*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2013. Том 54, № 4*

*УДК 517.983+517.5*

# ДОСТАТОЧНЫЕ МНОЖЕСТВА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

**А. В. Абанин, В. А. Варзиев**

**Аннотация.** Изучаются достаточные множества в пространствах Фреше целых функций с равномерными весовыми оценками. Получены общие результаты об априорной переполненности таких множеств и введено понятие их минимальности. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых данная последовательность точек комплексной плоскости является минимальным достаточным множеством для весового пространства Фреше. Даны приложения к вопросам представления рядами экспонент голоморфных в выпуклой области функций заданного роста вблизи границы области.

**Ключевые слова:** достаточное множество, пространство Фреше, целая функция.

## Введение

Достаточные множества для весовых пространств целых функций, введенные Эренпрайсом [1, с. 3, 4, 13], определяются следующим образом. По непрерывной вещественнозначной функции $\varphi$ на $\mathbb{C}$ (весу) образуем банахово пространство

$$E(\varphi) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_\varphi := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi(z)}} < \infty \right\},$$

где $H(\mathbb{C})$ — пространство всех целых в $\mathbb{C}$ функций. Каждое семейство $\Phi$ весов порождает отделимое локально выпуклое пространство $E(\Phi) := \bigcap\limits_{\varphi\in\Phi} E(\varphi)$ с топологией $\tau_\Phi$, задаваемой набором норм $\{\|\cdot\|_\varphi : \varphi \in \Phi\}$.

Для произвольного подмножества $S \subset \mathbb{C}$ рассмотрим в $E(\Phi)$ другую, вообще говоря, более слабую, локально выпуклую топологию $\tau_{\Phi,S}$, задаваемую набором преднорм

$$\|f\|_{\varphi,S} := \sup_{z\in S} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi(z)}} < \infty, \quad f \in E(\Phi),\ \varphi \in \Phi.$$

В случае, когда $\tau_{\Phi,S}$ совпадает с $\tau_\Phi$, множество $S$ называется *достаточным* для $E(\Phi)$. К настоящему времени практически все содержательные результаты о достаточных множествах получены в случае, когда $\Phi$ является счетно определимым семейством (понятие таких семейств напомним чуть ниже). При

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашения 14.A18.21.0356 «Теория функциональных пространств, операторов и уравнений в них» и 8210 «Синтетические методы изучения операторов и уравнений в функциональных пространствах») и грантом ЮФУ.

этом более удобными для исследования и интересными с точки зрения приложений оказались так называемые слабо достаточные множества, введенные Д. М. Шнейдером [2]. Остановимся на этом подробнее.

Говорят, что вес $\varphi$ *подчинен* весу $\psi$ ($\varphi \prec \psi$), если существует число $C$ такое, что $\varphi(z) \le \psi(z)+C$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Пусть дана некоторая направленная вправо по подчинению весовая последовательность $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$ (т. е. $\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \dots$). Будем называть такие последовательности *индуктивными*. Естественно образовать линейное пространство $I(\Phi) := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(\varphi_n)$ и наделить его топологией $\mu_\Phi$ внутреннего индуктивного предела последовательности банаховых пространств $E(\varphi_n)$. Для подмножества $S \subset \mathbb{C}$ рассмотрим в $I(\Phi)$ еще одну локально выпуклую топологию $\mu_{\Phi,S}$ внутреннего индуктивного предела полунормированных пространств

$$I(\varphi_n, S) := \{f \in I(\Phi) : \|f\|_{\varphi,S} < \infty\}.$$

Множество $S$ называют *слабо достаточным* для $I(\Phi)$, если $\mu_{\Phi,S}$ совпадает с $\mu_\Phi$. На индуктивную последовательность $\Phi$ натянем семейство весов

$$V(\Phi) := \{v \text{ — вес} : \varphi_n \prec v\}.$$

Тогда, как известно [3] (см. также [4, 5]), $E(V(\Phi)) = I(\Phi)$ и всякое достаточное для пространства $I(\Phi)$, рассматриваемого как $E(V(\Phi))$, множество является для него слабо достаточным, и наоборот.

В соответствии с [2, определение 2.5] семейство $V$ весов называется *счетно определимым* (countably determined), если имеется такая индуктивная весовая последовательность $\Phi$, что $V = V(\Phi)$. Из вышеизложенного следует, что в случае счетно определимых семейств $V$ классы достаточных и слабо достаточных множеств совпадают независимо от выбора индуктивной последовательности $\Phi$ с $V(\Phi) = V$. В связи с этим практически все последующие исследования посвящены слабо достаточным множествам в пространствах вида $I(\Phi)$. Так, в [5, 6] при условии надлежащей реализации сопряженных пространств была установлена непосредственная связь между слабо достаточными множествами и представлением функций рядами обобщенных экспонент. Ю. Ф. Коробейник, В. В. Напалков и многие другие авторы (см., например, [7, 8]), отправляясь от фундаментальных работ А. Ф. Леонтьева, изучали (слабо) достаточные множества минимального типа для пространств целых функций с заданной оценкой индикатора. В [9–14] проведено систематическое исследование слабо достаточных множеств с общих позиций, установлено совпадение классов слабо достаточных и эффективных по Ийеру множеств, дано полное геометрическое описание всех и минимальных слабо достаточных множеств в пространствах целых функций с заданной оценкой индикатора, разработаны приложения слабо достаточных множеств к задаче о разрешимости уравнений типа свертки и другим вопросам.

Между тем имеется двойственный случай проективно счетно определимых семейств. Речь в нем идет о весовых последовательностях $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$, направленных по убыванию влево: $\dots \prec \varphi_2 \prec \varphi_1$, которые называют *проективными*. В данной ситуации $E(\Phi) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E(\varphi_n)$, и мы будем использовать для пространства $E(\Phi)$ специальное обозначение $P(\Phi)$, подчеркивая его проективную суть. Формально этот случай представляется более простым, чем индуктивный. Однако вплоть до настоящего времени никаких сколь-нибудь общих нетривиальных результатов о достаточных множествах для пространств проективного типа не было. При этом они представляют никак не меньший интерес, чем (слабо) достаточные множества для пространств индуктивного типа. Например, так же, как и для слабо достаточных множеств, при наличии определенной двойственности между функциональными пространствами имеется непосредственная связь между достаточными для $P(\Phi)$ множествами, с одной стороны, и представлением функций рядами обобщенных экспонент или разрешимостью уравнений типа свертки — с другой. Такое положение дел с данным направлением объясняется прежде всего отсутствием адекватных методов исследования достаточных множеств в пространствах Фреше и операторов представления и свертки в индуктивных пределах. Необходимая для изучения перечисленных вопросов техника предложена недавно для конкретного пространства голоморфных в области функций полиномиального роста вблизи границы и сопряженного с ним (см. [15–17]). В частности, из результатов статьи [16] следует существование минимальных достаточных множеств для пространства, сопряженного с пространством голоморфных в области функций полиномиального роста вблизи границы.

