Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 517.51

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И КОМПАКТНОСТИ ДРОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ

С. М. Фарсани

Аннотация. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Рассмотрен дробный оператор Римана — Лиувилля вида

$$f \to T_\alpha f(x) := v(x) \int_0^x \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}, \quad x > 0,$$

с локально суммируемыми весовыми функциями u и v. Найдены критерии $L^p \to L^q$-ограниченности и компактности оператора T_α, когда $0 < p, q < \infty$, $p > 1/\alpha$, при условии, что u монотонно убывает на $\mathbb{R}^+ := [0,\infty)$. Даны двойственные варианты этого результата.

Ключевые слова: дробный оператор Римана — Лиувилля, пространство Лебега, весовое неравенство.

§ 1. Введение

Для $0 < p < \infty$ обозначим через $L^p := L^p(\mathbb{R}^+)$ множество всех измеримых функций таких, что

$$\|f\|_p := \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть $\alpha > 0$. Положим

$$T_\alpha f(x) := v(x) \int_0^x \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}, \quad x > 0. \tag{1}$$

Если $v(x) = u(x) = 1$, то оператор (1) совпадает с классическим дробным оператором Римана — Лиувилля [1]. В настоящей работе рассматривается задача о нахождении необходимых и достаточных условий для неравенства

$$\|T_\alpha f\|_q \le C \|f\|_p \tag{2}$$

с константой C, не зависящей от $f \in L^p$, которую считаем наименьшей из возможных, т. е. равной норме оператора $\|T_\alpha\|_{L^p \to L^q}$. При $\alpha = 1$ неравенство (2) охарактеризовано полностью (см., например, [2, § 1.3; 3]). В случаях $p = 1$ или $q = 1$ критерий следует из [4, гл. XI, § 1.5, теорема 4]. Случай $\alpha > 1$ при $1 < p, q < \infty$ решен в [5] с последующим обобщением в [6–11]. Случай $\alpha \in (0,1)$ изучался в работах [12–17] и некоторых других. В частности, в [14, 15] характеризуются (2) с оператором T_α, когда $u(x) = 1$. Следующие две теоремы взяты из статьи Д. В. Прохорова [15].

Теорема A [15, теорема 1]. *Пусть* $\alpha > 0$, $\max\bigl(\frac{1}{\alpha},1\bigr) < p \le q < \infty$. *Тогда неравенство* (2) *выполнено, если и только если* $A < \infty$, *где*

$$A := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{(v(s))^q\,ds}{s^{(1/p-\alpha)q}} \right)^{1/q}.$$

Более того, $C \approx A$.

Теорема B [15, теорема 2]. *Пусть* $\alpha > 0$, $0 < q < p < \infty$, $p > \max\bigl(\frac{1}{\alpha},1\bigr)$, $\frac{1}{r} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Тогда неравенство* (2) *выполнено, если и только если* $B < \infty$, *где*

$$B := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{(v(s))^q\,ds}{s^{(1/p-\alpha)q}} \right)^{r/q} \right)^{1/r}.$$

Более того, $C \approx B$.

В следующем параграфе мы обобщим теоремы A и B на случай, когда оператор (1) содержит неотрицательный убывающий (невозрастающий) вес u. В § 3 даны двойственные варианты результатов § 2. В § 4 получаем критерий компактности оператора T_α.

Всюду в работе произведения вида $0\cdot\infty$ полагаются равными 0. Соотношения $A \ll B$, $B \gg A$ означают $A \le cB$ с константой c, зависящей только от p, q, α, и могут быть различны в разных местах. Если $A \ll B$ и $A \gg B$, то пишем $A \approx B$. Через $\mathbb{Z}$ обозначаем множество всех целых чисел, через χ_E — характеристическую функцию множества E, $p' := \frac{p}{p-1}$, $q' := \frac{q}{q-1}$.

§ 2. Ограниченность

Пусть $\mathfrak{M}^+$ — класс всех измеримых функций $f\colon [0,\infty) \to [0,+\infty]$. Без ограничения общности можно сузить неравенство (2) на $f \in \mathfrak{M}^+$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $\frac{1}{\alpha} < p \le q < \infty$, $v \in \mathfrak{M}^+$ *и* $u \in \mathfrak{M}^+$ *монотонно убывает на* $[0,\infty)$. *Тогда неравенство*

$$\left(\int\limits_0^\infty (T_\alpha f(x))^q\,dx \right)^{1/q} \le C \left(\int\limits_0^\infty (f(x))^p\,dx \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^+, \tag{3}$$

выполнено, если и только если $A_0 + A_1 < \infty$, *где*

$$A_0 := \sup_{t>0} A_0(t) = \sup_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty \frac{(v(x))^q\,dx}{x^{(1-\alpha)q}} \right)^{1/q} \left(\int\limits_0^{\frac{t}{2}} (u(x))^{p'}\,dx \right)^{1/p'} \tag{4}$$

и $A_1 := \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} A_k$,

$$A_k := \sup_{t\in(2^k,2^{k+1}]} A_k(t) = \sup_{t\in(2^k,2^{k+1}]} \left(\int\limits_t^{2^{k+1}} \frac{(v(s))^q\,ds}{s^{(1-\alpha)q}} \right)^{1/q} \left(\int\limits_{2^{k-1}}^t (u(s))^{p'} ds \right)^{1/p'}.$$

Более того, $C \approx A_0 + A_1$.

