Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 517.51

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ УОЛША

С. А. Епископосян

Аннотация. Рассматриваются вопросы о равномерной сходимости жадного алгоритма по обобщенной системе Уолша Ψ_a, $a \geq 2$, после исправления функции на множестве малой меры.

Ключевые слова: обобщенная система Уолша, коэффициенты Фурье, равномерная сходимость, жадный алгоритм.

§ 1. Введение

Пусть $a \geq 2$ — фиксированное целое число и $\omega_a = e^{\frac{2\pi i}{a}}$.

Определение 1. *Обобщенной системой Радемахера порядка* a называют систему функций $\varphi_0, \dots, \varphi_n, \dots$, заданную следующим образом (см. [1]):

$$\varphi_0(x) = \omega_a^k, \quad x \in [k/a, (k+1)/a), \ k = 0, 1, \dots, a-1, \tag{1}$$

$$\varphi_n(x+1) = \varphi_n(x) = \varphi_0(a^n x), \quad n \geq 0. \tag{2}$$

Определение 2. Пусть $\psi_0(x) = 1$. Для любого натурального числа n рассмотрим представление

$$n = \alpha_1 a^{n_1} + \dots + \alpha_s a^{n_s}, \quad n_1 > \dots > n_s, \ s = 1, 2, \dots,$$

где $0 \leq \alpha_j < a$, $j = 1, 2, \dots, s$. Тогда n-ю *функцию обобщенной системы Уолша* определим следующим образом:

$$\psi_n(x) = \varphi_{n_1}^{\alpha_1}(x) \cdot \ldots \cdot \varphi_{n_s}^{\alpha_s}(x). \tag{3}$$

Система $\Psi_a = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — обобщенная система Уолша порядка a. Отметим, что Ψ_2 является классической системой Уолша, а система Ψ_a — частным случаем системы Виленкина.

Замечание. Обобщенная система Уолша Ψ_a, $a \geq 2$, является полной ортонормированной системой в $L^2[0,1)$ (см. [2]).

Основные свойства системы Ψ_a получены Кристенсоном, Пели, Файном, Ватари, Н. Виленкиным и другими математиками (см. [1–6]). В настоящей работе рассматриваются вопросы сходимости жадного алгоритма по системе Ψ_a после исправления функции на множестве малой меры. Отметим, что идея исправления функции на множестве малой меры с целью улучшения ее свойств берет начало от знаменитой теоремы Н. Н. Лузина (C-свойство), доказанной им в 1912 г. (см. [7]).

Теорема (Н. Н. Лузин). *Для каждой почти всюду конечной на* $[0,1]$ *измеримой функции* $f(x)$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют измеримое множество* E *с мерой* $|E| > 1-\varepsilon$ *и непрерывная на* $[0,1]$ *функция* $g(x)$*, совпадающая с* $f(x)$ *на* E.

В 1939 г. Д. Е. Меньшов [8] доказал следующую фундаментальную теорему (усиленное C-свойство).

Теорема (Д. Е. Меньшов). *Пусть* $f(x)$ *— измеримая функция, конечная почти всюду на* $[0,2\pi]$*. Каково бы ни было* $\varepsilon > 0$*, можно определить непрерывную функцию* $g(x)$*, совпадающую с* $f(x)$ *на некотором множестве* E*,* $|E| > 2\pi-\varepsilon$*, и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на* $[0,2\pi]$.

Далее в этом направлении важные результаты получены А. А. Талаляном, