Сибирский математический журнал
Июль—август, 2013. Том 54, № 4

УДК 512.554.7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ПРОСТЫЕ ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ

А. А. Попов

Аннотация. Доказано, что всякая дифференциально простая исключительная йорданова алгебра над полем характеристики 0 является кольцом Алберта, каждый элемент которого удовлетворяет уравнению третьей степени с коэффициентами из центра данной алгебры, а над полем характеристики, большей двух, представляет собой тензорное произведение своего центра на центральную простую исключительную двадцатисемимерную йорданову алгебру. Сделаны некоторые замечания в случае специальных алгебр.

Ключевые слова: йорданова алгебра, дифференцирование алгебры, дифференциально простая алгебра.

Введение

Одним из первых, кто обратил внимание на важность изучения дифференциально простых алгебр, был Цассенхауз [1]. Позднее Алберт [2] применил понятие дифференциально простой алгебры для исследования простых коммутативных алгебр с ассоциативными степенями. Дифференциально простые ассоциативные алгебры изучались далее в работах Познера [3] и Харпера [4]. В частности, Познер доказал, что всякое дифференциально простое ассоциативное кольцо характеристики 0 первично, а в случае наличия минимального идеала простое. Блок [5] в 1969 г. классифицировал дифференциально простые кольца произвольной характеристики с минимальным идеалом в терминах простых колец, что, в частности, позволило ему описать структуру полупростых алгебр Ли простой характеристики. Блоком в упомянутой работе была доказана теорема о том, что всякое дифференциально простое кольцо простой характеристики с минимальным идеалом представляет собой тензорное произведение простого кольца на дифференциально простое ассоциативно-коммутативное кольцо с минимальным идеалом. Дифференциально простые ассоциативно-коммутативные кольца простой характеристики, в свою очередь, изучались Юанем [6]. Дифференциально простые (супер)алгебры и по сей день играют очень важную роль в математике. К примеру, они применяются при описании простых конечномерных йордановых супералгебр [7] и первичных альтернативных супералгебр [8]. В 1995 г. Ченг [9] распространил результаты Блока на случай супералгебр и использовал их при исследовании полупростых супералгебр Ли.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1.10726), НШ–3669.2010.1, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (№ 02.740.11.5191) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00939–а).

В [10] автором получен аналог приведенной выше теоремы Блока для дифференциально простых альтернативных алгебр простой характеристики, не обладающих, вообще говоря, минимальным идеалом, а именно доказано, что всякая дифференциально простая альтернативная алгебра простой характеристики есть тензорное произведение своего центра (дифференциально простой ассоциативно-коммутативной алгебры) на алгебру Кэли — Диксона (единственный класс простых альтернативных алгебр). В этой же работе получено обобщение результата Познера: доказано, что дифференциально простая альтернативная алгебра характеристики 0 будет первичной алгеброй.

Целью данной работы является доказательство аналогичных теорем в случае дифференциально простых йордановых алгебр.

§ 1. Понятия и обозначения

Все алгебры далее рассматриваются только над полями. Пусть F — поле, A — алгебра (вообще говоря, неассоциативная) над F.

Определение. F-линейное отображение $\partial : A \mapsto A$ называется *дифференцированием алгебры* A, если $\partial(xy) = \partial(x)y + x\partial(y)$ для всех $x, y \in A$.

Пусть $\mathfrak{Der}(A)$ — множество всех дифференцирований алгебры A. Зафиксируем некоторое подмножество $\mathfrak{D}$ множества $\mathfrak{Der}(A)$.

Определение. Идеал I алгебры A называется $\mathfrak{D}$-*идеалом* (обозначается через $I \lhd_{\mathfrak{D}} A$), если $\partial(x) \in I$ для любых $\partial \in \mathfrak{D},\ x \in I$.

Определение. Алгебра A называется $\mathfrak{D}$-*простой*, если $A^2 \neq (0)$ и в A нет $\mathfrak{D}$-идеалов, отличных от (0) и A. В случае, когда $\mathfrak{D} = \mathfrak{Der}(A)$, говорят, что A *дифференциально проста*. Однако в данной работе термин «дифференциально простая алгебра» будет употребляться как синоним термина «$\mathfrak{D}$-простая алгебра», когда нет необходимости явно указывать множество $\mathfrak{D}$.

Напомним некоторые стандартные обозначения, принятые в теории неассоциативных колец. Пусть $x, y, z \in A$. Тогда $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ — *ассоциатор* элементов x, y, z; $[x, y] := xy - yx$ — *коммутатор* элементов x и y. Для $a \in A$ через $\mathfrak{D}(a)$ обозначим множество $\{a\} \cup \{\partial_1 \ldots \partial_n(a) \mid \partial_1, \ldots, \partial_n \in \mathfrak{D},\ n$ — натуральное число$\}$.

В неассоциативных алгебрах часто бывает полезным рассмотрение следующих двух множеств: *ассоциативного центра* $N(A) = \{n \in A \mid (A, n, A) = (n, A, A) = (A, A, n) = 0\}$ и *центра* $Z(A) = \{z \in N(A) \mid [z, A] = 0\}$. Нетрудно видеть, что упомянутые множества инвариантны относительно любого дифференцирования алгебры A, поэтому далее будем говорить об элементах из $\mathfrak{D}$ как о дифференцированиях данных центров, не отмечая особо, что рассматриваются ограничения дифференцирований из $\mathfrak{D}$.

Определение. Алгебра A называется *йордановой*, если для всех $x, y \in A$ выполнено

$$xy = yx, \quad x^2(yx) = (x^2y)x.$$

Далее потребуется одно обозначение, часто используемое в теории йордановых алгебр:

$$U_{x,y}(z) := \{x, z, y\} := (xz)y + (zy)x - z(xy), \quad U_x(y) := U_{x,x}(y).$$

Пусть поле F имеет характеристику, не равную 2. Тогда, введя на произвольной ассоциативной алгебре A новое умножение $\circ : A \mapsto A$ по правилу $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, получим йорданову алгебру $A^{(+)}$.

