Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 512.554

ТЕОРЕМЫ ЛИ И ЭНГЕЛЯ ДЛЯ n–КРАТНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Н. А. Корешков

Аннотация. Доказаны аналоги теорем Ли и Энгеля для n-кратных алгебр Ли. Кроме того, доказано существование картановских подалгебр в n-кратных алгебрах Ли.

Ключевые слова: n-кратная алгебра Ли.

n-Кратные алгебры Ли были введены в рассмотрение в [1]. В этой работе приведены мотивировка данной конструкции и некоторые примеры соответствующих объектов. Конструкция n-кратной алгебры Ли при $n = 2$ под названием бигамильтоновой операды рассматривалась в [2].

Определение 1. Векторное пространство L над полем P называется *n-кратной алгеброй Ли*, если существует n билинейных кососимметрических отображений $s_i : L \times L \to L$ таких, что для любых элементов $a, b, c \in L$ и любых двух отображений s_i и s_j имеет место соотношение

$$J(a, b, c, s_i, s_j) + J(a, b, c, s_j, s_i) = 0, \tag{1}$$

где $J(a, b, c, s_i, s_j) = (as_ib)s_jc + (bs_ic)s_ja + (cs_ia)s_jb$. Здесь xs_ky — образ пары $(x, y) \in L \times L$ при отображении s_k.

Для любых двух отображений s_i и s_j определим отображение $s = \alpha_is_i + \alpha_js_j$, $\alpha_i, \alpha_j \in P$, действующее по правилу $asb = \alpha_i(as_ib) + \alpha_j(as_jb)$. Возникающее таким образом пространство, являющееся линейной оболочкой $s_1, \dots, s_n$, обозначим через S. Легко видеть, что для любых двух элементов s и $\tilde{s}$ из S имеет место $J(a, b, c, s, \tilde{s}) + J(a, b, c, \tilde{s}, s) = 0$, $a, b, c \in L$. Более того, соотношения (1) равносильны соотношениям

$$(asb)sc + (bsc)sa + (csa)sb = 0, \quad a, b, c \in L, \tag{2}$$

когда s пробегает все пространство умножений S.

В дальнейшем алгебру $L = L(S)$ будем называть *n-кратной алгеброй Ли*, если $\dim_P S = n$.

Определим некоторые понятия для n-кратных алгебр Ли, аналогичные соответствующим понятиям для обычных алгебр Ли. Если M и N — два подпространства в L, то символ MN будет обозначать подпространство $\langle msn\ \forall m \in M, n \in N,\ s \in S\rangle_P$. Тогда n-кратная алгебра Ли L разрешима, если существует натуральное k такое, что $L^{(k)} = 0$, где $L^{(i+1)} = L^{(i)}L^{(i)}$, $i \geq 0$, $L^{(0)} = L$. Соответственно L нильпотентна, если $L^k = 0$ для некоторого k, где $L^{i+1} = L^iL$, $i \geq 1$, $L^1 = L$.

Кроме того, подпространство I в n-кратной алгебре $L = L(S)$ назовем *идеалом*, если $xsy \in I$ для любых $x \in I$, $y \in L$, $s \in S$.

© 2013 Корешков Н. А.

Для доказательства дальнейших результатов будем использовать понятие представления n-кратной алгебры Ли.

Определение 2. Билинейное отображение $\rho : S \times L \to \mathrm{End}_P(V)$ назовем *представлением n-кратной алгебры Ли $L = L(S)$ в пространстве V*, если для любых $s \in S$ и $x, y \in L$ выполняется соотношение

$$\rho_s(xsy) = \rho_s(x)\rho_s(y) - \rho_s(y)\rho_s(x), \tag{3}$$

где $\rho_s(a)$ — линейный оператор, являющийся образом пары $(s, a) \in S \times L$.

Обозначим $W_k = \{v \in V \mid (\rho_s(y) - \lambda_s(y) \cdot 1_V)^k v = 0,\ \lambda_s(y) \in P\ \forall s \in S,$ $y \in L\}$, а $W = \bigcup\limits_{k \geq 1} W_k$ для некоторого представления ρ n-кратной алгебры Ли L в пространстве V над полем P.