Доказательство. Имеем

$$T_\alpha f(x) = v(x) \int\limits_0^{\frac{x}{2}} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} + v(x) \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}, \quad f \in \mathfrak{M}^+.$$

Так как

$$\frac{1}{x} \le \frac{1}{x-y} \le \frac{2}{x}, \quad y \in \left(0, \frac{x}{2}\right),$$

то

$$v(x) \int\limits_0^{x/2} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \approx \frac{v(x)}{x^{1-\alpha}} \int\limits_0^{x/2} f(y)u(y)\,dy$$

и неравенство (3) влечет неравенство

$$\left(\int\limits_0^\infty \frac{(v(x))^q}{x^{(1-\alpha)q}} \left(\int\limits_0^{x/2} f(y)u(y)\,dy \right)^q dx \right)^{1/q} \le C_0 \left(\int\limits_0^\infty (f(x))^p\,dx \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^+, \tag{5}$$

с константой $C_0 \le C$, причем из критерия выполнения весового неравенства Харди [2, теорема 1.3.1] следует, что $A_0 \approx C_0$. Кроме того, выполнение неравенства (3) эквивалентно одновременному выполнению неравенства (5) и неравенства

$$\left(\int\limits_0^\infty (v(x))^q \left(\int\limits_{x/2}^{x} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right)^q dx \right)^{1/q} \le D \left(\int\limits_0^\infty (f(x))^p\,dx \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^+, \tag{6}$$

так что $C \approx A_0 + D$. Покажем, что $D \ll A_1 \ll C$. Отсюда последует, что $C \approx A_0 + A_1$. С этой целью построим новый оператор. Положим $\Delta_k := (2^k, 2^{k+1}]$ и определим

$$T_k^{(1)} f(x) := v(x)\chi_{\Delta_k}(x) \int\limits_{2^k}^{x} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}},$$

$$T_k^{(2)} f(x) := v(x)\chi_{\Delta_k}(x) \int\limits_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}},$$

$$T_k := T_k^{(1)} + T_k^{(2)}, \quad T^{(1)} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} T_k^{(1)}, \quad T^{(2)} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} T_k^{(2)}, \quad T := T^{(1)} + T^{(2)}.$$

Так как операторы $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ блок-диагональные, по [18, лемма 1] для $p \le q$ имеем

$$\|T\| := \|T\|_{L^p \to L^q} \approx \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|T_k\|_{L^p(2^{k-1},2^{k+1}] \to L^q(2^k,2^{k+1}]} =: \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|T_k\|. \tag{7}$$

Заметим, что

$$\left(\int\limits_0^\infty v(x)^q \left(\int\limits_{x/2}^{x} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right)^q dx \right)^{1/q} \le \|Tf\|_q$$

$$\le \left(\int\limits_0^\infty v(x)^q \left(\int\limits_0^{x} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right)^q dx \right)^{1/q}, \quad f \in \mathfrak{M}^+, \tag{8}$$

и из левой части (8) тривиально следует, что $D \le \|T\|$. Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$ и положим $v_k := v\chi_{\Delta_k}$. Если $x \in \Delta_k$ и $y \in [2^{k-1}, x)$, то $\frac{1}{x-y} \ge \frac{4}{3x}$. Отсюда неравенство

$$\|T_k f\|_{L^q[\Delta_k]} \le \|T_k\| \|f\chi_{[2^{k-1},2^{k+1}]}\|_p, \quad f \in \mathfrak{M}^+,$$

влечет неравенство Харди

$$\left(\int\limits_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} \frac{(v_k(x))^q}{x^{(1-\alpha)q}} \left(\int\limits_{2^{k-1}}^{x} f(y)u(y)\,dy \right)^q dx \right)^{1/q} \ll \|T_k\| \|f\chi_{[2^{k-1},2^{k+1}]}\|_p, \quad f \in \mathfrak{M}^+.$$

Применяя лемму 2.1 из [19] и (7), получаем нижнюю оценку $\|T\| \gg A_1$. Отсюда и из правого неравенства в (8) имеем $A_1 \ll \|T\| \ll C$. Тем самым нижняя оценка $C \gg A_0 + A_1$ доказана.