Определение. Йорданова алгебра J, являющаяся подалгеброй алгебры $A^{(+)}$ для некоторой ассоциативной алгебры A, называется *специальной*. Неспециальные йордановы алгебры называются *исключительными*.

Более подробно со структурной теорией йордановых алгебр можно ознакомиться, например, по книгам [11, 12] или по относительно недавно вышедшей монографии [13]. Следует особо отметить книгу [14] на русском языке. Дифференцированиям йордановых алгебр посвящена часть работы [15].

Обратимся к одному примеру йордановой алгебры, необходимому в дальнейшем. Как и ранее, F — поле характеристики, не равной двум. Рассмотрим алгебру C с базисом $e_0 = 1,\ e_1, \dots, e_7$ и следующей таблицей умножения:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	1	e_3	e_2	e_5	e_4	$-e_7$	$-e_6$
e_2	$-e_3$	1	$-e_1$	e_6	e_7	e_4	e_5
e_3	$-e_2$	e_1	-1	e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	1	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$
e_5	$-e_4$	$-e_7$	$-e_6$	e_1	-1	e_3	e_2
e_6	e_7	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	-1	$-e_1$
e_7	e_6	$-e_5$	e_4	e_3	$-e_2$	e_1	1

(1)

Далее, из результатов [14, гл. 2] вытекает, что линейное отображение $^{-} : C \mapsto C$, определенное по правилу: $\overline{1} = 1$, $\overline{e_i} = -e_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 7$, будет инволюцией алгебры C. Рассмотрим алгебру C_3 матриц порядка 3×3 с коэффициентами из C. Пусть через $\overline{X}^T$ обозначена матрица, полученная из матрицы $X \in C_3$ применением инволюции $^{-}$ к каждому ее коэффициенту с последующим транспонированием. Тогда отображение $* : C_3 \mapsto C_3$, действующее по правилу: $X^* = \overline{X}^T$ для всех $X \in C_3$, будет инволюцией алгебры C_3. Рассмотрим $\mathscr{H}(F) = \mathscr{H}$ — множество элементов из C_3, неподвижных относительно инволюции $*$. Нетрудно проверить, что $\mathscr{H}(F)$ замкнуто относительно умножения на скаляры из F, сложения и умножения $\circ : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$, где $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$, для всех $X, Y \in \mathscr{H}$. Известно (см. [14, гл. 3, теоремы 1, 2]), что $\mathscr{H}$ — исключительная йорданова алгебра и что $\mathscr{H}$ — центральная простая алгебра (см. [12, предложение 7.7.2]).

Определение. Элемент свободной йордановой F-алгебры от счетного множества порождающих называется *существенным*, если при естественном гомоморфизме на свободную специальную йорданову F-алгебру от тех же порождающих он переходит в ненулевой элемент. Йорданова алгебра называется *PI-алгеброй*, если она удовлетворяет тождеству, являющемуся существенным элементом свободной йордановой алгебры от счетного множества порождающих.

Пусть J — $\mathfrak{D}$-простая йорданова алгебра над полем F характеристики не 2, где $\mathfrak{D}$ — семейство дифференцирований J. Целью настоящей статьи, как уже отмечалось, является изучение свойств J.

В заключение данного раздела отметим, что в $\mathfrak{D}$-простой алгебре A нет абсолютных двусторонних делителей нуля, т. е. соотношение $aA = Aa = (0)$

влечет $a = 0$ для любого $a \in A$. Также отметим, что $\mathfrak{D}$-простая алгебра A не локально нильпотентна (в ассоциативном случае см. [3], в общем — [8, лемма 5]).

§ 2. Специальные алгебры

Из результатов работы Херстейна [16] следует, что если A является простой алгеброй над полем характеристики не 2, то йорданова алгебра $A^{(+)}$ проста. Аналогичное утверждение можно доказать и для дифференциально простых алгебр, а именно справедлива

Теорема 1. *Пусть A — $\mathfrak{D}$-простая ассоциативная алгебра над полем F характеристики не 2, где $\mathfrak{D}$ — семейство дифференцирований алгебры A. Тогда $A^{(+)}$ — $\mathfrak{D}$-простая йорданова алгебра.*

Доказательству теоремы предпошлем две леммы. Следующая лемма доказана в работе [16] и используется без изменений.

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 если U — идеал в $A^{(+)}$, то $[U \circ U, A]$ содержится в U.*

Имеет место

Лемма 2. *В условиях теоремы 1 если $U \neq A$ — $\mathfrak{D}$-идеал $A^{(+)}$, то для каждого $a \in U$ соотношение $[a, A] \subseteq U$ влечет $a = 0$.*

Доказательство данной леммы во многом повторяет доказательство аналогичной леммы в [16] и приводится здесь для полноты изложения. По условию для всех $x \in A$ имеет место $ax - xa \in U$. С другой стороны, $ax + xa \in U$ для всех $x \in A$, так как U — идеал в йордановой алгебре $A^{(+)}$. Следовательно, $ax \in U$ для всех $x \in A$. Для любых $x, y \in A$ имеет место $2(ax) \circ y = (ax)y + y(ax) \in U$. В силу уже доказанного $axy \in U$, поэтому $yax \in U$. Ввиду произвольности $x, y \in A$ получаем, что для каждого элемента $a \in A$, удовлетворяющего условию леммы, имеет место включение $AaA \subseteq U$. Далее, если $[a, x] \in U$ для всех $x \in A$, то, действуя произвольным дифференцированием $\partial \in \mathfrak{D}$, получим $[\partial(a), A] \subseteq U$, откуда следует $A\partial(a)A \subseteq U \neq A$. Тогда $A\mathfrak{D}(a)A \subseteq U$, что влечет $a = 0$, так как $A\mathfrak{D}(a)A \lhd_{\mathfrak{D}} A$ и в A нет абсолютных делителей нуля. $\square$

Доказательство теоремы 1. Следуя доказательству аналогичной теоремы в [16], предположим, что $U \neq A$ — $\mathfrak{D}$-идеал в йордановой алгебре $A^{(+)}$. Тогда для всех $a, b \in U$, $x \in A$ в силу леммы 1 имеет место $(ab + ba)x - x(ab + ba) \in U$. По лемме 2 $ab + ba = 0$, в частности, $a^2 = 0$ для всех $a \in U$. Пусть $a \in U, x \in A$. Тогда $a(ax + xa) + (ax + xa)a = 0$, так как U — идеал алгебры $A^{(+)}$. Учитывая, что $a^2 = 0$, получаем равенство $axa = 0$ для всех $a \in U$, $x \in A$.