В настоящей работе проводится систематическое исследование достаточных множеств в весовых пространствах Фреше $P(\Phi)$. Сначала устанавливается, что инвариантность $P(\Phi)$ относительно умножения на независимую переменную влечет заведомую переполненность достаточных для $P(\Phi)$ множеств — из них можно отбрасывать любое конечное число точек, не нарушив свойство быть достаточным. С учетом этого обстоятельства вводится понятие минимального для $P(\Phi)$ множества как последовательности нулей целой функции наименьшего возможного роста, при котором эта последовательность теоретически может составлять достаточное для $P(\Phi)$ множество. Основной результат работы — теорема 1 — содержит условия на целую функцию, при которых последовательность ее нулей $\Lambda$ является достаточной для $P(\Phi)$. Она установлена при дополнительных предположениях о наличии свойств правильности $\Phi$ и согласованности $\Phi$ с $\Lambda$, для которых мы приводим легко проверяемые достаточные условия выполнения. В заключение полученные результаты применяются к весовым пространствам целых функций, представляющим собой аналитическую реализацию сопряженных к пространствам голоморфных в области функций заданного роста.

Отметим, что часть начальных результатов статьи (критерий достаточности, аналог предложения 2) верны и в многомерной ситуации. Однако все, что касается минимальных достаточных множеств, установлено для случая комплексной плоскости. Поэтому мы на протяжении всей статьи ограничились изложением одномерной ситуации.

## § 1. Достаточные множества. Общие результаты

Всюду в дальнейшем $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ — проективная весовая последовательность на $\mathbb{C}$. Из определения достаточного множества непосредственно вытекает

**Предложение 1.** *Множество $S \subset \mathbb{C}$ достаточно для $P(\Phi)$ тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} \le C \sup_{z\in S} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_m(z)}} \quad \text{для всех } f \in P(\Phi).$$

Поскольку $\|\cdot\|_{\varphi_n}$ — нормы на $P(\Phi)$, из предложения 1 вытекает, что всякое достаточное для $P(\Phi)$ множество является для него множеством единственности. Напомним, что множество $S \subset \mathbb{C}$ называется *множеством единственности* для класса $E$ целых в $\mathbb{C}$ функций, если из того, что $f \in E$ обращается в нуль на $S$, следует, что $f \equiv 0$.

Ясно, что свойство множества быть достаточным сохраняется при добавлении в него любого числа новых точек. Наша ближайшая цель — доказать, что, за редким исключением, это свойство не теряется и при удалении любого конечного числа точек. Другими словами, достаточные множества для $P(\Phi)$, как правило, переполнены. Для доказательства результатов нам потребуются некоторые дополнительные сведения о мультипликаторах пространства $P(\Phi)$ из [18].

Обозначим через $M(\Phi)$ семейство всех мультипликаторов пространства $P(\Phi)$, т. е. тех целых функций $\mu$, для которых $\mu \cdot f \in P(\Phi)$ при всех $f \in P(\Phi)$. Каждый мультипликатор $\mu \in M(\Phi)$ порождает оператор умножения $M_\mu : f \mapsto \mu \cdot f$, который линейно и непрерывно действует из $P(\Phi)$ в $P(\Phi)$. При этом для любого нетривиального мультипликатора (т. е. отличного от тождественного нуля) этот оператор инъективен. Ясно, что в $M(\Phi)$ входят все постоянные. Более того, $M(\Phi)$ содержит в себе семейство

$$\widetilde{M}(\Phi) := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} E(\varphi_m - \varphi_n), \tag{1}$$

причем для определенных в [18] канонических весовых последовательностей имеет место равенство $M(\Phi) = \widetilde{M}(\Phi)$ (см. [18, теорема 5.1]).

Далее, назовем нетривиальный мультипликатор $\mu \in M(\Phi)$ *регулярным*, если $\mu \cdot P(\Phi)$ — замкнутое подпространство в $P(\Phi)$. Для регулярного мультипликатора $\mu \in M(\Phi)$ оператор умножения $M_\mu$ является взаимно однозначным линейным непрерывным оператором из пространства Фреше $P(\Phi)$ на пространство Фреше $\mu \cdot P(\Phi)$. Отсюда стандартным образом получаем критерий регулярности мультипликатора.

**Предложение 2.** *Мультипликатор $\mu \in M(\Phi)$ регулярен тогда и только тогда, когда*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists C > 0\ \forall f \in P(\Phi) \quad \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} \le C \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\mu(z) f(z)|}{e^{\varphi_m(z)}}.$$

Важный подкласс регулярных мультипликаторов составляют делители. Напомним, что нетривиальный мультипликатор $\mu$ из $M(\Phi)$ называется *делителем* $P(\Phi)$, если справедлива импликация (ее называют *теоремой деления*):

$$f \in P(\Phi),\ \frac{f}{\mu} \in H(\mathbb{C}) \Longrightarrow \frac{f}{\mu} \in P(\Phi).$$

То, что всякий делитель пространства $P(\Phi)$ является его регулярным мультипликатором, следует из того, что топология $P(\Phi)$ мажорирует топологию равномерной сходимости на компактах, индуцированную в него из $H(\mathbb{C})$ (см. [19, следствие из предложения 1]). Ясно, что отличные от нуля постоянные являются делителями любого линейного пространства $E$ целых функций и, в частности, $P(\Phi)$. Далее, практически все весовые пространства $E$, встречающиеся в приложениях, инвариантны относительно умножения на независимую переменную, т. е. $\mu(z) \equiv z$ — мультипликатор $E$. Для таких пространств, очевидно, и любой полином является их мультипликатором. Простейшим достаточным условием инвариантности $P(\Phi)$ относительно умножения на независимую переменную является условие разделенности последовательности $\Phi$ логарифмом:

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists C > 0 \quad \varphi_n(z) + \log(1+|z|) \le \varphi_m(z) + C \quad (z \in \mathbb{C}), \qquad (2)$$

поскольку при его выполнении $\mu(z) \equiv z \in \widetilde{M}(\Phi)$. Из леммы 2.3 в [20] следует

**Предложение 3.** *Пусть пространство $P(\Phi)$ инвариантно относительно умножения на независимую переменную. Тогда любой отличный от тождественного нуля полином является делителем $P(\Phi)$.*

Теперь мы готовы вернуться к вопросу о прореживании достаточных множеств.

**Предложение 4.** *Пусть $S$ — достаточное множество для $P(\Phi)$, $\mu$ — регулярный мультипликатор $P(\Phi)$ из $\widetilde{M}(\Phi)$ и $Z$ — совокупность его нулей. Тогда $S \setminus Z$ также будет достаточным для $P(\Phi)$ множеством.*

Доказательство. Возьмем произвольное $n \in \mathbb{N}$. Так как мультипликатор $\mu$ регулярен, по предложению 2 для этого $n$ найдутся такие $m \in \mathbb{N}$ и $C_1 > 0$, что

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} \le C_1 \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)f(z)|}{e^{\varphi_m(z)}} \quad \text{для всех } f \in P(\Phi).$$

Поскольку $S$ достаточно для $P(\Phi)$, по предложению 1 имеются $l \in \mathbb{N}$ и $C_2 > 0$ такие, что

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_m(z)}} \le C_2 \sup_{z\in S} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_l(z)}} \quad \text{для всех } f \in P(\Phi).$$

Из предыдущих двух неравенств и обращения $\mu$ в нуль на $Z$ следует, что для любой функции $f \in P(\Phi)$

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} \le C_1C_2 \sup_{z\in S} \frac{|\mu(z)f(z)|}{e^{\varphi_l(z)}} = C_1C_2 \sup_{z\in S\setminus Z} \frac{|\mu(z)f(z)|}{e^{\varphi_l(z)}}.$$

Далее, так как $\mu$ принадлежит $\widetilde{M}(\Phi)$, найдется $j \in \mathbb{N}$, при котором $\|\mu\|_{\varphi_l-\varphi_j} < \infty$. Поэтому, продолжив оценку, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} \le C_1C_2\|\mu\|_{\varphi_l-\varphi_j} \sup_{z\in S\setminus Z} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_j(z)}} \quad \text{для всех } f \in P(\Phi).$$

Еще раз использовав предложение 1, заключаем отсюда, что множество $S \setminus Z$ является достаточным множеством для пространства $P(\Phi)$. □

**Следствие.** *Пусть последовательность $\Phi$ удовлетворяет условию (2). Тогда из любого достаточного для $P(\Phi)$ множества можно отбросить любое конечное число точек, не нарушив его свойства быть достаточным для $P(\Phi)$.*

Доказательство. Поскольку последовательность весов $\Phi$ удовлетворяет условию (2), $P(\Phi)$ инвариантно относительно умножения на независимую переменную и полиномы содержатся в семействе $\widetilde{M}(\Phi)$. Кроме того, по предложению 3 всякий отличный от тождественного нуля полином является регулярным мультипликатором $P(\Phi)$.