Верхняя оценка $C \ll A_0 + A_1$ будет установлена, если показать, что $\|T\| \ll A_1$. С этой целью сначала докажем, что для $x \in \Delta_k$

$$J := \int\limits_{2^{k-1}}^{x} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \ll \frac{1}{x^{1-\alpha}} \left(\int\limits_{2^{k-1}}^{x} (f(y))^p \left[\int\limits_{2^{k-1}}^{y} (u(t))^{p'}\,dt \right]^{1/p'} dy \right)^{1/p} \times \left(\int\limits_{2^{k-1}}^{x} (u(t))^{p'}\,dt \right)^{1/p'^2}. \quad (9)$$

Имеем

$$J = \int\limits_{2^{k-1}}^{x} \left\{ f(y) \left[\int\limits_{2^{k-1}}^{y} \frac{(u(t))^{p'}\,dt}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}} \right]^{1/pp'} \right\} \times \left\{ \left[\int\limits_{2^{k-1}}^{y} \frac{(u(t))^{p'}\,dt}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}} \right]^{-1/pp'} \frac{u(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} \right\} dy$$

(применяя неравенство Гёльдера)

$$\le \left(\int\limits_{2^{k-1}}^{x} (f(y))^p \left[\int\limits_{2^{k-1}}^{y} \frac{(u(t))^{p'}dt}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}} \right]^{1/p'} dy \right)^{1/p} \times \left(\int\limits_{2^{k-1}}^{x} \frac{(u(y))^{p'}}{(x-y)^{(1-\alpha)p'}} \left[\int\limits_{2^{k-1}}^{y} \frac{(u(t))^{p'}dt}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}} \right]^{-1/p} dy \right)^{1/p'}$$

(вычисляя второй сомножитель)

$$\approx \left(\int\limits_{2^{k-1}}^{x} (f(y))^p \left[\int\limits_{2^{k-1}}^{y} \frac{(u(t))^{p'}\,dt}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}} \right]^{1/p'} dy \right)^{1/p} \left(\int\limits_{2^{k-1}}^{x} \frac{(u(y))^{p'}dy}{(x-y)^{(1-\alpha)p'}} \right)^{1/p'^2}.$$

Применим неравенство Чебышева: если $F(x) \ge 0$ убывает и $G(x) \ge 0$ возрастает на $(a,b) \subset \mathbb{R}$, то

$$\int\limits_a^b F(x)G(x)\,dx \le \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b F(x)\,dx \int\limits_a^b G(x)\,dx.$$

Пусть $x \in \Delta_k$, $y \in (2^{k-1}, x)$. Поскольку $\frac{1}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}}$ возрастает по $t \in (2^{k-1}, y)$ и $(u(t))^{p'}$ убывает, в силу неравенства Чебышева при $x \in \Delta_k$ получим

$$\int_{2^{k-1}}^{y} \frac{(u(t))^{p'}dt}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}} \leq \frac{1}{y-2^{k-1}} \int_{2^{k-1}}^{y} (u(t))^{p'}dt \int_{2^{k-1}}^{y} \frac{dt}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}}$$

$$\approx \frac{1}{y-2^{k-1}}((x-2^{k-1})^{1-(1-\alpha)p'} - (x-y)^{1-(1-\alpha)p'}) \left[\int_{2^{k-1}}^{y} (u(t))^{p'}\,dt\right]$$

$$\approx \frac{1}{(x-2^{k-1})^{(1-\alpha)p'}} \left[\int_{2^{k-1}}^{y} (u(t))^{p'}\,dt\right] \approx \frac{1}{x^{(1-\alpha)p'}} \left[\int_{2^{k-1}}^{y} (u(t))^{p'}\,dt\right],$$

здесь использовали элементарное соотношение

$$b^\gamma - a^\gamma \approx b^{\gamma-1}(b-a), \quad b > a > 0,\ \gamma > 0.$$

Тем самым (9) доказано.

Из определения A_1 имеем

$$\left[\int_{2^{k-1}}^{x} (u(t))^{p'}\,dt\right]^{1/p'} \leq A_1 \left[\int_{x}^{2^{k+1}} \frac{(v_k(s))^q\,ds}{s^{(1-\alpha)q}}\right]^{-1/q}, \quad x \in (2^{k-1}, 2^{k+1}]. \tag{10}$$

Применяя (9), неравенство Минковского и (10), запишем

$$I_k := \int_{\Delta_k} (v(x))^q \left(\int_{2^{k-1}}^{x} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\right)^q dx$$

$$\leq \int_{\Delta_k} \frac{(v_k(x))^q}{x^{(1-\alpha)q}} \left(\int_{2^{k-1}}^{x} (f(y))^p \left(\int_{2^{k-1}}^{y} (u(t))^{p'}dt\right)^{1/p'} dy\right)^{q/p} \left(\int_{2^{k-1}}^{x} (u(t))^{p'}\,dt\right)^{q/p'^2} dx$$

$$\leq \left(\int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} (f(y))^p \left(\int_{2^{k-1}}^{y} (u(t))^{p'}\,dt\right)^{1/p'}\right.$$

$$\left.\times \left(\int_{y}^{2^{k+1}} \frac{(v_k(x))^q}{x^{(1-\alpha)q}} \left(\int_{2^{k-1}}^{x} (u(t))^{p'}\,dt\right)^{q/p'^2} dx\right)^{p/q} dy\right)^{q/p}$$

$$\ll A_1^{\frac{q}{p'}} \left(\int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} (f(y))^p \left(\int_{2^{k-1}}^{y} (u(t))^{p'}\,dt\right)^{1/p'} \left(\int_{y}^{2^{k+1}} \frac{(v_k(x))^q\,dx}{x^{(1-\alpha)q}}\right)^{1/q} dy\right)^{q/p}$$

$$\leq A_1^q \left(\int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} (f(x))^p\,dx\right)^{q/p}.$$