Далее, $AUA \lhd_{\mathfrak{D}} A$, ибо U — $\mathfrak{D}$-инвариантное множество. Тогда $AUA = A$, поскольку $U \neq (0)$ и в A нет абсолютных двусторонних делителей нуля. Следовательно, каждый элемент x из A представим в виде $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i b_i$, где $a_i, b_i \in A$, $u_i \in U$, $1 \leqslant i \leqslant n$, т. е. каждая конечно порожденная подалгебра алгебры A содержится в подалгебре B, порожденной некоторыми элементами $a_i u_i b_i$, где $a_i, b_i \in A$, $u_i \in U$, $1 \leqslant i \leqslant m$, для некоторого натурального m. Тогда $B^{m+1} = 0$, т. е. A локально нильпотентна; противоречие. $\square$

Определение. Пусть J — йорданова алгебра над полем F. Тогда пара $(S(J), \sigma)$, где $S(J)$ — ассоциативная алгебра с 1, а $\sigma : J \mapsto S(J)^{(+)}$ — гомоморфизм йордановых алгебр, называется *универсальной обертывающей алгеброй* для алгебры J, если для любой ассоциативной алгебры A с 1 и любого гомоморфизма $\eta : J \mapsto A^{(+)}$ существует единственный гомоморфизм ассоциативных алгебр $\theta : S(J) \mapsto A$ такой, что $\theta(1) = 1$ и для всех $x \in J$ имеет место $\theta(\sigma(x)) = \eta(x)$.

Известно (см. [11, гл. 2.1, теорема 1]), что для любой йордановой алгебры J универсальная обертывающая $(S(J), \sigma)$ существует, единственна с точностью до изоморфизма (в том смысле, что если $(S'(J), \sigma')$ — другая ассоциативная обертывающая, то существует единственный изоморфизм $i : S(J) \mapsto S'(J)$ такой, что для всех $x \in J$ имеет место $i(\sigma(x)) = \sigma'(x)$) и при этом для любого дифференцирования ∂ алгебры J существует такое дифференцирование D алгебры $S(J)$, что для всех $x \in J$ имеет место $D(\sigma(x)) = \sigma(\partial(x))$. Также известно (см. [11, гл. 2.1, теорема 3]), что если йорданова алгебра J специальна, то отображение $\sigma : J \mapsto S(J)$ инъективно, в силу чего в данном случае можно считать, что J — подалгебра $S(J)^{(+)}$ и дифференцирования алгебры J продолжаются до дифференцирований алгебры $S(J)$. Пусть теперь J — $\mathfrak{D}$-простая специальная йорданова алгебра, где $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{Der}(J)$. Выше показано, что существуют ассоциативная алгебра A и $\mathfrak{D}' \subseteq \mathfrak{Der}(A)$ такие, что J — подалгебра $A^{(+)}$ и $\mathfrak{D}'$ состоит из продолжений дифференцирований из $\mathfrak{D}$ на A. Заметим, что если $U \triangleleft_{\mathfrak{D}'} A$ и $U \neq A$, то $J \cap U = (0)$. Ясно, что если $\{U_i \mid i \in I\}$ — семейство идеалов алгебры A таких, что для всех $i \in I$ имеет место $U_i \cap J = (0)$, то $\left(\bigcup\limits_{i\in I} U_i\right) \cap J = (0)$, здесь I — некоторое множество индексов. Получается, что по лемме Цорна в множестве $\{U \triangleleft_{\mathfrak{D}'} A \mid U \neq (0)\}$ существует максимальный элемент M. Тогда $M \cap J = (0)$ и алгебра J вкладывается в алгебру $(A/M)^{(+)}$, причем дифференцирования из $\mathfrak{D}'$ индуцируют дифференцирования алгебры A/M, относительно множества которых алгебра A/M будет дифференциально простой ввиду максимальности M. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть J — $\mathfrak{D}$-простая специальная йорданова алгебра над полем характеристики не 2, где $\mathfrak{D}$ — произвольное множество дифференцирований алгебры J. Тогда существует $\mathfrak{D}'$-простая ассоциативная алгебра A такая, что*

(1) *J является подалгеброй $A^{(+)}$;*

(2) *множество J порождает A как ассоциативную алгебру;*

(3) *множество $\mathfrak{D}'$ состоит из дифференцирований алгебры A, являющихся продолжениями дифференцирований из $\mathfrak{D}$ на A.*

Пусть теперь характеристика основного поля равна 0, J — дифференциально простая йорданова алгебра (не обязательно специальная).

В [17] доказано, что если в некоторой алгебре над полем характеристики 0 существует наибольший локально нильпотентный идеал, то он будет устойчивым относительно любого дифференцирования данной алгебры. С учетом уже упомянутого факта, что J не является локально нильпотентной, получаем, что $\mathscr{L}(J) = (0)$, где $\mathscr{L}(J)$ — локально нильпотентный радикал алгебры J (наибольший локально нильпотентный идеал; его существование в классе йордановых алгебр и свойства обсуждаются, например, в [14]). Это позволяет сформулировать следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть J — $\mathfrak{D}$-простая йорданова алгебра над полем характеристики 0, где $\mathfrak{D}$ — произвольное множество дифференцирований алгебры J. Тогда J является первичной алгеброй.*

Доказательство. Приведенное ниже рассуждение аналогично доказательству предложения 3 из [10].