Пусть множество $S$ достаточно для $P(\Phi)$. Рассмотрим полином $P(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - s_k)$, имеющий нули в произвольных $n$ точках $s_1, \dots, s_n$ из $S$. Взяв в качестве регулярного мультипликатора $P(\Phi)$ этот полином $P$ и применив предложение 4, получим, что $S \setminus (s_k)_{k=1}^n$ достаточно для $P(\Phi)$. □

## § 2. Минимальные достаточные множества

Наибольший интерес для приложений представляют минимальные достаточные множества, т. е. насколько возможно более редкие последовательности $\Lambda$ с единственной предельной точкой в бесконечности. Из результатов § 1 вытекает, что они не могут быть минимальными в обычном смысле слова, т. е. такими, что они перестают быть достаточными для $P(\Phi)$ после удаления хотя бы одной своей точки. В связи с этим понятие минимальности традиционно связывают с ростом целых функций, обращающихся на $\Lambda$ в нуль.

Чтобы ввести адекватно понятие минимальных достаточных множеств, напомним, что всякое достаточное для $P(\Phi)$ множество является для этого пространства множеством единственности. Отсюда следует, что если последовательность $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ — достаточное для $P(\Phi)$ множество и $L$ — целая функция с нулями в точках $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$, то $L$ не может принадлежать $P(\Phi)$ и, значит, существуют номер $n \in \mathbb{N}$ и последовательность $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ точек в $\mathbb{C}$, $|z_m| \to \infty$, такие, что $|L(z_m)| \geq m \exp \varphi_n(z_m)$, $m = 1, 2, \dots$. Поэтому естественно в качестве претендентов на минимальные достаточные для $P(\Phi)$ множества брать последовательности нулей, отличных от тождественного нуля целых функций $L$ минимально возможного роста, для которых имеет место последнее условие. Этот подход к определению минимальных достаточных множеств основан на исследованиях А. Ф. Леонтьева по двойственной задаче представления функций, аналитических в области, рядами экспонент. Он был развит в [13, гл. 2] (см. также [21]) для весовых пространств целых функций индуктивного типа. Цель настоящего параграфа — разработать аналогичный [13] подход для пространств $P(\Phi)$ проективного типа.

Рассмотрим следующее, близкое к $P(\Phi)$, пространство целых функций

$$\widehat{P}(\Phi) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} E(2\varphi_n - \varphi_m).$$

Заметим, что всегда $P(\Phi) \subset \widehat{P}(\Phi)$.

Определение. Для последовательности $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ точек комплексной плоскости через $\mathscr{L}(\Phi; \lambda)$ обозначим семейство всех нетривиальных целых функций из $\widehat{P}(\Phi)$, для которых все $\lambda_k$ являются простыми нулями. Последовательность $\Lambda$ называется *минимальной* для $P(\Phi)$, если класс $\mathscr{L}(\Phi; \lambda)$ непуст.

Основной вопрос, который нам предстоит изучить, — выяснить условия, при которых минимальная для $P(\Phi)$ последовательность $\Lambda$ составляет для этого пространства достаточное множество.

Начиная с работ А. Ф. Леонтьева (см., например, [22]), одним из основных инструментов в задачах представления функций рядами экспонент и их обобщений являются специальные разложения целых функций в ряды Лагранжа. В [13] разработана модификация этого метода, позволяющая изучать минимальные слабо достаточные множества для пространств целых функций индуктивного типа. Ниже приводим подобную модификацию для проективного случая. Доказательство следующей леммы, основанное на использовании теории вычетов, стандартно, и мы его опускаем.

**Лемма 1.** *Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ — минимальная для $P(\Phi)$ последовательность и $L$ — какая-либо функция из $\mathscr{L}(\Phi; \Lambda)$. Обозначим через $\widetilde{\Lambda}$ последовательность всех нулей $L$. Предположим, что существует такой отличный от* *тождественного нуля мультипликатор $\mu_0$ из $M(\Phi)$, который обращается в нуль во всех точках $\widetilde{\Lambda}\setminus\Lambda$, причем с не меньшей, чем $L$, кратностью. Далее, допустим, что имеются номер $n \in \mathbb{N}$ и такие окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r_m\}$ с $r_m \uparrow +\infty$, что*

$$\left|\frac{\mu_0(z)}{L(z)}\right| \le \varepsilon_m e^{-\varphi_n(z)}, \quad |z| = r_m,\ m = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

*где $\varepsilon_m \downarrow 0$. Тогда для любой функции $f$ из $P(\Phi)$ справедливо представление*

$$\mu_0(\lambda)f(\lambda) = \lim_{m\to\infty} \sum_{|\lambda_k|<r_m} \frac{\mu_0(\lambda_k)f(\lambda_k)L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

*Если дополнительно известно, что существует номер $l$, для которого*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\mu_0(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)}\right| e^{\varphi_l(\lambda_k)} < \infty,$$

*то для любой функции $f$ из $P(\Phi)$ справедливо представление*

$$\mu_0(\lambda)f(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0(\lambda_k)f(\lambda_k)L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Замечание. Как правило, весовые последовательности $\Phi$ удовлетворяют дополнительному условию, состоящему в том, что для любого $l$

$$\varphi_l(z) - \varphi_{l+1}(z) \to +\infty \ \text{ при } |z| \to \infty. \tag{4}$$

В таком случае вместо (3) можно потребовать, чтобы выполнялось более простое условие

$$\left|\frac{\mu_0(z)}{L(z)}\right| \le e^{-\varphi_n(z)}, \quad |z| = r_m,\ m = 1, 2, \dots .$$

Выделим важный для приложений частный случай предыдущей леммы, который получается при $\mu_0(\lambda) \equiv 1$.

**Лемма 2.** *Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ — минимальная для $P(\Phi)$ последовательность и $L$ — какая-либо функция из $\mathscr{L}(\Phi; \Lambda)$. Предположим, что все ее нули $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ простые (других нулей у нее нет) и что существуют номер $n \in \mathbb{N}$, окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r_m\}$ с $r_m \uparrow +\infty$ и постоянные $C_m \uparrow +\infty$ такие, что*

$$|L(z)| \ge C_m e^{\varphi_n(z)}, \quad |z| = r_m,\ m = 1, 2, \dots; \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{L'(\lambda_k)}\right| e^{\varphi_n(\lambda_k)} < \infty.$$

*Тогда для любой функции $f$ из $P(\Phi)$ справедливо представление*

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(\lambda_k)L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

*В случае, когда выполнено условие (4), вместо (5) можно потребовать выполнение более либерального условия $|L(z)| \ge e^{\varphi_n(z)}$, $|z| = r_m$, $m = 1, 2, \dots$.*

Для применения лемм 1 и 2 к изучению достаточных для $P(\Phi)$ множеств нам потребуются некоторые дополнительные понятия.