Учитывая неравенство Йенсена, находим

$$\|Tf\|_q^q = \sum_k I_k \ll A_1^q \sum_k \left(\int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} (f(x))^p\,dx\right)^{q/p} \ll A_1^q \|f\|_p^q,$$

откуда вытекает верхняя оценка $\|T\| \ll A_1$. Таким образом, необходимость $C \ll A_0 + A_1$ доказана. $\square$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $p > \frac{1}{\alpha}$, $0 < q < p < \infty$, $\frac{1}{r} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $v \in \mathfrak{M}^+$ *и* $u \in \mathfrak{M}^+$ *монотонно убывает на* $[0,\infty)$. *Тогда неравенство* (3) *выполнено, если и только если* $B_0 + B_1 < \infty$, *где*

$$B_0 := \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \frac{(v(s))^q\, ds}{s^{(1-\alpha)q}} \right)^{r/p} \left(\int_0^{t/2} (u(t))^{p'} dt \right)^{r/p'} \frac{(v(t))^q\, dt}{t^{(1-\alpha)q}} \right)^{1/r},$$

$$B_1 := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{(v(s))^q}{s^{(1-\alpha)q}} \left(\int_s^{2^{k+1}} \frac{(v(t))^q\, dt}{t^{(1-\alpha)q}} \right)^{r/p} \left(\int_{2^{k-1}}^s (u(t))^{p'} dt \right)^{r/p'} ds \right)^{1/r} =: \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{B}_k^r \Big)^{1/r}.$$

Более того, $C \approx B_0 + B_1$.

Доказательство. Будем следовать схеме доказательства теоремы 1. Оценка снизу $\|T_\alpha\|_{L^p \to L^q} \gg B_0 + B_1$ вытекает из рассуждений, повторяющих доказательство оценки снизу в теореме 1, и соответствующих результатов о весовых неравенствах Харди. Аналогично доказываем оценку сверху. Теперь в силу [18, лемма 1] имеем

$$\|T\| \approx \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|T_k\|^r \Big)^{1/r}, \quad q < p, \tag{11}$$

и достаточно показать, что $\|T\| \ll B_1$. Пусть

$$h(x) := \frac{\chi_{\Delta_k}(x)}{x^{(1-\alpha)q^2/r}} \left(\int_{2^{k-1}}^x \left[\int_{2^{k-1}}^s (u(t))^{p'} dt \right]^{r/q'} \left[\int_s^{2^{k+1}} \frac{(v_k(t))^q\, dt}{t^{(1-\alpha)q}} \right]^{r/p} (u(s))^{p'}\, ds \right)^{q/r}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$J_k := \left(\int_{\Delta_k} (v(x))^q \left(\int_{2^{k-1}}^x \frac{f(y)u(y)\, dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right)^q dx \right)^{1/q}$$

$$\le \left(\int_{\Delta_k} (v(x))^q (h(x))^{r/q}\, dx \right)^{1/r} \left(\int_{\Delta_k} (v(x))^q (h(x))^{-p/q} \left(\int_{2^{k-1}}^x \frac{f(y)u(y)\, dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right)^p dx \right)^{1/p}. \tag{12}$$

Меняя порядок интегрирования и интегрируя по частям, находим

$$\int_{\Delta_k} (v(x))^q (h(x))^{r/q}\, dx = \int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} (v_k(x))^q (h(x))^{r/q}\, dx$$

$$= \int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} \frac{(v_k(x))^q}{x^{(1-\alpha)q}} \int_{2^{k-1}}^x \left[\int_{2^{k-1}}^s (u(t))^{p'} dt \right]^{r/q'} \left[\int_s^{2^{k+1}} \frac{(v_k(t))^q\, dt}{t^{(1-\alpha)q}} \right]^{r/p} (u(s))^{p'}\, ds dx$$

$$= \int\limits_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} \left[\int\limits_{2^{k-1}}^{s} (u(t))^{p'} dt \right]^{r/q'} \left[\int\limits_{s}^{2^{k+1}} \frac{(v_k(t))^q\,dt}{t^{(1-\alpha)q}} \right]^{r/q} (u(s))^{p'}\,ds dx$$

$$= \frac{p'}{r} \int\limits_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} \left[\int\limits_{s}^{2^{k+1}} \frac{(v_k(t))^q\,dt}{t^{(1-\alpha)q}} \right]^{r/q} d \left[\int\limits_{2^{k-1}}^{s} (u(t))^{p'}\,dt \right]^{r/p'}$$