Пусть $(0) \neq I$, $K \triangleleft J$, причем $IK = (0)$. Следуя [18], определим $M = \mathrm{Ann}_J(I) = \{m \in J \mid mI = (0), (I, J, m) = (0)\}$. Тогда $M \triangleleft J$ по лемме 3 из [18]. Для любых $i \in I$, $m \in M$ имеем $im = 0$, действуя на это равенство $\partial \in \mathfrak{D}$, получим $\partial(i)m + i\partial(m) = 0$. Умножая обе части последнего равенства на $i_1 \in I$, выводим $0 = i_1 \cdot \partial(i)m + i_1 \cdot i\partial(m) = i_1 \cdot i\partial(m)$, т. е. $i\partial(m) \cdot I = (0)$.

Пусть теперь $x \in J$. Тогда

$$0 = (i_1, x, \partial(im)) = (i_1, x, i\partial(m)) + (i_1, x, \partial(i)m) = (i_1, x, i\partial(m)),$$

так как $\partial(i)m \in M$. Таким образом, $i\partial(m) \in M$, т. е. $i\partial(m) \in I \cap M$. Однако $\mathscr{L}(J) = (0)$, как отмечено выше, откуда следует, что $I \cap M = (0)$, поскольку $(I \cap M)^2 = (0)$. Значит,

$$i\partial(m) = 0 \tag{2}$$

для всех $i \in I$, $m \in M$, $\partial \in \mathfrak{D}$.

Далее, $(i, x, m) = 0$ по определению M. Дифференцируя, получаем

$$0 = (\partial(i), x, m) + (i, \partial(x), m) + (i, x, \partial(m)) = (\partial(i), x, m) + (i, x, \partial(m)).$$

Заметим, что в силу (2) и того, что $I, M \triangleleft J$, имеет место

$$\begin{aligned}(\partial(i), x, m) &= \partial(i)x \cdot m - \partial(i) \cdot xm = \partial(ix)m - i\partial(x) \cdot m - \partial(i \cdot xm) + i\partial(xm)\\ &= \partial(ix)m - \partial(i \cdot xm) = \partial(ix \cdot m) - ix \cdot \partial(m) - \partial(i \cdot xm) = \partial((i, x, m)) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $(i, x, \partial(m)) = 0$, т. е. $\partial(m) \in M$ для всех $m \in M$, $\partial \in \mathfrak{D}$, иными словами, $M \triangleleft_{\mathfrak{D}} J$. Ясно, что $K \subseteq M$, поэтому $M \neq (0)$. Тогда $M = J$ и $IJ = (0)$. В §1 отмечалось, что дифференциально простая алгебра не содержит абсолютных двусторонних делителей нуля, в силу чего $I = (0)$; противоречие. $\square$

В [19] доказано, что если A — ассоциативная первичная алгебра над полем характеристики не 2, то всякое дифференцирование $A^{(+)}$ будет дифференцированием алгебры A. С учетом этого факта и леммы 3 получается следующая

Теорема 3. *Пусть A — ассоциативная алгебра над полем характеристики 0, $\mathfrak{D}$ — множество дифференцирований $A^{(+)}$ такое, что $A^{(+)}$ является $\mathfrak{D}$-простой алгеброй. Тогда каждое дифференцирование алгебры $A^{(+)}$ будет дифференцированием алгебры A, причем A будет $\mathfrak{D}$-простой алгеброй.*

§ 3. Исключительные алгебры над полем характеристики 0

На протяжении данного параграфа предполагается, что характеристика основного поля F равна 0.

Определение. Элемент a йордановой алгебры J называется *абсолютным делителем нуля*, если $U_a(x) = 0$ для всех $x \in A$. Йорданова алгебра называется *невырожденной*, если в ней нет абсолютных делителей нуля.

Далее нам потребуется следующее

Определение. Йорданово кольцо J называется *кольцом Алберта*, если его центр $Z(J)$ не равен (0) и не содержит делителей нуля кольца J, причем кольцо частных $Z(J)^{-1}J$ есть простая конечномерная над своим центром исключительная йорданова алгебра.

Известно (см. [20, теорема 3]), что равенство $\mathscr{L}(J) = (0)$ влечет невырожденность алгебры J, а [21, теорема 2], в свою очередь, утверждает, что всякая первичная невырожденная йорданова алгебра либо специальна, либо является кольцом Алберта.

Основным результатом данной работы о дифференциально простых исключительных йордановых алгебрах характеристики 0 является следующая

Теорема 4. *Пусть J — $\mathfrak{D}$-простая исключительная йорданова алгебра над полем F характеристики 0, где $\mathfrak{D}$ — семейство дифференцирований алгебры J. Тогда J является кольцом Алберта, а ее центр $Z(J) = Z$ будет $\mathfrak{D}$-простой ассоциативной коммутативной алгеброй (в частности, в J есть единица). При этом каждый элемент алгебры J удовлетворяет кубическому уравнению над Z, т. е. для всех $x \in J$ выполнено*

$$x^3 - t(x)x^2 + \frac{1}{2}(t(x^2) - t(x)^2)x - n(x) = 0, \tag{3}$$

где $t, n : J \mapsto Z$, t — Z-линейное отображение, а n — однородное отображение над Z степени 3.

Доказательство. Выше доказано, что J будет кольцом Алберта. Обратимся к уравнению (3). Как следует из [11, гл. 6.4], соотношение (3) с коэффициентами из $K = Z^{-1}Z$ выполнено в $J_1 = Z^{-1}J$, поэтому достаточно доказать, что для любого $x \in J$ элемент $t(x)$ также лежит в J (здесь мы отождествляем J и ее образ в J_1, т. е. функции t, n с нужными свойствами и значениями в поле K уже определены).