Лемма 1. *Пусть $\rho : S \times L \to \mathrm{End}_P(V)$ — представление конечномерной n-кратной алгебры Ли над бесконечным полем P в конечномерном пространстве V над тем же полем.*

1. *Если $W_1 \neq 0$, то в пространстве умножений S существует базис $s_1, \dots, s_n$ такой, что $W_1 = W_{s_i}^{(1)} = \{v \in V \mid (\rho_{s_i}(y) - \lambda_{s_i}(y) \cdot 1_V)v = 0,\ \lambda_{s_i}(y) \in P\ \forall y \in L\}$, $i = 1, \dots, n$.*

2. *Если $\lambda_s(y) = 0\ \forall s \in S,\ y \in L$, то $W = W_{s_i} = \{v \in V \mid \forall y \in L\, \exists k \in \mathbb{N}\ (\rho_{s_i}(y))^k v = 0\}$, $i = 1, \dots, n$, где, как в п. 1, $s_1, \dots, s_n$ — некоторый базис в пространстве умножений S.*

Доказательство. Так как $W_1 \neq 0$ (т. е. существует общий собственный вектор для всех операторов $\rho_s(y)$, $s \in S$, $y \in L$), из билинейности отображения ρ вытекает линейность функции $\lambda_s(y)$ по s и по y. Обозначим $W_{s,y}^{(1)} = \{v \in V \mid \rho_s(y)v = \lambda_s(y)v,\ \lambda_s(y) \in P\}$ для некоторых $s \in S$ и $y \in L$. Очевидно, $W_1 = \bigcap\limits_{s \in S,\, y \in L} W_{s,y}^{(1)}$. Пусть $e_1, \dots, e_d$ — базис алгебры L, $s_1, \dots, s_n$ — базис пространства умножений S и $v_1, \dots, v_m$ — базис пространства V. Пусть

$$\rho_{s_i}(e_j)v_k = \sum_{t=1}^{m} A_{ijtk} v_t, \quad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, d,\ k = 1, \dots, m,\ A_{ijtk} \in P,$$

$$v = \sum_{k=1}^{m} x_k v_k \in W_1, \quad s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i, \quad y = \sum_{j=1}^{d} y_j e_j, \quad \alpha_j, y_j \in P.$$

Тогда множество элементов из W_1 есть совокупность решений системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} B_{tk} x_k = 0, \quad t = 1, \dots, m, \tag{4}$$

$$B_{tk} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \alpha_i y_j A_{ijtk},\ t \neq k, \quad B_{tt} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \alpha_i y_j A_{ijtt} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \alpha_i y_j \lambda_{s_i}(e_j).$$

В силу конечномерности пространства V система (4) равносильна некоторой конечной подсистеме. Если $r = \dim V - \dim W_1$, то существует конечный набор Q элементов

$$s^{(q)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(q)} s_i, \quad y^{(q)} = \sum_{j=1}^{d} y_j^{(q)} e_j, \quad q \in Q,$$

для которых система соотношений

$$\sum_{k=1}^{m} B_{tk}^{(q)} x_k = 0, \quad t = 1, \dots, m, \ q \in Q, \tag{5}$$

имеет ранг r. Здесь

$$B_{tk}^{(q)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \alpha_i^{(q)} y_j^{(q)} A_{ijtk}, \quad t \neq k,$$

$$B_{tt}^{(q)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \alpha_i^{(q)} y_j^{(q)} A_{ijtt} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i^{(q)} y_j^{(q)} \lambda_{s_i}(e_j).$$

Положим, что в системе (5) линейно независимы первые r уравнений, т. е. t и q меняются от 1 до r, и можно считать, что $t = q$. Таким образом, система (5) примет вид

$$\sum_{k=1}^{m} B_{qk}^{(q)} x_k = 0, \quad q = 1, \dots, r. \tag{6}$$

Обозначим через $\Delta = \Delta(\alpha^{(q)}, y^{(q)}, \{A_{ijqk}\})$, $\alpha^{(q)} = \left(\alpha_1^{(q)}, \dots, \alpha_n^{(q)}\right)$, $y^{(q)} = \left(y_1^{(q)}, \dots, y_d^{(q)}\right)$ некоторый отличный от нуля определитель порядка r системы (6).

Заменим элементы $B_{tk}^{(t)}$ этого определителя на

$$\overline{B}_{tk}^{(t)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \left(\lambda_i^{(t)} \alpha_i^{(t)} + \delta_i^{(t)}\right)\left(\mu_j^{(t)} y_j^{(t)} + \gamma_j^{(t)}\right) A_{ijtk}, \quad t \neq k,$$

$$\overline{B}_{tt}^{(t)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \left(\lambda_i^{(t)} \alpha_i^{(t)} + \delta_i^{(t)}\right)\left(\mu_j^{(t)} y_j^{(t)} + \gamma_j^{(t)}\right) A_{ijtt}$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \left(\lambda_i^{(t)} \alpha_i^{(t)} + \delta_i^{(t)}\right)\left(\mu_j^{(t)} y_j^{(t)} + \gamma_j^{(t)}\right) \lambda_{s_i}(e_j), \quad t = 1, \dots, r.$$

Тогда соответствующий определитель $\overline{\Delta}\ \left(\alpha^{(t)},\ y^{(t)},\ t = 1, \dots, r,\ \{A_{ijtk}\},\ \lambda_i^{(t)},\ \mu_j^{(t)},\ \delta_i^{(t)},\ \gamma_j^{(t)},\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, d\right)$ как многочлен от переменных $\lambda_i^{(t)}$, $\mu_j^{(t)}$, $\delta_i^{(t)}$, $\gamma_j^{(t)}$ отличен от нуля, поскольку при $\lambda_i^{(t)} = 1$, $\delta_i^{(t)} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $\mu_j^{(t)} = 1$, $\gamma_j^{(t)} = 0$, $j = 1, \dots, d$, $t = 1, \dots, r$, его значение отлично от нуля.