$$= \frac{p'}{q} \int\limits_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} \left[\int\limits_{s}^{2^{k+1}} \frac{(v_k(t))^q\,dt}{t^{(1-\alpha)q}} \right]^{r/p} \left[\int\limits_{2^{k-1}}^{s} (u(t))^{p'} dt \right]^{r/p'} \frac{(v_k(s))^q}{s^{(1-\alpha)q}}\,ds$$

$$= \frac{p'}{q} \int\limits_{\Delta_k} \left[\int\limits_{s}^{2^{k+1}} \frac{(v_k(t))^q\,dt}{t^{(1-\alpha)q}} \right]^{r/p} \left[\int\limits_{2^{k-1}}^{s} (u(t))^{p'} dt \right]^{r/p'} \frac{(v_k(s))^q}{s^{(1-\alpha)q}}\,ds = \frac{p'}{q} \mathfrak{B}_k^r.$$

Таким образом, из (12) следует, что

$$J_k \ll \mathfrak{B}_k \left(\int\limits_{\Delta_k} (v(x))^q (h(x))^{-p/q} \left(\int\limits_{2^{k-1}}^{x} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right)^p dx \right)^{1/p}. \tag{13}$$

Покажем, что

$$\sup_{t\in\Delta_k} \left(\int\limits_{t}^{2^{k+1}} \frac{(v(x))^q (h(x))^{-p/q}\,dx}{x^{(1-\alpha)p}} \right)^{1/p} \left(\int\limits_{2^{k-1}}^{t} (u(s))^{p'} ds \right)^{1/p'} \ll 1. \tag{14}$$

Пусть $t \in \Delta_k$. Пишем

$$\int\limits_{t}^{2^{k+1}} \frac{(v(x))^q (h(x))^{-p/q}\,dx}{x^{(1-\alpha)p}} = \int\limits_{t}^{2^{k+1}} \frac{(v(x))^q\,dx}{x^{(1-\alpha)p}} \left(\left[\int\limits_{2^{k-1}}^{x} \left[\int\limits_{2^{k-1}}^{s} (u(t))^{p'} dt \right]^{r/q'} \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left[\int\limits_{s}^{2^{k+1}} \frac{(v_k(x))^q\,dx}{x^{(1-\alpha)q}} \right]^{r/p} (u(s))^{p'}\,ds \right]^{q/r} \frac{1}{x^{(1-\alpha)q^2/r}} \right)^{-p/q}$$

$$= \int\limits_{t}^{2^{k+1}} \frac{(v(x))^q\,dx}{x^{(1-\alpha)q}} \left(\int\limits_{2^{k-1}}^{x} \left(\int\limits_{2^{k-1}}^{s} (u(t))^{p'}\,dt \right)^{r/q'} \left[\int\limits_{s}^{2^{k+1}} \frac{(v_k(z))^q\,dz}{z^{(1-\alpha)q}} \right]^{r/p} (u(s))^{p'}\,ds \right)^{-p/r}$$

$$\le \left(\int\limits_{2^{k-1}}^{t} \left[\int\limits_{2^{k-1}}^{s} (u(t))^{p'}\,dt \right]^{r/q'} (u(s))^{p'} ds \right)^{-p/r} = \left(\frac{r}{p'} \right)^{p/r} \left(\int\limits_{2^{k-1}}^{t} (u(s))^{p'} ds \right)^{-p/p'},$$

откуда следует (14). Применяя рассуждения из доказательства теоремы 1, при $p = q$ видим, что

$$\left(\int\limits_{\Delta_k} (v(x))^q (h(x))^{-p/q} \left(\int\limits_{2^{k-1}}^{x} \frac{f(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right)^p dx \right)^{1/p} \ll \|f\chi_{[2^{k-1},2^{k+1}]}\|_p.$$

Отсюда и из (13) вытекает, что

$$\|T_k f\|_q \ll \mathfrak{B}_k \|f\chi_{[2^{k-1},2^{k+1}]}\|_p.$$

Значит, $\|T_k\| \ll \mathfrak{B}_k$, и по (11) $\|T\| \ll B_1$. $\square$

Замечание. При $u(x) \equiv 1$ константы A и B в теоремах Прохорова эквивалентны константам A_1 и B_1 соответственно.