Введем следующее множество последовательностей положительных чисел:

$$\Gamma(\Lambda,\Phi) := \left\{(\gamma_k)_{k=1}^{\infty} : \forall n\ \exists m\ \exists C>0\ \forall k\in\mathbb{N} \ln\frac{1}{\gamma_k} \le \varphi_n(\lambda_k)-\varphi_m(\lambda_k)+C\right\}.$$

Ясно, что если $\gamma_k = \alpha > 0$ $(k = 1,2,\dots)$, то $\gamma \in \Gamma(\Lambda,\Phi)$. Для $\gamma \in \Gamma(\Lambda,\Phi)$ положим

$$\mathscr{U}_\gamma := \bigcup_{k=1}^{\infty}\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda-\lambda_k|<\gamma_k\}.$$

Будем говорить, что $\Lambda$ и $\Phi$ *согласованы*, если имеется хотя бы одна последовательность $\gamma \in \Gamma(\Lambda,\Phi)$, для которой множество $\mathbb{C}\setminus\mathscr{U}_\gamma$ достаточно для $P(\Phi)$.

Назовем $\Phi$ *правильной*, если

$$\forall n\ \exists s\ \forall k\ \exists m\ \exists c>0 : \sup\{|\mu(\lambda)| : \mu\in B(\varphi_n-\varphi_m)\cap M(\Phi)\} \ge c e^{\varphi_s(\lambda)-\varphi_k(\lambda)},\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

Здесь $B(\varphi_n-\varphi_m)$ — единичный шар пространства $E(\varphi_n-\varphi_m)$.

Одним из основных результатов данной работы является следующая

**Теорема 1.** *Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ — минимальная для $P(\Phi)$ последовательность и $L$ — какая-либо функция из $\mathscr{L}(\Phi;\lambda)$. Обозначим через $\widetilde{\Lambda}$ последовательность всех нулей $L$. Предположим, что существует такой отличный от тождественного нуля регулярный мультипликатор $d$ пространства $P(\Phi)$, который обращается в нуль во всех точках $\widetilde{\Lambda}\setminus\Lambda$, причем с не меньшей, чем $L$, кратностью. Далее, допустим, что имеются номер $n_0\in\mathbb{N}$ и такие окружности $\{z\in\mathbb{C} : |z| = r_m\}$ с $r_m\uparrow+\infty$, что*

$$\left|\frac{d(z)}{L(z)}\right| \le \varepsilon_m e^{-\varphi_{n_0}(z)}, \quad |z| = r_m,\ m=1,2,\dots,$$

*где $\varepsilon_m\downarrow 0$, и*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{d(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)}\right| e^{\varphi_{n_0}(\lambda_k)} < \infty. \tag{6}$$

*Если последовательности $\Lambda$ и $\Phi$ согласованы и $\Phi$ правильна, то $\Lambda$ — достаточное множество для $P(\Phi)$.*

Доказательство. Зафиксируем $n\in\mathbb{N}$. Из того, что $d$ — регулярный мультипликатор, следует существование $n_1$ и $C_1>0$ таких, что

$$\|f\|_{\varphi_n} \le C_1\|df\|_{\varphi_{n_1}}, \quad f\in P(\Phi). \tag{7}$$

В силу согласованности $\Lambda$ и $\Phi$ имеется такая последовательность $\gamma = (\gamma_k)_{k=1}^{\infty}$ из $\Gamma(\Lambda,\Phi)$, для которой множество $\mathbb{C}\setminus\mathscr{U}_\gamma$ достаточно для $P(\Phi)$. Поэтому для уже выбранного $n_1$ имеются такие $n_2$ и $C_2$, что

$$\|f\|_{\varphi_{n_1}} \le C_2 \sup_{\lambda\notin\mathscr{U}_\gamma}\frac{|f(\lambda)|}{e^{\varphi_{n_2}(\lambda)}}, \quad f\in P(\Phi).$$

Взяв здесь вместо $f$ функцию $df$, получим

$$\|df\|_{\varphi_{n_1}} \le C_2 \sup_{\lambda\notin\mathscr{U}_\gamma}\frac{|d(\lambda)f(\lambda)|}{e^{\varphi_{n_2}(\lambda)}}, \quad f\in P(\Phi).$$

Объединив это с (7), имеем

$$\|f\|_{\varphi_n} \le C_1C_2 \sup_{\lambda\notin\mathscr{U}_\gamma}\frac{|d(\lambda)f(\lambda)|}{e^{\varphi_{n_2}(\lambda)}}, \quad f\in P(\Phi). \tag{8}$$

Для любых мультипликатора $\mu \in M(\Phi)$ и функции $f \in P(\Phi)$ будет $\mu f \in P(\Phi)$. По лемме 1 (с $d$ вместо $\mu_0$), примененной к $\mu f$ вместо $f$, справедливо представление

$$d(\lambda)\mu(\lambda)f(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(\lambda_k)\mu(\lambda_k)f(\lambda_k)L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Далее, так как $\gamma \in \Gamma(\lambda, \Phi)$, для номера $n_0$, фигурирующего в условии теоремы, существуют такие $l_1 \in \mathbb{N}$ и $D > 0$, что

$$\frac{1}{\gamma_k} \le De^{\varphi_{n_0}(\lambda_k)-\varphi_{l_1}(\lambda_k)}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

В силу правильности $\Phi$ для этого $l_1$ имеется такое $s_1$, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся $m \in \mathbb{N}$, $c > 0$ такие, что

$$\sup\{|\mu(\lambda)| : \mu \in B(\varphi_{l_1} - \varphi_m) \cap M(\Phi)\} \ge ce^{\varphi_{s_1}(\lambda)-\varphi_k(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Можно считать без ограничения общности, что $s_1 \ge n_2$. Так как $L \in \widehat{P}(\Phi)$, для $s_1$ имеются такие $k_1 \in \mathbb{N}$ и $B > 0$, что

$$|L(\lambda)| \le Be^{2\varphi_{s_1}(\lambda)-\varphi_{k_1}(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{12}$$

Взяв $k_1$, в соответствии с (11) находим $m \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ так, чтобы

$$\sup\{|\mu(\lambda)| : \mu \in B(\varphi_{l_1} - \varphi_m) \cap M(\Phi)\} \ge ce^{\varphi_{s_1}(\lambda)-\varphi_{k_1}(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

Отметим, что для $\mu \in B(\varphi_{l_1} - \varphi_m)$ имеет место неравенство

$$|\mu(\lambda)| \le e^{\varphi_{l_1}(\lambda)-\varphi_m(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{14}$$

Наконец, по определению $\mathscr{U}_\gamma$

$$|\lambda - \lambda_k| \ge \gamma_k, \quad k \in \mathbb{N}, \ \lambda \notin \mathscr{U}_\gamma. \tag{15}$$