Выберем значения переменных $\lambda_i^{(t)}$, $\delta_i^{(t)}$, $\mu_j^{(t)}$, $\gamma_j^{(t)}$ так, что $\lambda_i^{(t)} \alpha_i^{(t)} + \delta_i^{(t)} = \lambda_i^{(1)} \alpha_i^{(1)} + \delta_i^{(1)} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, $\mu_j^{(t)} y_j^{(t)} + \gamma_j^{(t)} = \mu_j^{(1)} y_j^{(1)} + \gamma_j^{(1)} \neq 0$, $j = 1, \dots, d$, $t = 2, \dots, r$, и первую группу значений обозначим через $\alpha_i(0)$, а вторую — через $y_j(0)$. Тогда соответствующий определитель $\overline{\Delta}(0)$, рассматриваемый как многочлен от переменных A_{ijtk}, отличен от нуля, так как коэффициент при каждом мономе $A_{ijt_1k_1} A_{ijt_2k_2} \dots A_{ijt_rk_r}$ ($t_a \neq k_a$, $a = 1, \dots, r$), равный $\alpha_i^r(0) y_j^r(0)$, отличен от нуля. Выбирая базис $v_1, \dots, v_m$ в пространстве V так, чтобы значение определителя $\overline{\Delta}(0)$ для соответствующих констант A_{ijtk}^0 было отлично от нуля, получим систему уравнений ранга r, которая является частью системы уравнений, определяющих пространство $W_{s^0,y^0}^{(1)}$, где $s^0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(0) e_i$, $y^0 = \sum\limits_{j=1}^{d} y_j(0) e_j$. Следовательно, $W_{s^0,y^0}^{(1)} = W_1$, где $W_{s_0,y_0}^{(1)} = \{v \in V \mid \rho_{s_0}(y) v = \lambda_{s_0} v,\ \lambda_{s_0}(y) \in P\}$.

Определитель $\overline{\Delta}(0)$ полученной системы как многочлен от $\alpha_1(0),\dots,\alpha_n(0)$, $y_1(0),\dots,y_d(0)$ не равен нулю, стало быть, существует набор $y_1(0),\dots,y_d(0)$, при котором этот определитель как многочлен от $\alpha_1=\alpha_1(0),\dots,\alpha_n=\alpha_n(0)$ не равен нулю. Обозначим этот определитель через $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Рассмотрим два многочлена из кольца многочленов от n^2 переменных $P\big[x_1^1,\dots,x_n^n\big]$:

$$F(x)=\prod_{i=1}^{n} f\big(x_1^i,\dots,x_n^i\big),\quad G(x)=\begin{vmatrix} x_1^1\dots x_n^1\\ \dots\dots\dots\\ x_1^n\dots x_n^n\end{vmatrix}.$$

Поскольку существует $\alpha=\big(\alpha_1^1,\dots,\alpha_n^n\big)\in P^{n^2}$ с условием $F(\alpha)\neq 0$, $G(\alpha)\neq 0$, для каждого умножения $\bar{s}_k=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^k s_i$, $k=1,\dots,n$, $\alpha_i^k\in P$, имеет место равенство $W^{(1)}_{\bar{s}_k,y^0}=W_1$.

Совокупность элементов $\{y_0\}$, для которых доказано последнее соотношение, образует открытое в топологии Зарисского подмножество Ω_L в пространстве L. Выбирая базис $e_1,\dots,e_d$ в L, содержащийся в Ω_L, получим $W^{(1)}_{\bar{s}_k,e_i}=W_1$, $i=1,\dots,d$. Следовательно, $W_{\bar{s}_k}=W_1$, $k=1,\dots,n$, где

$$W^{(1)}_{\bar{s}_k}=\{v\in V\mid \rho_{\bar{s}_k}(y)v=\lambda_{\bar{s}_k}(y)v,\ \lambda_{s_k}(y)\in P\ \forall y\in L\}.$$

Кроме того, как вытекает из приведенных рассуждений, $W_1=W^{(1)}_{s_0}$, где $W^{(1)}_{s_0}=\{v\in V\mid \rho_{s_0}(y)v=\lambda_{s_0}(y)v,\ \lambda_{s_0}(y)\in P\ \ \forall y\in L\}$, когда s_0 принадлежит открытому в топологии Зарисского множеству Ω_1 из S, определяемому многочленом f.