§ 3. Двойственные варианты

Пусть $\alpha \in (0,1)$, $v(x) \geq 0$ и $0 \leq u(x)$ возрастает. Положим

$$T^*_\alpha f(x) := v(x) \int\limits_x^\infty \frac{f(y)u(y)\,dy}{(y-x)^{1-\alpha}}, \quad f \in \mathfrak{M}^+. \tag{15}$$

Аналогично теоремам 1 и 2 доказываются следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $\frac{1}{\alpha} < p \leq q < \infty$, $v \in \mathfrak{M}^+$ и $u \in \mathfrak{M}^+$ монотонно возрастает на $[0,\infty)$. Тогда неравенство*

$$\left(\int\limits_0^\infty (T^*_\alpha f(x))^q\,dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int\limits_0^\infty (f(x))^p\,dx\right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^+, \tag{16}$$

выполнено, если и только если $A^*_0 + A^*_1 < \infty$, где

$$A^*_0 := \sup_{t>0} A^*_0(t) = \sup_{t>0}\left(\int\limits_0^t (v(s))^q\,ds\right)^{1/q}\left(\int\limits_{2t}^\infty \frac{(u(x))^{p'}dx}{x^{(1-\alpha)p'}}\right)^{1/p'} \tag{17}$$

и $A^*_1 := \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} A^*_k$,

$$A^*_k := \sup_{t\in(2^k,2^{k+1}]} A^*_k(t) := \sup_{t\in(2^k,2^{k+1}]}\left(\int\limits_{2^k}^t \frac{(v(s))^q\,ds}{s^{(1-\alpha)q}}\right)^{1/q}\left(\int\limits_t^{2^{k+2}} (u(s))^{p'}ds\right)^{1/p'}.$$

Более того, $C \approx A^*_0 + A^*_1$.

Теорема 4. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $p > \frac{1}{\alpha}$, $0 < q < p < \infty$, $\frac{1}{r} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $v \in \mathfrak{M}^+$ и $u \in \mathfrak{M}^+$ монотонно возрастает на $[0,\infty)$. Тогда неравенство (16) выполнено, если и только если $B^*_0 + B^*_1 < \infty$, где*

$$B^*_0 := \left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^t (v(s))^q\,ds\right)^{r/p}\left(\int\limits_{2t}^\infty \frac{(u(s))^{p'}\,ds}{s^{(1-\alpha)p'}}\right)^{r/p'}(v(t))^q\,dt\right)^{1/r}$$

и

$$B^*_1 := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{(v(s))^q\,ds}{s^{(1-\alpha)q}}\left(\int\limits_{2^k}^s \frac{(v(t))^q\,dt}{t^{(1-\alpha)q}}\right)^{r/p}\left(\int\limits_s^{2^{k+2}} (u(t))^{p'}dt\right)^{r/p'}\right)^{1/r} =: \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{B}^r_k\Big)^{1/r}.$$

Более того, $C \approx B^*_0 + B^*_1$.

§ 4. Компактность

Теорема 5. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $\frac{1}{\alpha} < p \leq q < \infty$, $v \in \mathfrak{M}^+$ *и* $u \in \mathfrak{M}^+$ *монотонно убывает на* $[0,\infty)$. *Для компактности оператора* T_α *из* L^p *в* L^q *необходимо и достаточно, чтобы* $A_0 + A_1 < \infty$ *и*

$$\lim_{t\to 0} A_0(t) = \lim_{t\to\infty} A_0(t) = 0, \tag{18}$$

$$\lim_{k\to-\infty} A_k = \lim_{k\to+\infty} A_k = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Необходимость. Из компактности оператора T_α следует его ограниченность из L^p в L^q. Отсюда по теореме 1 получаем первое условие теоремы. Используем известный факт, что компактный оператор переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. Положим

$$f_t(x) = \frac{\chi_{[0,t/2]}(x)(u(x))^{p'-1}\operatorname{sgn} u(x)}{\left(\int\limits_0^{t/2}(u(y))^{p'}\,dy\right)^{1/p}}, \quad t > 0.$$

Тогда $\|f_t\|_p = 1$ и для любой фиксированной $g \in L^{p'}$ в силу неравенства Гёльдера вытекает, что

$$\left|\int\limits_0^\infty f_t(x)g(x)\,dx\right| \leq \left(\int\limits_0^{t/2}|g(x)|^{p'}\,dx\right)^{1/p'} \to 0, \quad t \to 0.$$

Отсюда $f_t \to 0$ слабо, поэтому $\lim\limits_{t\to 0}\|T_\alpha f_t\|_q = 0$. Однако

$$\|T_\alpha f_t\|_q \geq \left(\int\limits_t^\infty (v(x))^q\left(\int\limits_0^{t/2}\frac{f_t(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\right)^q dx\right)^{1/q} \gg A_0(t).$$

Следовательно, $\lim\limits_{t\to 0} A_0(t) = 0$. Второе условие (18) следует из компактности двойственного оператора T_α^*, как в [15, теорема 3].