Дифференцирования из $\mathfrak{D}$ естественным образом продолжаются до F-линейных дифференцирований J_1. Будем отождествлять дифференцирования из $\mathfrak{D}$ и их продолжения на J_1.

Покажем, что для любого $\partial \in \mathfrak{D}$ выполнено $[\partial, t] = 0$, т. е.

$$\partial(t(x)) - t(\partial(x)) = 0 \tag{4}$$

для всех $x \in J_1$.

Если $x \in K$, то в силу [11, гл. 6.3, теорема 1] имеет место $\partial(t(x)) = \partial(3x) = 3\partial(x)$. С другой стороны, как отмечалось ранее, дифференцирование оставляет инвариантным центр алгебры, откуда $\partial(x) \in K$ и $t(\partial(x)) = 3\partial(x)$, т. е. для элементов из поля K соотношение (4) выполнено.

Ввиду того, что при расширении основного поля дифференцирования естественным образом продолжаются, простая центральная исключительная йорданова алгебра таковой и остается, а функции t, n и уравнение (3) не меняются (см. теорему 1 из [11, гл. 6.3] и рассуждение перед ней), можно считать центр алгебры J_1 алгебраически замкнутым полем.

Запишем соотношение (3) в следующем виде:

$$x^3 - t(x)x^2 + \frac{1}{2}(t(x^2) - t(x)^2)x \in K \tag{5}$$

для всех $x \in J_1$

Линеаризуя (5), получим (с учетом коммутативности J_1 и характеристики 0)

$$(xy)z + (xz)y + (yz)z - t(x)yz - t(y)xz - t(z)xy + \frac{1}{2}(t(xy) - t(x)t(y))z \\ + \frac{1}{2}(t(yz) - t(y)t(z))x + \frac{1}{2}(t(xz) - t(x)t(z))y \in K \tag{6}$$

для всех $x, y, z \in J_1$. Теперь рассмотрим произвольное дифференцирование ∂ из $\mathfrak{D}$. Введем вспомогательное обозначение $S(x, y) := \frac{1}{2}(t(xy) - t(x)t(y))$ для всех $x, y \in J_1$. Подействуем на (6) отображением ∂, после чего вычтем из результата сначала (6) с заменой x на $\partial(x)$, затем — (6) с заменой y на $\partial(y)$ и, наконец, — (6) с заменой z на $\partial(z)$. После приведения подобных получим следующее включение:

$$[t,\partial](x)yz + [t,\partial](y)xz + [t,\partial](z)xy + (\partial(S(x,y)) - S(x,\partial(y)) - S(\partial(x),y))z \\ + (\partial(S(x,z)) - S(x,\partial(z)) - S(\partial(x),z))y + (\partial(S(y,z)) - S(y,\partial(z)) - S(\partial(y),z))x \in K \tag{7}$$

для всех $x, y, z \in J_1$. Введем обозначение

$$Q_\partial(x,y) := \partial(S(x,y)) - S(\partial(x),y) - S(x,\partial(y)), \tag{8}$$

где $x, y \in J_1$. При этом ясно, что $Q_\partial(x, y) \in K$ для всех $x, y \in J_1$.

С учетом (8) выражение (7) примет вид

$$[t,\partial](x)yz + [t,\partial](y)xz + [t,\partial](z)yx + Q_\partial(x,y)z + Q_\partial(y,z)x + Q_\partial(x,z)y \in K \tag{9}$$

для всех $x, y, z \in K$. Положив в (9) $x = y = z$ и сократив на 3, получим

$$[t,\partial](x)(x^2) + Q_\partial(x,x)x \in K \tag{10}$$

для всех $x \in J_1$. Следовательно, если минимальный многочлен элемента $x \in J_1$ над K имеет степень 3, то соотношение (10) влечет $[t, \partial](x) = 0$ для такого x.

Отображение ∂, вообще говоря, не является K-линейным, однако $[t, \partial]$ таковым будет. Поэтому достаточно проверить, что $[t, \partial] = 0$ на некотором базисе алгебры J_1. Можно считать, что $J_1 = \mathscr{H}(K) = \mathscr{H}$ (из [11, гл. 5.6, следствие 2 теоремы 8] сразу вытекает, что любые две исключительные простые центральные конечномерные йордановы алгебры над алгебраически замкнутым полем изоморфны). Тем самым для доказательства (4) достаточно установить, что в алгебре $\mathscr{H}$ отображение $[t, \partial']$ совпадает с нулевым отображением на некотором базисе алгебры $\mathscr{H}$, где ∂' — произвольное дифференцирование $\mathscr{H}$ как кольца. Будем использовать стандартное обозначение «матричных единиц»: пусть e_{ij} — матрица порядка 3×3, содержащая все нулевые элементы, кроме одного, равного единице и стоящего на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, где $1 \leqslant i, j \leqslant 3$.

Рассмотрим следующий набор матриц из $\mathscr{H}$: e_{ii}, $1 \leqslant i \leqslant 3$; $e_{jkl} = e_{jk}e_l - e_{kj}e_l$, где $1 \leqslant j < k \leqslant 3$, $0 \leqslant l \leqslant 7$, а элементы e_i образуют базис алгебры C (см. (1)). По построению $\mathscr{H}$ совокупность $\{e_{ii}, e_{jkl} \mid 1 \leqslant i \leqslant 3,\ 1 \leqslant j < k \leqslant 3,\ 0 \leqslant l \leqslant 7\}$ образует базис $\mathscr{H}$. Ясно, что степень минимального многочлена для каждого из e_{jkl} равна 3, так как $e_{jkl}^2 = \pm(e_{jj} + e_{kk})$ (знак зависит от индекса l, см. (1)), поэтому $[t, \partial'](e_{jkl}) = 0$ для всех e_{jkl}.