Переходим к доказательству п. 2 леммы 1.

Пусть $\bar{\rho}:S\times L\to \operatorname{End}_P(V/W_1)$ — фактор-представление в фактор-пространстве V/W_1. Обозначим

$$W_1(\bar{\rho})=\{\bar{v}\in\overline{V}=V/W_1\mid (\bar{\rho}_s(y))\bar{v}=0\ \forall s\in S,\ y\in L\}.$$

Тогда $W_1(\bar{\rho})=\bigcap\limits_{s\in S}W^{(1)}_s(\bar{\rho})$, где $W^{(1)}_s(\bar{\rho})=\{\bar{v}\in\overline{V}\mid(\bar{\rho}_s(y))\bar{v}=0,\ y\in L\}$ для некоторого фиксированного элемента $s\in S$. Применяя приведенные выше рассуждения к пространству $W_1(\bar{\rho})$, получим, что существует открытое в топологии Зарисского множество $\Omega_2\subset S$ такое, что $W_1(\bar{\rho})=W^{(1)}_{s_0}(\bar{\rho})$ для любого элемента $s_0\in\Omega_2$.

Обозначим $W^{(2)}_{s_0}=\{v\in V\mid(\rho_{s_0}(y))^2v=0,\ y\in L\}$ для некоторого фиксированного элемента $s_0\in S$. Пусть $v\in W^{(2)}_{s_0}$. Если $s_0\in\Omega_1$, то $W_1=W^{(1)}_{s_0}$. Тогда $(\rho_{s_0}(y))v\in W_1$. Следовательно, $(\bar{\rho}_{s_0}(y))\bar{v}=0$, т. е. $\bar{v}\in W^{(1)}_{s_0}(\bar{\rho})$, где $\bar{v}=v+W_1\in V/W_1$. Если $s_0\in\Omega_2$, то $W_1(\bar{\rho})=W^{(1)}_{s_0}(\bar{\rho})$, поэтому $\bar{v}\in W_1(\bar{\rho})$, т. е. $(\bar{\rho}_s(y))\bar{v}=\overline{0}$ для любого $s\in S$. Отсюда имеем $(\rho_s(y))^2v=0$ для любого $s\in S$. Итак, если $s_0\in\Omega_1\cap\Omega_2$, то $W_2=W^{(2)}_{s_0}$.

Через конечное число шагов получим, что

$$W=W_{s_0}=\{v\in V\mid \exists k\in\mathbb{N}\ \forall y\in L\ (\rho_{s_0}(y)^k v=0\}$$

для любого элемента s_0, принадлежащего некоторому открытому в топологии Зарисского множеству $\Omega\subset S$. Построение базиса в пространстве S с условиями, сформулированными в п. 2, осуществляется точно так же, как в п. 1. $\square$

Пусть $\rho:S\times L\to\operatorname{End}_P(V)$ — представление n-кратной алгебры Ли $L(S)$ в пространстве V. Обозначим через $L_\rho(S,x)$ алгебру Ли линейных преобразований, порожденную операторами $\rho_s(x)$, когда s пробегает все пространство S, а x — некоторый фиксированный элемент алгебры $L(S)$.

Теорема 1. *Пусть $\rho : S \times L \to \mathrm{End}_P(V)$ — представление конечномерной n-кратной разрешимой алгебры $L = L(S)$ в конечномерном пространстве V над алгебраически замкнутым полем P характеристики 0. Если алгебра Ли $L_\rho(S, x)$ разрешима для любого $x \in L$, то в пространстве V существует базис, в котором все операторы $\rho_s(x)$, $s \in S$, $x \in L$, одновременно приводятся к треугольному виду.*

Доказательство. Достаточно доказать существование общего собственного вектора у всех операторов $\rho_s(x)$, $s \in S$, $x \in L$. Переходя затем к фактор-представлению алгебры $L(S)$ в фактор-пространстве V/W, где W — пространство всех собственных векторов множества $\rho_S(L) = \{\rho_s(x) \mid \forall s \in S,\ x \in L\}$, через конечное число шагов получим утверждение теоремы.

Доказательство данного утверждения будем вести индукцией по размерности $L(S)$. Если $\dim L(S) = 1$, т. е. $L = \langle x \rangle$, то, используя условие теоремы о том, что алгебра $L_\rho(S, x)$ разрешима, выводим, что у всех операторов из множества $\rho_S(L) \subseteq L_\rho(S, x)$ имеется общий собственный вектор.