Пусть

$$f_{k,t}(x) = \frac{\chi_{[2^{k-1},t]}(x)(u(x))^{p'-1}\operatorname{sgn} u(x)}{\left(\int\limits_{2^{k-1}}^{t}(u(y))^{p'}\,dy\right)^{1/p}}, \quad t \in [2^k, 2^{k+1}],\ k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $\|f_{k,t}\|_p = 1$ и для любой фиксированной $g \in L^{p'}$ в силу неравенства Гёльдера при $k \to \pm\infty$ имеем

$$\left|\int\limits_0^\infty f_{k,t}(x)g(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} f_{k,t}(x)g(x)\,dx\right| \leq \left(\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}}|g(x)|^{p'}\,dx\right)^{1/p'} \to 0.$$

Отсюда $f_{k,t} \to 0$ слабо и

$$\lim_{k\to\pm\infty}\sup_{t\in[2^k,2^{k+1}]}\|T_\alpha f_{k,t}\|_q = 0.$$

Если $x < 2^{k-1}$, то $T_\alpha f_{k,t}(x) = 0$, так что для всех $x > t$ пишем

$$\|T_\alpha f_{k,t}\|_q \geq \left(\int_t^\infty (v(x))^q \left(\int_{2^{k-1}}^t \frac{f_{k,t}(y)u(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right)^q dx \right)^{1/q}$$
$$\geq \left(\int_t^{2^{k+1}} (v(x))^q \left(\int_{2^{k-1}}^t \frac{(u(y))^{p'}\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right)^q dx \right)^{1/q}$$
$$\gg \left(\int_t^{2^{k+1}} \frac{(v(x))^q\,dx}{x^{(1-\alpha)q}} \right)^{1/q} \left(\int_{2^{k-1}}^t (u(s))^{p'}\,ds \right)^{1/p'}, \quad t \in [2^k, 2^{k+1}].$$

Поэтому

$$\sup_{t\in[2^k,2^{k+1}]} \|T_\alpha f_{k,t}\| \gg \sup_{t\in[2^k,2^{k+1}]} A_k(t).$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\pm\infty} A_k = 0$.

Достаточность. Следуем соответствующим аргументам из [15, теорема 3]. Пусть $0 < a < b < \infty$ и

$$P_a f = \chi_{[0,a]} f, \quad Q_b f = \chi_{[b,\infty)} f, \quad P_{ab} f = \chi_{[a,b]} f.$$

Имеем

$$T_\alpha f = (P_a + P_{ab} + Q_b) T_\alpha (P_a + P_{ab} + Q_b) f$$
$$= P_a T_\alpha P_a f + Q_b T_\alpha Q_b f + Q_b T_\alpha P_{ab} f + Q_a T_\alpha P_a f + P_{ab} T_\alpha P_{ab} f.$$

Рассмотрим каждый оператор суммы по отдельности и докажем, что T_α будет компактен как предел компактных операторов. Например, пусть $v_a := v\chi_{[0,a]}$ и $u_a := u\chi_{[0,a]}$. Тогда

$$P_a T_\alpha P_a f(x) = v_a(x) \int_0^x \frac{f(y)u_a(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}$$

и, применяя теорему 1, видим, что

$$\|P_a T_\alpha P_a\|_{L^p\to L^q} \ll (\sup_{0<t<a} A_0(t) + \sup_{\{k:2^k<a\}} A_k).$$

Таким образом, в силу (18) и (19) имеем

$$\lim_{a\to 0} \|P_a T_\alpha P_a\|_{L^p\to L^q} = 0.$$

Аналогично получаем, что

$$\lim_{b\to\infty} \|Q_b T_\alpha Q_b\|_{L^p\to L^q} = 0, \ \lim_{b\to\infty} \|Q_b T_\alpha P_{ab}\|_{L^p\to L^q} = 0, \ \lim_{a\to 0} \|Q_a T_\alpha P_a\|_{L^p\to L^q} = 0.$$

Чтобы доказать, что $P_{ab} T_\alpha P_{ab}$ компактен, предположим без ограничения общности, что оба сомножителя в правой части (4) конечны, т. е. $\int\limits_t^\infty \frac{(v(x))^q dx}{x^{(1-\alpha)q}} \in (0,\infty)$

и $\int\limits_0^{\frac{t}{2}}(u(s))^{p'}ds \in (0,\infty)$ для всех $t \in (0,\infty)$. Ядро интегрального оператора $P_{ab}T_\alpha P_{ab}$ имеет вид

$$\varphi_{a,b}(x,y) := v(x)\chi_{[a,b]}(x)u(y)\chi_{[a,x]}(y).$$

Тогда

$$J := \left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\infty|\varphi_{a,b}(x,y)|^{p'}dy\right)^{q/p'}dx\right)^{1/q}$$
$$= \left(\int\limits_a^b(v(x))^q\left(\int\limits_a^x\frac{(u(y))^{p'}dy}{(x-y)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{q/p'}dx\right)^{1/q}.$$

Применяя неравенство Чебышева, видим, что

$$\int\limits_a^x\frac{(u(y))^{p'}\,dy}{(x-y)^{(1-\alpha)p'}} \le \int\limits_0^x\frac{(u(y))^{p'}\,dy}{(x-y)^{(1-\alpha)p'}} \ll \frac{1}{x^{(1-\alpha)p'}}\int\limits_0^x(u(y))^{p'}\,dy.$$

