Зафиксируем произвольное $i \in \{1, \dots, m(j)\}$. Построим множество E_i^j.

В силу того, что разбиение Ξ_{j+1} должно быть измельчением разбиения Ξ_j, $E_i^j = \bigcup\limits_{l \in A_i^j} E_l^{j+1}$ для некоторого набора индексов $A_i^j \subset \{1, \dots, m(j+1)\}$.

Через $\widehat{A}_i^j$ обозначим множество всех индексов $l \in \{1, \dots, m(j+1)\}$ таких, что $E_l^{j+1} \cap \frac{1}{2}B_i^j \neq \varnothing$. Через $\widetilde{A}_i^j$ обозначим набор всех индексов $l \in \{1, \dots, m(j+1)\}$ таких, что $E_l^{j+1} \cap 3B_i^j \neq \varnothing$. Очевидно, что $\bigcup\limits_{i=1}^{m(j)} \bigcup\limits_{l \in \widetilde{A}_i^j} E_l^{j+1} = U$.

Будем строить множество A_i^j так, что $\widehat{A}_i^j \subset A_i^j \subset \widetilde{A}_i^j$. При этом будем требовать выполнение двух условий: $A_{i_1}^j \cap A_{i_2}^j = \varnothing$ для $i_1 \neq i_2$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{m(j)} A_i^j = \{1, \dots, m(j+1)\}$. Легко видеть, что такой набор множеств индексов A_i^j можно построить, если выполняются два условия: $\widehat{A}_{i_1}^j \cap \widehat{A}_{i_2}^j = \varnothing$ для $i_1 \neq i_2$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{m(j)} \widetilde{A}_i^j = \{1, \dots, m(j+1)\}$. Естественно, что выбор множеств A_i^j, удовлетворяющих сформулированным условиям, неоднозначен, однако это не существенно для нашего доказательства.

Условие $\bigcup\limits_{i=1}^{m(j)} \widetilde{A}_i^j = \{1, \dots, m(j+1)\}$ тривиально следует из $\bigcup\limits_{i=1}^{m(j)} \bigcup\limits_{l \in \widetilde{A}_i^j} E_l^{j+1} = U$. Для того чтобы проверить выполнение другого условия, необходимо оценить диаметр множеств E_i^{j+1}. По построению $E_i^{j+1} = \bigcup\limits_{l \in A_i^{j+1}} E_l^{j+2} \subset \bigcup\limits_{l \in \widetilde{A}_i^{j+1}} E_l^{j+2}$.

Следовательно,

$$\max_i \operatorname{diam}\bigl(E_i^{j+1}\bigr) \le 3 \cdot 10^{-j-1} + \max_i \operatorname{diam}\bigl(E_i^{j+2}\bigr).$$

Кроме того, $\operatorname{diam}\bigl(E_i^N\bigr) \le 3 \cdot 10^{-N}$. Таким образом,

$$\max_i \operatorname{diam}\bigl(E_i^{j+1}\bigr) \le 3(10^{-j-1} + 10^{-j-2} + \dots + 10^{-N}) < \frac{3}{10^{j+1}\bigl(1 - \frac{1}{10}\bigr)} = \frac{1}{3 \cdot 10^j}.$$

По определению множества $\widehat{A}_i^j$ для $k \in \widehat{A}_i^j$ имеем $E_k^{j+1} \cap \frac{1}{2}B_i^j \neq \varnothing$. Из выведенной оценки следует, что $E_k^{j+1} \subset B_i^j$. Принимая во внимание $B_{i_1}^j \cap B_{i_2}^j = \varnothing$ для $i_1 \neq i_2$, получаем $\widehat{A}_{i_1}^j \cap \widehat{A}_{i_2}^j = \varnothing$.