Поскольку $L \supsetneqq L^{(1)}$, причем $L^{(1)}$ — идеал в L, существует идеал K в L такой, что $\mathrm{codim}_L K = 1$. Тогда по предположению индукции у совокупности операторов $\rho_S(K) = \{\rho_s(y) \mid \forall s \in S,\ y \in K\}$ существует общий собственный вектор.

Обозначим

$$W = \{v \in V \mid \rho_s(y)v = \lambda_s(y)v\ \forall s \in S,\ y \in K,\ \lambda_s(y) \in P\} \neq 0.$$

Пусть $L = K \oplus Px$. Как вытекает из леммы 1, в пространстве S существует базис $s_1, \dots, s_n$ такой, что

$$W = W_{s_i} = \{v \in V \mid \rho_{s_i}(y)v = \lambda_{s_i}(y)v\ \forall y \in K, \lambda_{s_i}(y) \in P\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для любого вектора $w \in W$ и любого умножения s_i рассмотрим пространство

$$U_{w,s_i} = \langle w, \rho_{s_i}(x)w, \dots, \rho_{s_i}^{m_i - 1}(x)w \rangle,$$

где m_i — минимальная степень, для которой $\rho_{s_i}^{m_i}(x)w \in U_{w,s_i}$. Повторяя далее стандартные рассуждения, используемые при доказательстве классической формы теоремы Ли [3], получим $\rho_{s_i}(x s_i y)w = 0$, $y \in K$. Поэтому

$$\rho_{s_i}(y)\rho_{s_i}(x)w = \rho_{s_i}(x)\rho_{s_i}(y)w + \rho_{s_i}(y s_i x)w = \lambda_{s_i}(y)\rho_{s_i}(x)w$$

для любого $w \in W = W_{s_i}$, т. е. $\rho_{s_i}(x)W \subseteq W$, $i = 1, \dots, n$. Так как $s_1, \dots, s_n$ образуют базис пространства S, то $\rho_s(x)W \subseteq W$, $s \in S$.

В силу условий теоремы получаем, что в W имеется общий собственный вектор для всех операторов $\rho_s(x)$, $s \in S$. Поскольку этот вектор собственный для всех операторов $\rho_s(y)$, $s \in S$, $y \in K$, то он собственный для всех операторов $\rho_s(z)$, $s \in S$, $z \in L$. $\square$

В [4] аналогичное утверждение доказано для алгебр $L(S)$, удовлетворяющих условию $J(a, b, c, s_i, s_j) = 0$, $a, b, c \in L$, $s_i, s_j \in S$.

Приведем примеры, показывающие, что каждое из условий теоремы 1, рассматриваемое отдельно, недостаточно для утверждения этой теоремы.

1. Пусть L — трехмерное пространство над полем P с базисом e, f, g. Определим две операции умножения следующими формулами:

a) $es_1f = -fs_1e = g$, $es_1g = fs_1g = es_1e = fs_1f = gs_1g = 0$,

b) $fs_2g = -gs_2f = e$, $fs_2e = gs_2e = es_2e = fs_2f = gs_2g = 0$.

Легко проверить, что получается двукратная разрешимая алгебра Ли. Пусть $x = \alpha e + \beta f + \gamma g$, $\alpha, \beta, \gamma \in P$, $\beta \cdot \gamma \neq 0$. Обозначим $A = \operatorname{ad}_{s_1} x$, $B = \operatorname{ad}_{s_2} x$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что алгебра Ли $L_{\mathrm{ad}}(S, x)$ есть трехмерное векторное пространство с базисом A, B, C, формулы умножения в котором имеют вид $[A, B] = C$, $[A, C] = 2\beta\gamma A$, $[B, C] = -2\beta\gamma B$. Здесь в качестве представления ρ рассматривается отображение $\operatorname{ad} : S \times L \to \operatorname{End}_P(L)$ при $\operatorname{ad}(s, x) = \operatorname{ad}_s x$, где $\operatorname{ad}_s x$ — оператор левого умножения относительно операции s для элемента $x \in L$. Эти формулы показывают, что $L_{\mathrm{ad}}(S, x)$ — простая алгебра Ли.

Таким образом, из разрешимости n-кратной алгебры Ли не следует, вообще говоря, разрешимость каждой алгебры $L_{\mathrm{ad}}(S, x)$, $x \in L$, и тем более в L не существует базиса, в котором матрицы всех операторов $\operatorname{ad}_s y$, $s \in S$, $y \in L$, имеют треугольный вид.

2. Пусть L — двумерное пространство над P с базисом e, f. Превратим его в двукратную алгебру Ли, задав два следующих умножения:

(a) $es_1f = -fs_1e = f$, $es_1e = fs_1f = 0$,

(b) $es_2f = -fs_2e = e$, $es_2e = fs_2f = 0$.