Отсюда

$$J \ll \left(\int\limits_a^b\frac{(v(x))^q\,dx}{x^{(1-\alpha)q}}\right)^{1/q}\left(\int\limits_0^b(u(y))^{p'}\,dy\right)^{1/p'} < \infty.$$

По известному критерию [4, гл. XI, § 3.2] это означает, что $P_{ab}T_\alpha P_{ab}$ компактен. Поэтому T_α компактен как предел компактных операторов. □

Теорема 6. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $p > \frac{1}{\alpha}$, $0 < q < p < \infty$, $\frac{1}{r} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $v \in \mathfrak{M}^+$, $u \in \mathfrak{M}^+$ монотонно убывает на $[0,\infty)$. Тогда оператор $T_\alpha : L^p \to L^q$ компактен, если и только если $B_0 + B_1 < \infty$.*

Доказательство. Необходимость сразу следует из теоремы 2. Для доказательства достаточности применим теорему Андо [20, теоремы 5.5, 5.8]. □

Аналогично устанавливаются утверждения о компактности оператора T_α^*.

Теорема 7. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $\frac{1}{\alpha} < p \le q < \infty$, $v \in \mathfrak{M}^+$ и $u \in \mathfrak{M}^+$ монотонно возрастает на $[0,\infty)$. Для компактности оператора T_α^* из L^p в L^q необходимо и достаточно, чтобы $A_0^* + A_1^* < \infty$ и*

$$\lim_{t\to 0}A_0^*(t) = \lim_{t\to\infty}A_0^*(t) = 0, \quad \lim_{k\to-\infty}A_k^* = \lim_{k\to+\infty}A_k^* = 0.$$

Теорема 8. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $p > \frac{1}{\alpha}$, $0 < q < p < \infty$, $\frac{1}{r} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $v \in \mathfrak{M}^+$ и $u \in \mathfrak{M}^+$ монотонно возрастает на $[0,\infty)$. Тогда оператор $T_\alpha^* : L^p \to L^q$ компактен, если и только если $B_0^* + B_1^* < \infty$.*

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору В. Д. Степанову, поощрявшему эту работу, за полезные обсуждения, а также искреннюю благодарность профессору Д. В. Прохорову за ценную помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
2. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
3. *Sinnamon G., Stepanov V. D.* The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. London Math. Soc. 1996. V. 54. P. 89–101.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
5. *Stepanov V. D.* Two-weighted estimates for Riemann–Liouville integrals. Praha, 1988. 28 p. (Rep. / Math. Inst. Czechoslovak Acad. Sci.; N 39).
6. *Martin-Reyes F., Sawyer E.* Weighted inequalities for Riemann–Liouville fractional integrals of order one and greater // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 106. P. 727–733.
7. *Stepanov V. D.* Weighted inequalities for a class of Volterra convolution operators // J. London Math. Soc. 1992. V. 45, N 2. P. 232–242.
8. *Ойнаров Р.* Двусторонние оценки нормы некоторых классов интегральных операторов // Тр. Мат. ин-та РАН им. В. А. Стеклова. 1993. Т. 204. С. 240–250.
9. *Stepanov V. D.* Weighted norm inequalities of Hardy type for a class of integral operators // J. London Math. Soc. 1994. V. 50, N 2. P. 105–120.
10. *Lai Q.* Weighted modular inequalities for Hardy type operators // Proc. London Math. Soc. 1999. V. 79. P. 649–672.
11. *Prokhorov D. V.* Inequalities of Hardy type for a class of integral operators with measures // Anal. Math. 2007. V. 33. P. 199–225.
12. *Andersen K. F., Sawyer E. T.* Weighted norm inequalities for the Riemann–Liouville and Weyl fractional integral operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 308. P. 547–558.
13. *Lorente M.* A characterization of two weighted norm inequalities for one-sided operators of fractional type // Can. J. Math. 1997. V. 49. P. 1010–1033.
14. *Meskhi A.* Solution of some weight problems for the Riemann–Liouville and Weyl operators // Georgian Math J. 1989. V. 106. P. 727–733.
15. *Prokhorov D. V.* On the boundedness and compactness of a class of integral operators // J. London Math. Soc. 2000. V. 61, N 2. P. 617–628.
16. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* Весовые оценки операторов Римана — Лиувилля и приложения // Тр. Мат. ин-та РАН им. В. А. Стеклова. 2003. Т. 248. С. 289–312.
17. *Rakotondratsimba Y.* Weighted norm inequalities for Riemann–Liouville fractional integrals of order less than one // J. Anal. Appl. 1997. V. 16. P. 801–829.
18. *Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Hardy operator with variable limits on monotone functions // J. Funct. Spaces Appl. 2003. V. 1, N 1. P. 1–15.
19. *Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Kernel operators with variable intervals of integration in Lebesgue spaces and applications // Math. Inequal. Appl. 2010. V. 13, N 3. P. 449–510.
20. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

Статья поступила 28 марта 2012 г.

Фарсани Соруш Мохаммади
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо Маклая, 6, Москва 117198
s_mbahman@yahoo.com