Определив множества индексов A_i^j, тем самым определили множества E_i^j и разбиения Ξ_j, $j = 1, \dots, N$. По построению Ξ_{j+1} является измельчением Ξ_j, множества E_i^j измеримы и не пересекаются, $\bigcup\limits_{i=1}^{m(j)} E_i^j = U$. Требуемые оценки на меру и диаметр множеств E_i^j вытекают из соотношения $\frac{1}{2}B_i^j \subset E_i^j \subset 4B_i^j$. Лемма доказана.

Отметим, что приведенные в доказательстве леммы рассуждения неприменимы для случая, когда (X, d, μ) не удовлетворяет условию удвоения. В дальнейшем сосредоточимся на исследовании этого случая.

Пусть $U \in A_{\exp(-\frac{1}{t})}$. При этом область U может не принадлежать ни одному из классов A_{t^η}, $\eta \in (0, \infty)$, и нельзя использовать доказанные выше теоремы вложения 3, 4.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\mu(U) \leq 1$. Следовательно, если $1 \leq p \leq q \leq \infty$, то $\|f\|_{L_p(U)} \leq \|f\|_{L_q(U)}$ для любой функции $f \in \|f\|_{L_q(U)}$.

Рассмотрим невозрастающую неотрицательную функцию $\varphi(p)$, заданную на отрезке $[1, \infty)$. Для функции $f \in L_\infty(U)$ определим норму

$$\|f\|_{L_{\varphi(p)}(U)} = \sup_{p \in [1,\infty)} \varphi(p)\|f\|_{L_p(U)}. \tag{4}$$

Пополняя пространство $f \in L_\infty(U)$ по этой норме, получаем новое функциональное пространство, которое обозначим через $L_{\varphi(p)}(U)$. Ясно, что если $\varphi(p) = 1$, когда $p \leq p_0$, и $\varphi(p) = 0$ в противном случае, то $L_{\varphi(p)}(U) = L_{p_0}(U)$. Вообще, когда $\varphi(p)$ представляет собой финитную функцию, то $L_{\varphi(p)}(U)$ содержится в некотором $L_q(U)$, где $q < \infty$. Если $\lim\limits_{p\to\infty} \varphi(p) > 0$, то $L_{\varphi(p)}(U) = L_\infty(U)$. В промежуточном случае, когда функция $\varphi(p)$ не финитна, но $\lim\limits_{p\to\infty} \varphi(p) = 0$, получаем новые функциональные пространства, аналогичные пространствам Орлича, которые соответствуют быстро растущим порождающим функциям.

Используя норму (4), можно определить пространство соболевского типа, для которого можно доказывать теоремы вложения в $L_q(U)$ и в $C^\alpha(U)$ в случае, когда $U \in A_{\exp(-\frac{1}{t})}$.

Определение 3. Предположим, что $0 < r \leq 1$, функция $\varphi(p)$, заданная на отрезке $[1, \infty)$, неотрицательна и не возрастает. Пусть $f \in L_p(U)$ для всех $1 \leq p < \infty$ таких, что $\varphi(p) \neq 0$. Функция f *принадлежит функциональному классу* $S^r_{\varphi(p)}(U)$, если для любого $\delta > 0$ и для любого $p \in [1, \infty)$ выполняется неравенство $\varphi(p)\theta_p(f, \delta) \leq C\delta^r$, где C не зависит от δ, p. Наименьшую возможную константу C в последнем неравенстве будем обозначать через $[f]_{S^r_{\varphi(p)}(U)}$. Иначе говоря,

$$[f]_{S^r_{\varphi(p)}(U)} = \sup_{\delta>0,\, p\in[1,\infty)} \frac{\varphi(p)\theta_p(f,\delta)}{\delta^r}.$$

Норма в $S^r_{\varphi(p)}(U)$ определяется равенством

$$\|f\|_{S^r_{\varphi(p)}(U)} = \|f\|_{L_1(U)} + [f]_{S^r_{\varphi(p)}(U)}.$$

Теорема 5. *Пусть открытое множество U, содержащееся в метрическом пространстве X с мерой μ, вполне ограничено и принадлежит классу $A_{\exp(-\frac{1}{t})}$. Предположим, что $0 < r \leq 1$, $\varphi(p) = p^{-\gamma}$, где $\gamma \in [0, r)$. Тогда пространство*

$S^r_{\varphi(p)}(U)$ вложено в пространство $C^{r-\gamma}(U)$, причем оператор вложения ограничен.