Легко проверить, что L — простая двукратная алгебра Ли. С другой стороны, если $x = \alpha e + \beta f$, $\alpha, \beta \in P$, то

$$\operatorname{ad}_s x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \operatorname{ad}_{s_2} s = \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим $A = \operatorname{ad}_{s_1} x$, $B = \operatorname{ad}_{s_2} x$. Тогда $[A, B] = -\beta A - \alpha B$. Таким образом, $L_{\mathrm{ad}}(S, x) = \langle A, B \rangle_P$. Поскольку $L^{(1)}_{\mathrm{ad}}(S, x) = \langle -\beta A - \alpha B \rangle_P$, $L^{(2)}_{\mathrm{ad}}(S, x) = 0$, любая алгебра Ли $L_{\mathrm{ad}}(S, x)$ разрешима, в то время как исходная двукратная алгебра Ли проста.

Теорему 1 можно рассматривать как аналог теоремы Ли для n-кратных алгебр Ли. Заметим, что при $n = 1$ алгебра Ли $L_{\mathrm{ad}}(S, x)$ является одномерным пространством $\langle \operatorname{ad} x \rangle_P$, поэтому условие разрешимости алгебры Ли $L_{\mathrm{ad}}(S, x)$ тривиальным образом выполняется.

Теорема 2. *Конечномерная n-кратная алгебра Ли $L(S)$ над бесконечным полем P нильпотентна тогда и только тогда, когда нильпотентен каждый оператор $\operatorname{ad}_s x$, $s \in S$, $x \in L$.*

Для доказательства этой теоремы вначале докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\rho : S \times L \to \operatorname{End}_P(V)$ — представление конечномерной n-кратной алгебры Ли $L(S)$ в конечномерном пространстве V над бесконечным полем P. Если каждый оператор $\rho_s(x)$, $s \in S$, $x \in L$, нильпотентен, то существует ненулевой вектор $v \in V$ такой, что $\rho_s(x)v = 0$ $\forall x \in L$, $s \in S$.*

Доказательство. Для данного умножения s обозначим $W_s = \{v \in V \mid \rho_s(x)v = 0 \ \forall x \in L\}$. Так как каждый оператор $\rho_s(x)$, $x \in L$, нильпотентен, алгебра Ли $\rho_s(L)$, являющаяся образом алгебры Ли $L(s)$ ($L(s)$ — алгебра Ли относительно умножения s) при гомоморфизме ρ_s, удовлетворяет условиям теоремы Энгеля, стало быть, $W_s \neq 0$ (здесь ρ_s — ограничение отображения ρ на множестве $(s \times L)$). Пусть $W = \bigcap_{s \in S} W_s$. Так как функция $\lambda_s(x)$ в данном случае нулевая, следуя рассуждениям леммы 1, можно представить пространство W как множество решений соответствующей однородной системы уравнений. Поэтому, применяя лемму 1, получим, что существует базис $s_1, \dots, s_n$ пространства

S, для которого $W = W_{s_i}$, $i = 1, \dots, n$. В частности, $W \neq 0$, т. е. существует $v \in V$ такой, что $\rho_s(x)v = 0$ $\forall s \in S$, $x \in L$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Применяя теорему 3 к представлению $\mathrm{ad} : S \times L \to \mathrm{End}_P(L)$, когда $\mathrm{ad}(s, x) = \mathrm{ad}_s x$, получим, что $\mathrm{Ann}\, L = \{x \in L \mid xsy = 0\ \forall y \in L,\ s \in S\} \neq 0$. Легко проверить, что $\mathrm{Ann}\, L$ является идеалом в L. Из нильпотентности оператора $\mathrm{ad}_s x$, $s \in S$, $x \in L$, следует нильпотентность оператора $\mathrm{ad}_s \bar{x}$, где $\bar{x} = x + \mathrm{Ann}\, L \in \overline{L} = L/\mathrm{Ann}\, L$. Так как $\dim \overline{L} < \dim L$, по предположению индукции алгебра $\overline{L}$ нильпотентна, т. е. $\overline{L}^m = 0$ для некоторого натурального m. Значит, $L^m \subset \mathrm{Ann}\, L$, т. е. $L^{m+1} = 0$. $\square$

Теорему 2 можно считать аналогом теоремы Энгеля для n-кратных алгебр Ли. Заметим, что если ограничиться условиями нильпотентности операторов $\mathrm{ad}_{s_i} x$, $i = 1, \dots, n$, $x \in L$, и некоторого базиса $s_1, \dots, s_n$ пространства умножений S, то утверждение теоремы становится несправедливым. Приведем соответствующий пример.

Пусть $L = \langle e, f, g \rangle_P$ — трехмерная трехкратная алгебра Ли, три базисных умножения s_i, $i = 1, 2, 3$, которой определяются формулами

a) $es_1f = -fs_1e = g$, $es_1g = fs_1g = es_1e = fs_1f = gs_1g = 0$,

b) $fs_2g = -gs_2f = e$, $fs_2e = gs_2e = e_2e = fs_2f = gs_2g = 0$,

c) $es_3g = -gs_3e = f$, $es_3f = gs_3f = es_3e = fs_3f = gs_3g = 0$.