Пусть теперь $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Вычислим $[t, \partial'](e_{ii})$. Из явной формулы для t (см. [11, гл. 6.4]) следует, что $t(e_{ii}) = 1$, поэтому $\partial'(t(e_{ii})) = 0$. С другой стороны, подействовав отображением ∂' на равенство $e_{ii}^2 = e_{ii}$, получим $2\partial'(e_{ii})e_{ii} = \partial'(e_{ii})$, т. е. $\partial'(e_{ii}) \in \mathscr{H}U_{e_{ii},\, e_{jj}} \oplus \mathscr{H}U_{e_{ii},\, e_{kk}}$. Однако у элементов данных пирсовских компонент на главной диагонали стоят нули, в силу чего $t(\partial'(e_{11})) = 0$.

Таким образом, в алгебре J_1 выполнено $[t, \partial] = 0$.

Теперь рассмотрим множество $I = \{x \in J \mid t(xJ^\#) \in J\}$, здесь и далее $J^\#$ обозначает алгебру, полученную формальным присоединением единицы к алгебре J. Ясно, что множество I замкнуто относительно сложения и умножения на скаляры из F. Замкнутость относительно умножения на элементы J следует из [11, гл. 6.3, следствие 4 теоремы 1], где утверждается, что для всех $x, y, z \in J_1$ выполнено равенство $t((x, y, z)) = 0$. Замкнутость I относительно дифференцирований из $\mathfrak{D}$ вытекает из доказанного ранее соотношения $[t, \partial](x) = 0$ для всех $x \in J_1$, $\partial \in \mathfrak{D}$. Значит, $I \lhd_{\mathfrak{D}} J$, т. е. $I = (0)$ или $I = J$. Предположим, что $I = (0)$. Возьмем $a, b \in J$ и определим элемент

$$\{[a, b]^2\} = 2a\{b, a, b\} - \{b, a^2, b\} - \{a, b^2, a\}.$$

Из упомянутого выше соотношения $t((x, y, z)) = 0$ для всех $x, y, z \in J_1$ и коммутативности алгебры J_1 легко вывести, что $t(\{[a, b]^2\}c) = 0$ для всех $c \in J$, в силу чего элемент $\{[a, b]^2\}$ лежит в I. Следовательно, в J выполнено тождество $\{[x, y]^2\} = 0$, откуда ввиду первичности и невырожденности J, а также [21, лемма 15] вытекает ассоциативность алгебры J, что противоречит ее исключительности. Значит, $I = J$, в частности, $t(x) \in J$ для всех $x \in J$. Осталось доказать только $\mathfrak{D}$-простоту Z.

Если $I \lhd_{\mathfrak{D}} Z$ и $I \neq (0)$, то $IJ \lhd_{\mathfrak{D}} J$ и $IJ \neq (0)$, т. е. $IJ = J$. Тогда для каждого $z \in Z$ существуют $i_1, \dots, i_k \in I$, $j_1, \dots, j_k \in J$ такие, что $z = \sum\limits_{\alpha=1}^{k} i_\alpha j_\alpha$. Действуя на последнее равенство функцией t и учитывая ее линейность относительно Z, получим $3z = \sum\limits_{\alpha=1}^{k} i_\alpha t(j_\alpha) \in I$, т. е. $I = Z$. Тот факт, что каждая дифференциально простая ассоциативная коммутативная алгебра содержит единицу, установлен в [3]. $\square$

§ 4. Исключительные алгебры над полем характеристики $p > 2$

На протяжении данного параграфа предполагается, что характеристика основного поля F — простое число, отличное от 2. Как и ранее, J — $\mathfrak{D}$-простая йорданова алгебра, где $\mathfrak{D}$ — некоторое семейство дифференцирований алгебры J. Пусть $FJ = FJ[X]$ — свободная йорданова алгебра над полем F от счетного множества порождающих X, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(FJ)$ — ее радикал Маккримона (определение и некоторые свойства приведены в [14, гл. 14]), S — множество всех тождеств, которым удовлетворяет каждая специальная йорданова алгебра, T_H — множество элементов, все линеаризации которых являются тождествами алгебры $\mathscr{H}(F)$. Если $Y \subseteq FJ$, а $\mathscr{J}$ — йорданова алгебра, то через $Y[\mathscr{J}]$ будем обозначать множество элементов из $\mathscr{J}$, полученных всевозможными подстановками элементов $\mathscr{J}$ в элементы множества Y.

В [21] доказано, что $S \cap T_H = \mathfrak{M}$, откуда следует, что $(S \cap T_H)[J] = \mathfrak{M}[J] \subseteq \mathfrak{M}(J)$. Известно, что $\mathfrak{M}(J) \subseteq \mathscr{L}(J)$ (см. [20, теорема 3]), поэтому $(S \cap T_H)[J]$ — локально нильпотентный идеал алгебры J. Ясно, что S и T_H — идеалы алгебры FJ, инвариантные относительно линеаризаций, в силу чего $S[J], T_H[J]$, а следовательно, и $(S \cap T_H)[J]$ являются $\mathfrak{D}$-идеалами алгебры J.

Как отмечалось ранее, дифференциально простая алгебра не может быть локально нильпотентной, поэтому $(S \cap T_H)[J] = (0)$. Далее, $S[J]T_H[J] \subseteq (S \cap T_H)[J] = (0)$, поэтому или $S[J] = (0)$, или $T_H[J] = (0)$. В случае, когда $S[J] = (0)$, алгебра J является гомоморфным образом специальной йордановой алгебры. Структуру дифференциально простых йордановых алгебр простой характеристики, которые не являются гомоморфными образами специальных йордановых алгебр, описывает следующая теорема (аналогичная теореме 3 из [10]).