В силу того, что $U \in A_{\exp(-\frac{1}{t})}$, найдется последовательность разбиений $\Xi_k = \{E_1^k, \dots, E_{n_k}^k\}$ множества U на непересекающиеся измеримые множества E_i^k, $k = 1, 2, \dots$, таких, что Ξ_k является измельчением разбиения Ξ_{k-1}, причем для любого i диаметр множества E_i^k не превосходит $C_1 2^{-k}$, а $\mu(E_i^k) \geq C_2 \exp(-2^k)$.

Из определения $S^r_{\varphi(p)}(U)$ следует, что для каждого разбиения $\Xi_k = \{E_1^k, \dots, E_{n_k}^k\}$ и для каждого $p \in [1, \infty)$ такого, что $\varphi(p) \neq 0$, найдется кусочно постоянная функция $g_{k,p}$, подчиненная этому разбиению, для которой выполняется неравенство

$$\|f - g_{k,p}\|_{L_p(U)} \leq \frac{1}{\varphi(p)} [f]_{S^r_{\varphi(p)}(U)} (C_1)^r 2^{-kr}.$$

Обозначим $g_k = g_{k,2^k}$. Имеем

$$\|f - g_k\|_{L_{2^k}(U)} \leq 2^{k\gamma} [f]_{S^r_{\varphi(p)}(U)} (C_1)^r 2^{-kr} = (C_1)^r 2^{k(\gamma - r)} [f]_{S^r_{\varphi(p)}(U)}.$$

Как и ранее, функция $h_k = g_{k+1} - g_k$ постоянна на каждом множестве E_i^{k+1}, $i = 1, \dots, n_{k+1}$.

Не ограничивая общности, предполагаем, что $\mu(U) \leq 1$. Отсюда следует, что для любой функции $h \in L_{p_2}(U)$ и $1 \leq p_1 \leq p_2$ выполняется неравенство $\|h\|_{L_{p_1}(U)} \leq \|h\|_{L_{p_2}(U)}$.

Кроме того, $\|h_k\|_{L_{2^k}(U)} \leq C[f]_{S^r_{\varphi(p)}(U)} 2^{k(\gamma - r)}$. Отсюда

$$\|h_k\|_{C(U)} = \max_i \|h_k\|_{C(E_i^k)} = \max_i \left(\frac{1}{\mu(E_i^k)} \right)^{\frac{1}{2^k}} \|h_k\|_{L_{2^k}(E_i^k)}$$
$$\leq C(\exp(2^k))^{\frac{1}{2^k}} \|h_k\|_{L_{2^k}(U)} \leq \widetilde{C} 2^{k(\gamma - r)} [f]_{S^r_{\varphi(p)}(U)}. \quad (5)$$

Последнее неравенство позволяет, практически дословно повторив рассуждения из доказательства теоремы 4, вывести требуемую оценку, а именно доказать, что для п. в. $x, y \in U$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq C(\gamma, r, \varphi) [f]_{S^r_{\varphi(p)}(U)} d(x, y)^{r - \gamma}.$$

Теорема доказана.

Приведем несколько примеров областей, принадлежащих классу $A_{\exp(-\frac{1}{t})}$, но не принадлежащих классу A_{t^s} ни для одного s.