Учитывая (10), (12), (14) и (15), для любого мультипликатора $\mu \in B(\varphi_{l_1} - \varphi_m)$ и произвольной функции $f \in P(\Phi)$ для всех $\lambda \notin \mathscr{U}_\gamma$ из представления (9) имеем

$$\begin{aligned}
|d(\lambda)\mu(\lambda)f(\lambda)| &\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|d(\lambda_k)||\mu(\lambda_k)||f(\lambda_k)||L(\lambda)|}{|L'(\lambda_k)||\lambda-\lambda_k|} \\
&\le |L(\lambda)| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|d(\lambda_k)|}{|L'(\lambda_k)|}\frac{1}{\gamma_k}|\mu(\lambda_k)||f(\lambda_k)| \\
&\le Be^{2\varphi_{s_1}(\lambda)-\varphi_{k_1}(\lambda)}D\|f\|_{\varphi_m,\Lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|d(\lambda_k)|}{|L'(\lambda_k)|} e^{\varphi_{n_0}(\lambda_k)-\varphi_{l_1}(\lambda_k)}e^{\varphi_{l_1}(\lambda_k)-\varphi_m(\lambda_k)}e^{\varphi_m(\lambda_k)} \\
&= C_0\|f\|_{\varphi_m,\Lambda}e^{2\varphi_{s_1}(\lambda)-\varphi_{k_1}(\lambda)},
\end{aligned}$$

где

$$C_0 := BD\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|d(\lambda_k)|}{|L'(\lambda_k)|} e^{\varphi_{n_0}(\lambda_k)}$$

— число (см. условие (6)), не зависящее ни от $f \in P(\Phi)$, ни от мультипликатора $\mu \in B(\varphi_{l_1} - \varphi_m)$, ни от $\lambda \notin \mathscr{U}_\gamma$. Запишем еще раз последнее неравенство, исключив промежуточные выкладки:

$$|d(\lambda)f(\lambda)||\mu(\lambda)| \le C_0\|f\|_{\varphi_m,\Lambda}e^{2\varphi_{s_1}(\lambda)-\varphi_{k_1}(\lambda)},$$

где $\lambda \notin \mathscr{U}_\gamma,\ \mu \in B(\varphi_{l_1} - \varphi_m) \cap M(\Phi),\ f \in P(\Phi)$ произвольны. Перейдем здесь к супремуму по $\mu \in B(\varphi_{l_1} - \varphi_m) \cap M(\Phi)$ при каждом фиксированном $\lambda \notin \mathscr{U}_\gamma$ и используем (13):

$$ce^{\varphi_{s_1}(\lambda)-\varphi_{k_1}(\lambda)}|d(\lambda)f(\lambda)| \le C_0\|f\|_{\varphi_m,\Lambda}e^{2\varphi_{s_1}(\lambda)-\varphi_{k_1}(\lambda)}.$$

Значит,

$$\sup_{\lambda\notin\mathscr{U}_\gamma}\frac{|d(\lambda)f(\lambda)|}{e^{\varphi_{s_1}(\lambda)}} \le \frac{C_0}{c}\|f\|_{\varphi_m,\Lambda}.$$

Отсюда с учетом того, что $s_1 \ge n_2$, и условия (8) следует существование такой постоянной $A > 0$, зависящей только от $s_1$ и $n_2$, что

$$\|f\|_n \le AC_1C_2\frac{C_0}{c}\|f\|_{\varphi_m,\lambda} \quad \forall f \in P(\Phi).$$

Остается применить предложение 1, чтобы завершить доказательство. $\square$

Из теоремы 1 вытекает такое полезное в приложениях

**Следствие.** *Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$ — последовательность простых нулей некоторой функции $L$ из $\mathscr{L}(\Phi;\Lambda)$. Предположим, что имеются номер $n_0 \in \mathbb{N}$ и такие окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r_m\}$ с $r_m \uparrow +\infty$, что*

$$|L(z)| \ge C_m e^{\varphi_{n_0}(z)}, \quad |z| = r_m,\ m = 1,2,\dots,$$

*где $C_m \uparrow +\infty$, и*

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{|L'(\lambda_k)|}e^{\varphi_{n_0}(\lambda_k)} < \infty.$$

*Тогда если $\Lambda$ и $\Phi$ согласованы и $\Phi$ правильна, то $\Lambda$ достаточно для $P(\Phi)$.*

## § 3. Согласованность и правильность

В данном параграфе приводятся удобные для использования достаточные условия согласованности $\Lambda$ и $\Phi$ и правильности $\Phi$. Сначала обратим внимание на то, что при проверке любых условий можно использовать вместо $\Phi$ любую эквивалентную ей весовую последовательность. Напомним в связи с этим понятие эквивалентных весовых последовательностей проективного типа.

Пусть $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$ и $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^\infty$ — две весовые последовательности проективного типа. Говорят, что $\Phi$ *подчинена* $\Psi$ ($\Phi \prec \Psi$), если

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists C_n > 0 \quad \varphi_m(z) \le \psi_n(z) + C_n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Последовательности $\Phi$ и $\Psi$ называются *эквивалентными* ($\Phi \sim \Psi$), если они подчинены друг другу. Нетрудно видеть, что если $\Phi \sim \Psi$, то они определяют одно и то же пространство, т. е. $P(\Phi) = P(\Psi)$ и множество $S$ достаточно для $P(\Phi)$ тогда и только тогда, когда оно достаточно для $P(\Psi)$.

Займемся выяснением удобных для проверки достаточных условий согласованности $\Lambda$ и $\Phi$.

Будем говорить, что функция $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *разделяет весовую последовательность* $\Phi$, если

$$\forall n\ \exists m\ \exists C > 0 \quad \varphi_m(z) + h(z) \le \varphi_n(z) + C \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Например, $h(z) \equiv c$ разделяет любую весовую последовательность.

Обозначим через $\Delta(\Phi)$ множество тех функций $\delta : \mathbb{C} \to (0,\infty)$, для которых $\ln(1/\delta(z))$ разделяет $\Phi$. Отметим простейшие свойства этого класса. Их доказательства элементарны, и мы их опускаем.

**Лемма 3.** *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если* $\delta_1, \delta_2 \in \Delta(\Phi)$, *то*

$$\delta_1\delta_2 \in \Delta(\Phi) \quad \text{и} \quad \delta(z) := \min(\delta_1(z), \delta_2(z)) \in \Delta(\Phi).$$

(2) *Если* $\delta_1 \in \Delta(\Phi)$ *и* $\delta_2(z) \geq c\delta_1(z)$ *при некотором* $c > 0$ *и всех* $z \in \mathbb{C}$, *то* $\delta_2 \in \Delta(\Phi)$.

Для непрерывной функции $\delta : \mathbb{C} \to (0, \infty)$ и веса $\varphi$ при каждом $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\varphi_{*,\delta}(z) := \min\{\varphi(z+\zeta) : |\zeta| \leq \delta(z)\}, \quad \varphi^{*,\delta}(z) := \max\{\varphi(z+\zeta) : |\zeta| \leq \delta(z)\}.$$

Из определения этих функций следует, что

$$\varphi_{*,\delta}(z) \leq \varphi(z+\zeta) \leq \varphi^{*,\delta}(z) \quad (|\zeta| \leq \delta(z),\ z \in \mathbb{C})$$

и, в частности, $\varphi_{*,\delta}(z) \leq \varphi(z) \leq \varphi^{*,\delta}(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$.