Теорема 5. *Пусть J — йорданова алгебра над полем F характеристики $p > 2$, не являющаяся гомоморфным образом специальной йордановой алгебры, $\mathfrak{D}$ — произвольное множество дифференцирований алгебры J. Тогда если J является $\mathfrak{D}$-простой, то J изоморфна $H \otimes_K Z(J)$, где $H = J/\mathscr{L}(J)$, а K — поле, изоморфное образу $Z = Z(J)$ при каноническом гомоморфизме J на H, $F \subseteq K \subseteq Z$. При этом H является простой конечномерной центральной исключительной йордановой K-алгеброй, а Z — $\mathfrak{D}$-простой коммутативной ассоциативной алгеброй.*

Доказательство. Сказанное выше влечет равенства $S(J) = J$ и $T_H(J) = (0)$. Из [22; 21, теорема 4] следует, что существует однородный многочлен f с коэффициентами $+1$ и -1 от двух переменных, скажем, $x, y \in X$ такой, что $f(\mathscr{H}, \mathscr{H}) = Z(\mathscr{H})$ для любой простой исключительной йордановой алгебры $\mathscr{H}$. Ясно, что $f \in T_H$. Тогда $f(J, J) \in Z = Z(J)$. Для краткости будем называть элемент $p \in FJ$ *невырожденным* на некоторой йордановой алгебре $\mathscr{J}$, если $p(\mathscr{J}, \mathscr{J}) \neq (0)$. Докажем, что f^n невырожденный на J для любого натурального n. Пусть $^-: J \mapsto J/\mathscr{L}(J)$ — канонический гомоморфизм. По [14, гл. 8, следствие теоремы 8] $\overline{J}$ является подпрямой суммой первичных $\mathscr{L}$-полупростых йордановых алгебр J_α, где α пробегает некоторое множество индексов $\mathscr{I}$. Следует заметить, что многочлен $g = (f(x, y), z, t)$, зависящий от переменных $x, y, z, t \in X$, является существенным (действительно, иначе $f(x, y) \in S$, в силу чего $f(x, y) \in \mathfrak{M}(FJ[X])$, но тогда центр алгебры $\mathscr{H}(F)$ содержит делители нуля, что невозможно). Более того, так как $T_H(J) = (0)$ и $g \in T_H$, то J и все ее гомоморфные образы удовлетворяют тождеству $g = 0$, т. е. являются PI-алгебрами, откуда, принимая во внимание [23, теорема 2; 20, теорема 4], получаем, что каждая из J_α или является гомоморфным образом специальной йордановой алгебры, или представляет собой кольцо Алберта. Однако из равенства $S(J) = J$ следует, что для всех $\alpha \in \mathscr{I}$ имеет место $S(J_\alpha) = J_\alpha$, т. е. все J_α являются кольцами Алберта. Тогда предположение $f^n(J, J) = (0)$ влечет $f^n(J_\alpha, J_\alpha) = (0)$ для всех $\alpha \in \mathscr{I}$, что противоречит невырожденности f^n на кольцах Алберта.

Дословно повторяя доказательство предложения 5 из [10], можно получить, что $Z(J)$ — это $\mathfrak{D}$-простая алгебра. Действительно, существуют $x, y \in J$ такие, что $f(x, y)^p \neq 0$. Следовательно, $z = f(x, y)$ удовлетворяет следующим двум условиям: $z^p \neq 0$ и $z \in Z$. Ясно, что $\partial(z^p) = 0$ для всех $\partial \in \mathfrak{D}$, т. е. $z^p J \lhd_{\mathfrak{D}} J$ и $z^p J \neq (0)$, что влечет $z^p J = J$. С другой стороны, $I = \{x \in J \mid z^p x = 0\} \lhd_{\mathfrak{D}} J$, $I \neq J$, т. е. $I = (0)$. Получается, что $R_{z^p} : J \mapsto J$, $R_{z^p}(x) = x z^p$ — биекция. Тогда $1 = R_{z^p}^{-1}(z^p)$. Те же рассуждения показывают, что любой элемент Z либо обратим, либо нильпотентен индекса $\leqslant p$. Пусть $I \lhd_{\mathfrak{D}} Z$, $I \neq Z(J)$. Тогда каждый элемент I нильпотентен индекса $\leqslant p$. Ясно, что $IJ \lhd_{\mathfrak{D}} J$. Если $IJ = J$, то

$$1 = \sum_{k=1}^{m} i_k x_k, \quad \text{где } i_k \in I,\ x_k \in J,\ 1 \leqslant k \leqslant m,$$

$$1^{m(p-1)+1} = \sum i_1^{\alpha_1} \dots i_m^{\alpha_m} u_{\alpha_1, \dots,\ \alpha_m}(x_1, \dots, x_m),$$

где все $u_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$ — неассоциативные многочлены от $x_1, \dots, x_m$. Но в каждом слагаемом хотя бы одно из α_k не меньше p, т. е. $1^{m(p-1)+1} = 0$; противоречие. Тогда $IJ = (0)$, откуда следует, что $I = (0)$.

Таким образом, Z — ассоциативная коммутативная $\mathfrak{D}$-простая алгебра. Тогда по [6, теорема 2.1] $K \subseteq Z$, где K — поле, изоморфное $Z/\mathscr{L}(Z)$ посредством канонического гомоморфизма, что позволяет рассматривать F-алгебры J и Z как K-алгебры. Также можно считать поле K содержащимся в алгебре $\overline{J}$, так как $\mathscr{L}(Z) = \mathscr{L}(J) \cap Z$.