Во-первых, пусть $X = \left(0, \frac{1}{8}\right) \subset \mathbb{R}$, в качестве меры μ рассмотрим стандартную меру Лебега, метрику определим следующим образом: $d(x, y) = w(|x - y|)$, где $w(t) = -\frac{1}{\ln t}$, $w(0) = 0$. Легко видеть, что $d(x, y)$ удовлетворяет всем аксиомам метрики. Действительно, симметричность и положительность очевидны, неравенство треугольника вытекает из неравенства $w(t_1 + t_2) \leq w(t_1) + w(t_2)$, где $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$. Неравенство $w(t_1 + t_2) \leq w(t_1) + w(t_2)$ эквивалентно $\frac{1}{\frac{1}{\ln t_1} + \frac{1}{\ln t_2}} \geq \ln(t_1 + t_2)$, $\frac{\ln t_1 \ln t_2}{\ln t_1 + \ln t_2} \geq \ln(t_1 + t_2)$, $\ln t_1 \ln t_2 \leq (\ln t_1 + \ln t_2) \ln(t_1 + t_2)$. Предположим, что $t_2 = \max(t_1, t_2)$. Обозначим $t = t_2$, $C = \frac{t_1}{t_2}$. Имеем $C \in (0, 1]$. Переписав неравенства, получим

$$\ln(Ct) \ln(t) \leq (\ln(Ct) + \ln(t)) \ln((C + 1)t),$$

$$(\ln(t))^2 + \ln(C)\ln(t) \le 2(\ln(t))^2 + 2\ln(t)\ln(C+1) + \ln(C)\ln(t) + \ln(C)\ln(C+1),$$

$$(\ln(t))^2 + 2\ln(C+1)\ln(t) + \ln(C)\ln(C+1) \ge 0.$$

Далее,

$$|\ln(C)\ln(C+1)| \le |\ln(C)|C \le \max_{x\in[C,1]} |\ln'(x)|(1-C)C \le \frac{1}{C}(1-C)C < 1.$$

Остается показать, что $(\ln(t) + \ln(C+1))^2 \ge 1 + (\ln(C+1))^2$. Последнее неравенство очевидно в силу $\ln(t) < -3\ln(2)$, $0 < \ln(C+1) \le \ln(2)$. Также легко видеть, что (X, d, μ) удовлетворяет всем условиям, сформулированным в начале статьи, но не удовлетворяет условию удвоения. В случае, если $B(x,r)$ не содержит точки 0, $\frac{1}{8}$, имеем $\mu(B(x,r)) = 2\exp\bigl(-\frac{1}{r}\bigr)$. Таким образом, для $0 \le a < b < 1$ любой открытый отрезок $(a,b) \subset X$ будет открытым множеством в смысле топологии, определяемой метрикой d, принадлежащим классу $A_{\exp(-\frac{1}{t})}$, но не принадлежащим классу A_{t^s} для любого s. Отметим, что метрическое пространство (X,d) имеет топологическую размерность 1, при этом размерность по Хаусдорфу (X,d,μ) равна ∞.

Во-вторых, рассмотрим область $U = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < \exp\bigl(-\frac{1}{x}\bigr)\bigr\}$, содержащуюся в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ со стандартной лебеговой мерой. Очевидно, что область U принадлежит классу $A_{\exp(-\frac{1}{t})}$, при этом она не принадлежит ни одному классу A_{t^s} в силу особенности границы в точке $(0,0)$. Можно также рассмотреть целый класс похожих областей по аналогии с областями, удовлетворяющими условию гибкого конуса (см. [23]). При этом в отличие от случая, рассмотренного О. В. Бесовым, соответствующие гибкие конусы могут иметь нулевые углы при вершинах.