По произвольной весовой последовательности $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ образуем две новых последовательности $\Phi_{*,\delta} := ((\varphi_n)_{*,\delta})_{n=1}^{\infty}$ и $\Phi^{*,\delta} := ((\varphi_n)^{*,\delta})_{n=1}^{\infty}$. Из приведенных выше неравенств следует, что всегда $\Phi_{*,\delta} \prec \Phi \prec \Phi^{*,\delta}$. Будем говорить, что последовательность $\Phi$ *медленно меняется относительно функции* $\delta$, если $\Phi_{*,\delta} \sim \Phi^{*,\delta}$. Ясно, что в этом случае $\Phi_{*,\delta} \sim \Phi \sim \Phi^{*,\delta}$ и в соответствии с отмеченным в начале параграфа эти три весовых последовательности определяют одно и то же пространство $P(\Phi)$. Будем говорить, что проективная весовая последовательность $\Phi$ *медленно меняется*, если она медленно меняется относительно функции $\delta(z) \equiv 1$.

Доказательство следующей полезной леммы технического плана элементарно.

**Лемма 4.** *Пусть проективная весовая последовательность* $\Phi$ *медленно меняется относительно функции* $\delta \in \Delta(\Phi)$. *Тогда функция*

$$\delta^-(z) := \min\{\delta(z+\zeta) : |\zeta| \leq \delta(z)\} \quad (z \in \mathbb{C})$$

*также принадлежит* $\Delta(\Phi)$.

Сформулируем первый результат о свойстве согласованности.

**Предложение 5.** *Пусть* $\Phi$ — *проективная весовая последовательность,* $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность попарно различных комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности. Предположим, что имеется такая функция* $\delta \in \Delta(\Phi)$, *что* $\Phi$ *медленно меняется относительно нее и кружки* $U_k := \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_k| < \delta(\lambda_k)\}$ *попарно не пересекаются. Тогда* $\Lambda$ *и* $\Phi$ *согласованы.*

Доказательство. Положим $\mathscr{U} := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$. Так как функция $\delta$ принадлежит $\Delta(\Phi)$, последовательность $\gamma := (\delta(\lambda_k))_{k=1}^{\infty}$ входит в $\Gamma(\Lambda, \Phi)$. Поэтому осталось проверить, что множество $\mathbb{C} \setminus \mathscr{U}$ достаточно для $P(\Phi)$.

Так как $\Phi$ медленно меняется относительно $\delta$, для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и $C_n$ такие, что

$$\varphi_m(\zeta) \leq \varphi_n(z) \quad \forall z \in U_k,\ \zeta \in \partial U_k,\ k \in \mathbb{N}.$$

При этом можно считать, что $m \geq n$.

Отсюда с учетом того, что кружки $U_k$ попарно не пересекаются, и принципа максимума следует, что для любой целой функции $f$ верно неравенство

$$\sup_{z\in\mathscr{U}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} \le e^{C_n} \sup_{\zeta\notin\mathscr{U}} \frac{|f(\zeta)|}{e^{\varphi_m(\zeta)}}.$$

Поэтому

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} \le e^{C_n} \sup_{\zeta\notin\mathscr{U}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_m(z)}}.$$

Значит, по предложению 1 множество $\mathbb{C}\setminus\mathscr{U}$ достаточно для $P(\Phi)$. $\square$

Докажем следующее утверждение, в котором вместо требования о попарном непересечении кружков используется чаще встречаемое в приложениях условие сходимости ряда из радиусов кружков.

**Предложение 6.** *Пусть $\Phi$ — проективная весовая последовательность, $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность попарно различных комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности. Предположим, что имеется такая функция $\delta \in \Delta(\Phi)$, что $\Phi$ медленно меняется относительно нее и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta(\lambda_k) < \infty.$$

*Тогда $\Lambda$ и $\Phi$ согласованы.*

Доказательство. Обозначим $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta(\lambda_k) =: C$, положим $\gamma_k := \frac{\delta^-(\lambda_k)\delta(\lambda_k)}{2C}$ и рассмотрим кружки

$$U_k := \{z \in \mathbb{C} : |z-\lambda_k| < \gamma_k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Так как $\delta \in \Delta(\Phi)$, в силу леммы 4 $\delta^- \in \Delta(\Phi)$, а тогда по лемме 3 и функция $\delta^-\delta(\lambda_k)/(2C)$ принадлежит $\Delta(\Phi)$. Поэтому последовательность $\gamma := (\gamma_k)_{k=1}^{\infty}$ принадлежит $\Gamma(\Lambda,\Phi)$.

Поскольку сумма радиусов кружков $U_k$ конечна, в соответствии с результатами из [23] имеется последовательность непересекающихся кружков $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, содержащих все $U_k$, при этом радиус $r_j$ каждого из $K_j$ не превосходит суммы радиусов кружков $U_k$, попавших в него.

Пусть $N(j) := \{k \in \mathbb{N} : U_k \subset K_j\}$ и $k_j$ — номер того $k \in N(j)$, для которого $\delta^-(\lambda_k)$ максимально. Тогда

$$r_j \le \sum_{k\in N(j)} \frac{\delta^-(\lambda_k)\delta(\lambda_k)}{2C} \le \frac{\delta^-(\lambda_{k_j})}{2} \sum_{k\in N(j)} \frac{\delta(\lambda_k)}{C} \le \frac{\delta^-(\lambda_{k_j})}{2}.$$

Поэтому для любого $z \in K_j$ имеет место неравенство $|z-\lambda_{k_j}| < 2r_j \le \delta^-(\lambda_{k_j})$. Тогда в силу определения $\delta^-$ имеем

$$r_j \le \delta(z) \quad \forall z \in K_j.$$

Так как $\Phi$ медленно меняется относительно $\delta$, отсюда следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и $C_n$ такие, что

$$\varphi_m(\zeta) \le \varphi_n(z) \quad \forall z \in K_j,\ \zeta \in \partial K_j,\ j \in \mathbb{N}.$$

Повторяя далее дословно те же рассуждения, что и в доказательстве предложения 5, устанавливаем, что множество $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ достаточно для $P(\Phi)$. Тем более достаточным для $P(\Phi)$ будет более широкое множество $\mathbb{C} \setminus \mathscr{U}_\gamma$ и, значит, $\Lambda$ и $\Phi$ согласованы. $\square$

Представим удобные для проверки достаточные условия правильности $\Phi$.

Большинство пространств проективного типа $P(\Phi)$, встречающиеся в приложениях, задаются весовыми последовательностями вида $(\varphi - p_n\omega)_{n=1}^{\infty}$, где $\varphi$ и $\omega$ — некоторые фиксированные веса, причем $\omega$ положителен, и $0 < p_n \uparrow p$, $0 < p \le \infty$. Заметив, что все весовые последовательности, имеющие один и тот же предел $p$, эквивалентны друг другу, будем использовать для них специальное обозначение $\Phi^p_{\varphi,\omega}$. Следует иметь в виду, что случаи $0 < p < \infty$ и $p = +\infty$ различаются существенно по технике исследования и сути некоторых результатов. В случае $p = +\infty$ можно считать, что $p_n = n$, а при $0 < p < +\infty$ — что $p_n = p\frac{n}{n+1}$.

Следующая лемма о мультипликаторах доказывается стандартной проверкой равенства двух множеств (напомним, что в общем случае подкласс мультипликаторов $\widetilde{M}(\Phi)$ определяется формулой (1)).

**Лемма 5.** *Справедливы равенства*

$$\widetilde{M}(\Phi^{+\infty}_{\varphi,\omega}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(n\omega) =: I_\omega,$$

$$\widetilde{M}(\Phi^{p}_{\varphi,\omega}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{\omega}{n}\right) =: P_\omega \quad \text{при любом } 0 < p < \infty.$$

Так как всегда $\widetilde{M}(\Phi) \subset M(\Phi)$, условие

$$\forall n\ \exists s\ \forall k\ \exists m\ \exists c > 0 \quad \sup\{|\mu(\lambda)| : \mu \in B(\varphi_n - \varphi_m) \cap \widetilde{M}(\Phi)\} \ge ce^{\varphi_s(\lambda) - \varphi_k(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

достаточно для правильности проективной последовательности $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ общего вида.