Теперь докажем, что алгебра $\overline{J}$ проста. Пусть $\overline{I} \lhd \overline{J}$, $I \lhd J$. Если $I \neq J$, то $f^p(I, I) = (0)$, поскольку в противном случае в I есть обратимый элемент. Ранее отмечено, что алгебра $\overline{J}$ является подпрямой суммой колец Алберта $J_\alpha, \alpha \in \mathscr{I}$. Ясно, что образ I при каноническом гомоморфизме J на J_α является идеалом в J_α, скажем I_α. С одной стороны, $f^p(I_\alpha, I_\alpha) = (0)$. С другой стороны, $Z(J_\alpha)^{-1}J_\alpha = H_\alpha$ — простая исключительная йорданова алгебра, на которой многочлен f^p невырожденный. Если $I_\alpha \neq (0)$, то $H_\alpha = Z(J_\alpha)^{-1}I_\alpha$, что влечет $f^p(H_\alpha, H_\alpha) = (0)$; противоречие. Значит, для любого $\alpha \in \mathscr{I}$ имеет место $I_\alpha = (0)$, т. е. $I \subseteq \mathscr{L}(J)$, в силу чего $\overline{I} = (0)$.

Ясно, что $\overline{J}$ центральна над K, так как $Z(\overline{J}) = f(\overline{J}, \overline{J})$ (см. [22, теорема 3]) и в то же время $f(J, J) \subseteq Z$, поэтому у каждого элемента из $Z(\overline{J})$ есть прообраз в Z, значит, $\overline{Z} = Z(\overline{J}) = K$.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 3 из [10].

Ранее отмечалось, что каждый элемент простой центральной йордановой алгебры удовлетворяет уравнению (3) с коэффициентами из центра этой алгебры. Следовательно, для $x \in J$ существуют натуральное число n_x и элементы $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x \in K$ такие, что $(x^3 + \alpha_x x^2 + \beta_x x + \gamma_x)^{n_x} = 0$, т. е. алгебра J алгебраична над K. Выше отмечено, что J является PI-алгеброй. Тогда по [20, теорема 5] J будет локально конечномерной алгеброй. Следовательно, в J существует конечномерная подалгебра J' такая, что $\overline{J'} = \overline{J}$. Понятно, что $\mathscr{L}(J') = \mathscr{L}(J) \cap J'$. По основной теореме Веддерберна для йордановых алгебр (см. [24, гл. 4.2]) существует подалгебра H алгебры J', изоморфная $J'/\mathscr{L}J'$. Так как H — простая исключительная йорданова алгебра, f^n невырожденный на H для всех натуральных n. Рассуждая аналогично доказательству $\mathfrak{D}$-простоты алгебры Z, можно убедиться, что единица алгебры J лежит в H. В [25] установлено, что если $\mathscr{J}$ — йорданова алгебра с единицей над полем $\mathscr{K}$ характеристики не 2, а $\mathscr{H}$ — ее конечномерная простая исключительная подалгебра с той же единицей, то имеет место равенство $\mathscr{J} = \mathscr{H} \otimes_{\mathscr{K}} Z(\mathscr{J})$. Применение последнего утверждения завершает доказательство. □

Автор выражает благодарность И. П. Шестакову за постановку задачи и внимание к работе и А. П. Пожидаеву за полезные обсуждения и помощь в оформлении данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zassenhaus H.* Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik (German) // Abh. Math. Sem. Hansische Univ. 1939. V. 13. P. 1–100.
2. *Albert A. A.* On commutative power-associative algebras of degree two // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 74, N 2. P. 323–343.
3. *Posner E. C.* Differentiably simple rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. V. 11, N 3. P. 337–343.
4. *Harper L. R.* On differentiably simple algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 100, N 1. P. 63–72.
5. *Block R. E.* Determination of the differentiably simple rings with a minimal ideal // Ann. Math. 1969. V. 90, N 3. P. 433–459.
6. *Yuan S.* Differentiably simple rings of prime characteristic // Duke Math. J. 1964. V. 31, N 4. P. 623–630.
7. *Martinez C., Zelmanov E. I.* Simple finite-dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic // J. Algebra. 2001. V. 236, N 2. P. 575–629.

8. *Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 675–716.
9. *Cheng S.-J.* Differentiably simple Lie superalgebras and representations of semisimple Lie superalgebras // J. Algebra. 1995. V. 173, N 1. P. 1–43.
10. *Попов А. А.* Дифференциально простые альтернативные алгебры // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 5. С. 670–689.
11. *Jacobson N.* Structure and representations of Jordan algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968. (AMS Colloq. Publ.; V. 39).
12. *Jacobson N.* Structure theory of Jordan algebras. Fayetteville: Univ. of Arkansas, 1981. (The Univ. Arkansas Lect. Notes Math.; V. 5).
13. *McCrimmon K.* A taste of Jordan algebras. New York: Springer-Verl., 2004.
14. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
15. *Скосырский В. Г.* Строго первичные некоммутативные йордановы алгебры // Исследования по теории колец и алгебр. Новосибирск: Наука, 1989. С. 131–163.
16. *Herstein I. N.* On the Lie and Jordan rings of a simple associative ring // Amer. J. Math. 1955. V. 77, N 2. P. 279–285.
17. *Слинько А. М.* Замечание о радикалах и дифференцированиях колец // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 6. С. 1395–1397.
18. *Зельманов Е. И.* Йордановы алгебры с условием конечности // Алгебра и логика. 1978. Т. 17, № 6. С. 693–703.
19. *Herstein I. N.* Jordan derivations of prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8, N 6. P. 1104–1110.
20. *Зельманов Е. И.* Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 6. С. 100–116.
21. *Зельманов Е. И.* О первичных йордановых алгебрах. II // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 1. С. 93–104.
22. *Racine M. L.* Central polynomials for Jordan algebras. I // J. Algebra. 1976. V. 41, N 1. P. 224–237.
23. *Зельманов Е. И.* О первичных йордановых алгебрах // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 2. С. 162–175.
24. *Schafer R. D.* An introduction to nonassociative algebras. New York: Acad. Press, 1966.
25. *Jacobson N.* A Kronecker factorization theorem for Cayley algebras and the exceptional simple Jordan algebra // Amer. J. Math. 1954. V. 76, N 2. P. 447–452.

Статья поступила 4 июля 2012 г.

Попов Александр Александрович,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
canmail@mail.ru