Легко видеть, что относительно каждого умножения s_i соответствующая алгебра $L(s_i)$ нильпотентна. В частности, каждый оператор $\mathrm{ad}_{s_i} x$ нильпотентен. В то же время трехкратная алгебра Ли $L(S)$, $S = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle$ проста. Действительно, если I — ненулевой идеал в L, а $0 \neq x \in I$, $x = \alpha e + \beta f + \gamma g$, $\alpha, \beta, \gamma \in P$, то $xs_1e = \beta g$. Если $\beta \neq 0$, то $g \in I$. Тогда $fs_2g = e \in I$, $es_3g = f \in I$, т. е. $I = L$. Если $\beta = 0$, то $xs_3g = \alpha f \in I$. В случае, когда $\alpha \neq 0$, имеем $f \in I$, $es_1f = g \in I$, $fs_2g = e \in I$, т. е. $I = L$. Оставшийся случай $x = \gamma g \in I$ уже рассмотрен выше.

Так же, как для обычных алгебр Ли, нильпотентную подалгебру H n-кратной алгебры Ли $L = L(S)$ назовем *картановской*, если она совпадает со своим нормализатором $N_L(H) = \{x \in L \mid xsh \in H\ \forall s \in S,\ h \in H\}$.

Теорема 4. *Нильпотентная подалгебра H в n-кратной алгебре Ли $L(S)$ над бесконечным полем P картановская тогда и только тогда, когда*

$$H = L_0(H) = \bigl\{x \in L \mid \forall s \in S\, \forall h \in H\, \exists n \in \mathbb{N}\ \bigl(\mathrm{ad}_s^n h\bigr)x = 0\bigr\}.$$

Доказательство. Обозначим

$$L_0^{(s)}(H) = \bigl\{x \in L \mid \forall h \in H\, \exists n \in \mathbb{N}\ \bigl(\mathrm{ad}_s^n h\bigr)x = 0\bigr\}$$

для некоторого фиксированного $s \in S$. Это множество является нулькомпонентой подалгебры $H(s)$ в алгебре Ли $L(s)$ ($L(s)$ — алгебра Ли с единственной операцией s). Рассмотрим $L_0(H) = \bigcap_{s \in S} L_0^{(s)}(H)$. Замечая, как в теореме 3, что функция $\lambda_s(x)$ в данном случае нулевая, можно, следуя рассуждения леммы 1, представить $L_0(H)$ как множество решений соответствующей однородной системы уравнений. Поэтому, применяя лемму 1, получим, что существует открытое в топологии Зарисского множество $\Omega \subset S$ такое, что $L_0(H) = L_0^{(s)}(H)$ для любого $s \in \Omega$. Тогда соотношение (2) выполняется для любого $s \in \Omega$ и любых $a, b, c \in L_0(H)$. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен из $P[x_1, \ldots, x_n]$, определяющий множество Ω. Рассмотрим, как в лемме 1, два многочлена от n^2 переменных из $P\bigl[x_1^1, \ldots, x_n^n\bigr]$ вида

$$H\bigl(x_1^1, \ldots, x_n^n\bigr) = \prod_{i=1}^{n} F\bigl(x_1^i, \ldots, x_n^i\bigr), \quad G\bigl(x_1^1, \ldots, x_n^n\bigr) = \begin{vmatrix} x_1^1 \ldots x_n^1 \\ \ldots\ldots \\ x_1^n \ldots x_n^n \end{vmatrix}.$$

Поскольку существует набор $\beta = \bigl(\beta_1^1, \ldots, \beta_n^n\bigr) \in P^{n^2}$ с условиями $H(\beta) \neq 0$, $G(\beta) \neq 0$, набор умножений $\bar{s}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^k s_i$, $k = 1, \ldots, n$, является базисом пространства S, содержащимся в Ω. Следовательно, $L_0(H)$ является n-кратной подалгеброй в $L(S)$.

Рассмотрим продолжение представления $\mathrm{ad} : S \times L \to \mathrm{End}_P(L)$ до фактор-представления $\overline{\mathrm{ad}} : S \times H \to \mathrm{End}_P(L_0(H)/H)$, действующего в фактор-пространстве $L_0(H)/H$. Применяя теорему 3 к этому представлению, немедленно получаем, что $L_0(H) = H$ тогда и только тогда, когда $H = N_L(H)$. $\square$

Определение 3. Пара $(s_0, x_0) \in S \times L$ называется *регулярной*, если размерность ее нулькомпоненты $L_0^{(s_0)}(x_0) = \bigl\{y \in L \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \bigl(\mathrm{ad}_{s_0}^n x_0\bigr)y = 0\bigr\}$ минимальна.