Записав его для последовательностей вида $\Phi^p_{\varphi,\omega}$ $(0 < p \le +\infty)$ и использовав лемму 5, легко получаем, что оно эквивалентно таким условиям:

$$\forall n\ \exists m\ \exists c > 0\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \sup\{|\mu(\lambda)| : \mu \in B(m\omega)\} \ge ce^{n\omega(\lambda)} \tag{16}$$

в случае $\Phi^{+\infty}_{\varphi,\omega}$ и

$$\forall n\ \exists m\ \exists c > 0\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \sup\{|\mu(\lambda)| : \mu \in B(\omega/n) \cap P_\omega\} \ge ce^{\omega(\lambda)/m} \tag{17}$$

в случае $\Phi^p_{\varphi,\omega}$ $(0 < p < +\infty)$. Теперь заметим, что (16) не что иное, как условие каноничности индуктивной весовой последовательности $(n\omega)_{n=1}^{\infty}$, а (17) — каноничности проективной весовой последовательности $(\omega/n)_{n=1}^{\infty}$ (см. [18, § 4]).

Таким образом, приходим к следующему результату.

**Предложение 7.** *Если последовательность $(n\omega)_{n=1}^{\infty}$ (соответственно $(\omega/n)_{n=1}^{\infty}$) каноническая, то все весовые последовательности вида $\Phi^{+\infty}_{\varphi,\omega}$ (соответственно $\Phi^p_{\varphi,\omega}$, $0 < p < +\infty$) правильные.*

Чтобы сформулировать следствие из него и предложения 4.6 из [18] с удобными для проверки условиями, нам потребуются некоторые дополнительные понятия из [18].

Убывающая $C^1$-функция $\rho : [0,\infty) \to (0,1]$ называется *регулярной функцией расстояния*, если $\rho'(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\ln \rho(e^x)$ вогнута на $\mathbb{R}$. Говорят, что функция $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *медленно меняется относительно* $\rho$, если $|h(z) - h(\zeta)| \le C$ при некотором $C > 0$ и всех $z, \zeta \in \mathbb{C}$ с $|z - \zeta| \le \rho(z)$. Из предложения 4.6 и теорем 4.1 и 4.4 в [18] получаем такой результат.

**Предложение 8.** *Пусть $\rho$ — регулярная функция расстояния и $\omega$ — положительная субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция, медленно меняющаяся относительно $\rho$. Тогда верны следующие утверждения.*

(1) *Если $\ln(|z|/\rho(|z|)) = O(\omega(z))$ при $z \to \infty$, то весовые последовательности вида $\Phi^{+\infty}_{\varphi,\omega}$ правильные.*

(2) *Если $\ln(|z|/\rho(|z|)) = o(\omega(z))$ при $z \to \infty$ и пространство $P_\omega$ плотно в каждом $E(\omega/n)$ $(n = 1, 2, \dots)$, то правильными являются весовые последовательности вида $\Phi^p_{\varphi,\omega}$, $0 < p < +\infty$.*

Выделим класс правильных весовых последовательностей $\Phi$, которые согласованы с минимальными для $P(\Phi)$ последовательностями точек. Прежде чем сделать это, заметим, что

$$\widehat{P}(\Phi^{+\infty}_{\varphi,\omega}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(\varphi + n\omega); \quad \widehat{P}(\Phi^p_{\varphi,\omega}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(\varphi - p\omega + p\omega/n),\ 0 < p < \infty.$$

**Предложение 9.** *Пусть функции $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ и $\omega : \mathbb{C} \to (0,\infty)$ медленно меняются относительно $\rho(z) := (1 + |z|)^{-s}$ $(s \ge 0)$. Пусть $\omega$ субгармонична в $\mathbb{C}$ и выполнены следующие условия:*

(a) $\max(\varphi(z), \omega(z)) \le |z|^q + C$ *при некоторых $q, C > 0$;*

(b) $\ln|z| = O(\omega(z))$ *при $z \to \infty$.*

*Тогда весовые последовательности вида $\Phi^{+\infty}_{\varphi,\omega}$ правильные и согласованы с минимальными для $P(\Phi^{+\infty}_{\varphi,\omega})$ последовательностями точек.*

*Если вместо* (b) *выполнено более жесткое условие*

(b′) $\ln|z| = o(\omega(z))$ *при $z \to \infty$ и дополнительно известно, что пространство $P_\omega$ плотно в каждом $E(\omega/n)$ $(n = 1, 2, \dots)$,*

*то правильными и согласованными с минимальными для $P(\Phi^p_{\varphi,\omega})$ последовательностями точек являются весовые последовательности вида $\Phi^p_{\varphi,\omega}$, $0 < p < +\infty$.*

Доказательство. В самом деле, правильность $\Phi^p_{\varphi,\omega}$ имеет место по предложению 8.

Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ —минимальная для $P(\Phi^p_{\varphi,\omega})$ последовательность. Тогда она является последовательностью простых нулей некоторой функции из класса $\widehat{P}(\Phi^p_{\varphi,\omega})$. В силу условия (a) эта функция имеет порядок, не превышающий $q$. Тогда, как известно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-[q]-1} < \infty$, где $[x]$ обозначает целую часть числа $x$. Кроме того, из условия (b) следует, что последовательности вида $\Phi^p_{\varphi,\omega}$ разделены логарифмом $\ln(1 + |z|)$. Поэтому для $\delta(z) = (1 + |z|)^{-[q]-1}$ выполнены все условия предложения 6, в соответствии с которым $\Lambda$ и $\Phi^p_{\varphi,\omega}$ согласованы. □

В заключение отметим, что ряд различных по характеру легко проверяемых условий того, что пространство $P_\omega$ плотно в каждом $E(\omega/n)$ $(n = 1, 2, \dots)$, приведен в [24]. Например, так будет, если $\omega$ — радиальная функция (т. е. $\omega(z) = \omega(|z|)$), для которой $\omega(2z) \sim \omega(z)$ при $z \to \infty$.

## § 4. Приложения к конкретным пространствам

В данном параграфе полученные выше результаты применяются к достаточным множествам и представлению функций рядами экспонент в конкретных пространствах.

Из следствия теоремы 1 и предложения 9 получаем такой результат.

**Теорема 2.** *Пусть функции $\varphi$ и $\omega$ удовлетворяют всем условиям предложения 9, $p_n \uparrow p \in (0,+\infty]$ и $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность простых нулей некоторой функции $L$ из $\mathscr{L}\big(\Phi^p_{\varphi,\omega};\Lambda\big)$ и других нулей у нее нет. Предположим, что имеются номер $n_0 \in \mathbb{N}$ и такие окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r_m\}$ с $r_m \uparrow +\infty$, что*

$$|L(z)| \geq C_m e^{\varphi(z)-p_{n_0}\omega(z)}, \quad |z| = r_m,\ m = 1,2,\dots,$$

*где $C_m \uparrow +\infty$, и*

$$\ln|L'(\lambda_k)| \geq \varphi(\lambda_k) - p_{n_0}\omega(\lambda_k) \quad \textit{при всех достаточно больших } k. \tag{18}$$

*Тогда $\Lambda$ — достаточное для $P(\Phi^{+\infty}_{\varphi,\omega})$ множество. В случае, когда $\omega$ — радиальная функция с $\omega(2z) \sim \omega(z)$ при $z \to \infty$, множество $\Lambda$ достаточно для $P(\Phi^p_{\varphi,\omega})$ при всех $p \in (0,+\infty]$.*

В данной формулировке использовано то обстоятельство, что в рассматриваемом случае условие (18) влечет сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_k)|} e^{\varphi(\lambda_k)-p_{n_0}\omega(\lambda_k)}$. Оно является следствием условия (b) предложения 9 и отмеченной в доказательстве этого предложения сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-[q]-1} < \infty$.