В-третьих, рассмотрим следующее метрическое пространство (X,d) с мерой μ. Положим $X \subset \mathbb{R}^\infty$, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, где $K_1 = \bigl[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\bigr] \times \{0\} \times \{0\} \times \dots$, $K_2 = \bigl[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\bigr] \times \bigl[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\bigr] \times \{0\} \times \{0\} \times \dots$, $K_3 = \bigl[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\bigr] \times \bigl[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\bigr] \times \bigl[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\bigr] \times \{0\} \times \{0\} \times \dots$ и т. д. Иначе говоря, X представляет собой объединение n-мерных кубов с центрами в начале координат и ребрами, параллельными координатным осям длины $\frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Метрика d на X порождается $\|\cdot\|_\infty$ нормой в $\mathbb{R}^\infty$, $\|(x_1, x_2, \dots)\|_\infty = \max\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$, $d(x,y) = \|x-y\|_\infty$. Обозначим $M_n = K_n \setminus K_{n-1}$, $K_0 = \varnothing$. Определим меру μ. Множество $E \subset X$ измеримо по мере μ, если для любого n множество $E_n = E \cap M_n$ измеримо по n-мерной мере Лебега. При этом $\mu(E) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n(E_n)$, где μ_n обозначает n-мерную меру Лебега на проекции $\mathbb{R}^n$ на подпространство $0 = x_{n+1} = x_{n+2} = \dots$. Любое открытое множество $U \subset X$, содержащее начало координат, с достаточно регулярной границей будет принадлежать классу $A_{\exp(-\frac{1}{t})}$ и не будет принадлежать ни одному классу A_{t^s}.

По поводу примера метрического пространства (X,d), для которого нельзя определить борелевскую меру μ так, чтобы (X,d,μ) удовлетворяло условию удвоения, см. [30].

Отметим, что во втором и третьем примерах, выбросив сколь угодно малое множество, содержащее начало координат, можно получить область класса A_{t^s}.

Замечание 6. Определение 3 можно существенно обобщить, предположив, что функция h зависит как от p, так и от x. Получаемые таким образом функциональные пространства включают в себя как частный случай весовые пространства Соболева. Предположим, что функция $\varphi : [1,\infty)\times U\to\mathbb{R}$ неотрицательна, не возрастает по первому аргументу, который обозначаем через p, и измерима по второму аргументу x. Не исключена ситуация, когда для некоторого p функция $\varphi(p,x)$ равна нулю для всех x. Пусть $\varphi(p,x)f(x)\in L_p(U)$ для любого $p\in[1,\infty)$. Будем писать, что функциям f принадлежит пространству $S^r_{\varphi(p,x)}(U)$, если для любого $p\in[1,\infty)$ и для любого $\delta>0$ выполняется неравенство

$$\sup_{\sigma\in\Sigma_\delta}\inf_{g\in G_\sigma}\left(\int\limits_U|\varphi(p,x)(f(x)-g(x))|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\le C\delta^r,$$

где C не зависит от δ, p. Наименьшую возможную константу C в последнем неравенстве будем обозначать через $[f]_{S^r_{\varphi(p,x)}(U)}$. Норма в $S^r_{\varphi(p,x)}(U)$ определяется равенством

$$\|f\|_{S^r_{\varphi(p,x)}(U)}=\|f\|_{L_1(U)}+[f]_{S^r_{\varphi(p,x)}(U)}.$$

С помощью функциональных пространств $S^r_{\varphi(p,x)}(U)$ можно уточнить доказанные выше теоремы вложения. Для этого вместо классов областей $A_{\psi(t)}$ необходимо рассмотреть классы областей $A_{\psi(t,x)}$. Пусть функция $\psi:[0,\infty)\times U\to\mathbb{R}$ непрерывна, неотрицательна и не убывает по первому аргументу, причем $\psi(0,x)=0$. Открытое множество $U\subset X$ принадлежит семейству $A_{\psi(t,x)}$, если найдется последовательность разбиений $\Xi_k=\{E^k_1,\dots,E^k_{n_k}\}$, $k=1,2,\dots$, множества U на непересекающиеся измеримые множества таких, что Ξ_k является измельчением разбиения Ξ_{k-1}, причем для любого i диаметр множества E^k_i не превосходит $C_1 2^{-k}$, а мера множества E^k_i больше либо равна $C_2\sup\limits_{x\in E^k_i}\psi(2^{-k},x)$.