Теорема 5. *Для любой n-кратной алгебры Ли $L = L(S)$ над бесконечным полем P существует регулярная пара $(\hat{s}, x_0) \in S \times L$, нулькомпонента которой является картановской подалгеброй.*

Доказательство. Так как x_0 является регулярным элементом в алгебре $L(s_0)$ в смысле стандартного определения регулярного элемента в обычной алгебре Ли (см., например, [5]), $L_0^{(s_0)}(x_0) = \bigl\{y \in L(s_0) \mid \exists m \in \mathbb{N}\ \mathrm{ad}_{s_0}^m(x_0)y = 0\bigr\}$ является картановской подалгеброй в $L(s_0)$ [5]. Обозначим $H = L_0^{(s_0)}(x_0)$. Тогда $L_0^{(s_0)}(H) = H$, где

$$L_0^{(s_0)}(H) = \bigl\{y \in L(s_0) \mid \forall h \in H\ \exists m \in \mathbb{N}\ \mathrm{ad}_{s_0}^m(h)y = 0\bigr\}.$$

Условия, определяющие пространство $L_0^{(s_0)}(x_0)$, задают систему линейных уравнений относительно $\{y_i\}$ — координат вектора y в некотором базисе алгебры $L(s_0)$. Пусть r — ранг этой системы, а $\Delta\bigl(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0, x_1^0, \ldots, x_m^0\bigr)$, $m = \dim L$, — не равный нулю определитель порядка r, где $\bigl\{\alpha_i^0\bigr\}$ — координаты умножения s_0, $\bigl\{x_i^0\bigr\}$ — координаты точки x_0. Рассматривая этот определитель как многочлен относительно $\bigl\{\alpha_i^0\bigr\}$, получим, что существует открытое в топологии Зарисского подмножество $\Omega_1 \subset S$, для каждого элемента s которого $\dim L_0^{(s)}(x_0) = m - r = \dim L_0^{(s_0)}(x_0)$, т. е. $L_0^{(s)}(x_0)$ — картановская подалгебра относительно умножения s. Обозначим $H_s = L_0^{(s)}(x_0)$. Тогда $L_0^{(s)}(H_s) = H_s$, если $s \in \Omega_1$.

Рассмотрим $L_0(H_{\hat{s}}) = \bigcap\limits_{s \in S} L_0^{(s)}(H_{\hat{s}})$ для некоторого $\hat{s} \in \Omega_1$. Из доказательства леммы 1 следует, что существует открытое в топологии Зарисского множество $\Omega \subset S$ такое, что $L_0(H_{\hat{s}}) = L_0^{(s)}(H_{\hat{s}})$ для любого $s \in \Omega$. Если $\hat{s} \in \Omega_2 = \Omega_1 \cap \Omega$, то $L_0(H_{\hat{s}}) = L_0^{(\hat{s})}(H_{\hat{s}}) = H_{\hat{s}}$. Используя соответствующее рассуждение из теоремы 4, получим, что $L_0(H_{\hat{s}})$, а следовательно, и $H_{\hat{s}}$ являются n-кратными подалгебрами в $L(S)$.

Кроме того, из равенства $H_{\hat{s}} = L_0(H_{\hat{s}})$ вытекает нильпотентность любого оператора $(\mathrm{ad}_s h)|_{H_{\hat{s}}}$, $s \in S$, $h \in H_{\hat{s}}$. Поэтому в силу теоремы 2 $H_{\hat{s}}$ — нильпотентная n-кратная алгебра Ли. Наконец, применяя теорему 4, получим, что $H_{\hat{s}}$ — картановская подалгебра. Так как $H_{\hat{s}} = L_0^{(\hat{s})}(x_0)$, причем размерность нулькомпоненты $L_0^{(\hat{s})}(x_0)$ минимальна, $(\hat{s}, x_0)$ — регулярная пара. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корешков Н. А.* О нильпотентности n-кратных алгебр Ли и ассоциативных n-кратных алгебр // Изв. вузов. Математика. 2010. № 2. С. 33–38.
2. *Доценко В. В., Хорошкин А. С.* Формула характера операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды // Функцион. анализ и его прил. 2007. Т. 41, № 1. С. 1–22.
3. *Хамфрис Дж.* Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003.
4. *Корешков Н. А.* О триангулизации n-кратных разрешимых алгебр Ли // Изв. вузов. Математика. 2012. № 2. С. 65–69.
5. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.

Статья поступила 12 апреля 2012 г., окончательный вариант — 21 января 2013 г.

Корешков Николай Александрович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
кафедра алгебры и математической логики,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Nikolai.Koreshkov@ksu.ru