Отметим, что можно было сформулировать и несколько более общий, чем теорема 2, результат, вытекающий из теоремы 1 и предложения 9. Читатель без труда восстановит его самостоятельно.

Рассмотрим в заключение весовые пространства, представляющие собой аналитическую реализацию сопряженных к пространствам голоморфных в ограниченной выпуклой области $\Omega$ функций с заданным ростом вблизи границы. Достаточно общим их примером являются пространства, задаваемые весовыми последовательностями вида $\Phi^p_{\varphi,\omega}$, в которых $\varphi(z) = H_\Omega(z) := \sup\limits_{\zeta\in\Omega} \operatorname{Re}(z\zeta)$ — опорная функция области $\Omega$, а $\omega$ — некоторая радиальная функция, для которой выполнены условия предложения 9, и дополнительно известно, что $\omega(t) = o(t)$ при $t \to +\infty$. Важными частными случаями являются $\omega(t) = \ln(1+t)$ и $\omega(t) = (1+t)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Первый соответствует пространствам голоморфных в $\Omega$ функций полиномиального, а второй — степенного роста. При этом для $\omega(t) = \ln(1+t)$ непременно $p = +\infty$. Нетрудно видеть, что приведенные функции $\omega$, равно как и опорная функция $H_\Omega$, медленно меняются относительно $\rho(z) \equiv 1$. Поэтому к данным пространствам применима теорема 2. Ограничимся здесь формулировкой ее следствия для $\omega(t) = \ln(1+t)$. Результат для $\omega(t) = (1+t)^\alpha$ формулируется аналогично.

**Теорема 3.** *Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность простых нулей целой функции $L$, для которой при некоторых $q, C > 0$ имеет место оценка*

$$|L(z)| \leq C(1+|z|)^q e^{H_\Omega(z)} \quad \textit{при всех } z \in \mathbb{C},$$

*и других нулей у $L$ нет. Предположим, что существуют такие номер $n \in \mathbb{N}$ и окружности $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_m\}$ с $r_m \uparrow +\infty$, что*

$$|L(\lambda)| \geq \frac{e^{H_\Omega(\lambda)}}{(1+|\lambda|)^n}, \quad |\lambda| = r_m,\ m = 1,2,\dots,$$

*и*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\ln|L(\lambda_k)| - H_\Omega(\lambda_k)}{\ln(1+\lambda_k)} > -\infty.$$

*Тогда* $\Lambda$ — *достаточное множество для пространства*

$$A_\Omega^{-\infty} := \bigcap_{n=1}^{\infty} E(H_\Omega(z) - n\ln(1+|z|)).$$

Как известно, между достаточными множествами для $A_\Omega^{-\infty}$ и абсолютно представляющими системами экспонент для пространства $A^{-\infty}(\Omega)$ голоморфных в $\Omega$ функций полиномиального роста имеется двойственная связь (соответствующий результат — предложение 4.2 в [15] — является следствием общих результатов Ю. Ф. Коробейника из [6] и двойственности между $A_\omega^{-\infty}$ и $A^{-\infty}(\Omega)$, установленной в [15]). Поэтому из теоремы 3 следует, что система экспонент $(\exp(\lambda_k z))_{k=1}^{\infty}$ с показателями, удовлетворяющими ее условиям, является абсолютно представляющей в $A^{-\infty}(\Omega)$. Таким образом, получаем в качестве простого следствия один из основных результатов статьи [16]. При этом ясно, что сфера применений результатов настоящей работы достаточно широка и данное следствие — лишь иллюстрация их эффективности.

В заключение авторы статьи выражают благодарность рецензенту за ряд полезных замечаний.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Ehrenpreis L.* Fourier analysis in several complex variables. New York: Wiley-Intersci. Publ., 1970. (Pure Appl. Math.; V. 17).
2. *Schneider D. M.* Sufficient sets for some spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 197. P. 161–180.
3. *Bierstedt K. D., Meise R., Summers W. H.* A projective description of weighted inductive limits // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 272. P. 107–160.
4. *Напалков В. В.* О сравнении топологий в некоторых пространствах целых функций // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 4. С. 535–539.
5. *Коробейник Ю. Ф.* Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 3. С. 539–565.
6. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 1. С. 73–126.
7. *Коробейник Ю. Ф.* Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44, № 5. С. 1066–1114.
8. *Напалков В. В.* О дискретных слабо достаточных множествах в некоторых пространствах целых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 5. С. 1088–1099.
9. *Абанин А. В.* О некоторых признаках слабой достаточности // Мат. заметки. 1986. Т. 40, № 4. С. 442–454.
10. *Абанин А. В.* О продолжении и устойчивости слабо достаточных множеств // Изв. вузов. Математика. 1987. № 4. С. 3–10.
11. *Абанин А. В.* Характеризация минимальных систем показателей представляющих систем обобщенных экспонент // Изв. вузов. Математика. 1991. № 2. С. 3–12.
12. *Абанин А. В.* Геометрические критерии представления аналитических функций рядами обобщенных экспонент // Докл. АН СССР. 1992. Т. 323, № 5. С. 807–810.
13. *Абанин А. В.* Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы: Дис. … докт. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 1995.
14. *Абанин А. В.* Об одном применении слабо достаточных множеств // Владикавказ. мат. журн. 2005. Т. 7, № 2. С. 11–17.
15. *Abanin A. V., Le Hai Khoi.* Dual of the function algebra $A^{-\infty}(D)$ and representation of functions in Dirichlet series // Proc. Amer. Math. Soc. 2010. V. 138. P. 3623–3635.
16. *Abanin A. V., Le Hai Khoi, Nalbandyan Yu. S.* Minimal absolutely representing systems of exponentials for $A^{-\infty}(\omega)$ // J. Approx. Theory. 2011. V. 163. P. 1534–1545.

**17.** *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains // Ark. Mat. 2012. V. 50. P. 1–22.

**18.** *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Continuation of holomorphic functions with growth conditions and some of its applications // Studia Math. 2010. V. 200. P. 279–295.

**19.** *Моржаков В. В.* Об эпиморфности оператора свертки в выпуклых областях из $\mathbb{C}^{\ell}$ // Мат. сб. 1987. Т. 132, № 2. С. 352–370.

**20.** *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Painlevè null sets, dimension and compact embeddings of weighted holomorphic spaces // Studia Math. 2012. V. 213. P. 169–187.

**21.** *Абанин А. В.* Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы // Мат. заметки. 1995. Т. 57, № 4. С. 483–497.

**22.** *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.

**23.** *Красичков-Терновский И. Ф.* Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 4. С. 531–546.

**24.** *Абанин А. В.* Густые пространства и аналитические мультипликаторы // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 1994. № 4. С. 3–10.

*Статья поступила 12 октября 2012 г.*

Абанин Александр Васильевич
Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону 344090;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
abanin@math.rsu.ru

Варзиев Владислав Аликович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
varziev@smath.ru