Автор выражает благодарность С. К. Водопьянову и рецензенту за полезные предложения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bojarski B., Hajlasz P.* Pointwise inequalities for Sobolev functions and some applications // Studia Math. 1993. V. 106. P. 77–92.
2. *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Anal. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.
3. *Franchi B., Hajlasz P., Koskela P.* Definitions of Sobolev classes on metric spaces // Ann. Inst. Fourier. 1999. V. 49, N 6. P. 1903–1924.
4. *Hajlasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincaré // Mem. Amer. Math. Sos. 2000. V. 145, N 688. P. 1–101.
5. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. Berlin: Springer-Verl., 2001.
6. *Gol'dshtein V. M., Troyanov M.* Axiomatic theory of Sobolev spaces // Expo. Math. 2001. V. 19, N 4. P. 289–336.
7. *Bojarski B.* Pointwise characterization of Sobolev classes // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2006. V. 255. P. 71–87.
8. *Иванишко И. А., Кротов В. Г.* Компактность вложений соболевского типа на метрических пространствах с мерой // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 6. С. 829–844.
9. *Triebel H.* Limits of Besov norms // Arch. Math. 2011. V. 96, N 2. P. 169–175.
10. *Yang D.* New characterizations of Hajlazh–Sobolev spaces on metric spaces // Sci. China. 2003. V. 46, N 5. P. 675–689.
11. *Jerison D.* The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander′s condition // Duke Math. J. 1986. V. 53, N 2. P. 503–523.
12. *Coifman R. R., Weiss G.* Analyze harmonique non-commutative sur certains espaces homogénes. Berlin: Springer-Verl., 1971. (Lecture Notes Math.; V. 242).
13. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F.* Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians. Berlin: Springer-Verl., 2007.

14. *Folland G. B.* Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups // Arkiv Math. 1975. V. 13, N 2. P. 161–207.

15. *Хермандер Л.* Гипоэллиптические дифференциальные уравнения второго порядка // Математика. 1968. Т. 12, № 2. С. 88–110.

16. *Johnsson A.* Brownian motion on fractals and function spaces // Math. Z. 1996. Bd 222, Heft 3. S. 495–504.

17. *Barlow M. T.* Diffusions on fractals. Lectures on probability theory and statistics. Berlin: Springer-Verl., 1998. (Lecture Notes Math.; V. 1690).

18. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

19. *Брудный Ю. А.* Критерии существования производных в L_p // Мат. сб. 1967. Т. 73, № 1. С. 42–65.

20. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. I // Math. Z. 1928. Bd 27. S. 565–606.

21. *Дезин А. А.* К теоремам вложения и задаче о продолжении функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 5. С. 741–743.

22. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

23. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.

24. *Riesz M.* Sur les ensembles compacts de fonctions sommables // Acta Sci. Math. 1933. V. 6, N 1. P. 136–142.

25. *Kolmogoroff A. N.* Über Kompaktheit der Functionen bei der Konvergenz im Mittel // Nachr. Ges. Wiss. Götingen. 1931. Bd 9. S. 60–63.

26. *Hanche-Olsen H., Holden H.* The Kolmogorov–Riesz compactness theorem // Expo. Math. 2010. V. 28, N 4. P. 385–394.

27. *Kalamajska A.* On compactness of embeddings for Sobolev spaces defined on metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1999. V. 24, N 1. P. 123–132.

28. *Кротов В. Г.* Критерии компактности в пространствах L_p, $p > 0$ // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 7. С. 129–148.

29. *Водопьянов С. К., Романовский Н. Н.* Классы отображений Соболева на пространствах Карно — Каратеодори. Различные нормировки и вариационные задачи // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1028–1045.

30. *Saksman E.* Remarks on the nonexistence of doubling measures // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1999. V. 24, N 1. P. 155–163.

Статья поступила 11 января 2012 г.

Романовский Николай Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`nnrom@math.nsc.ru`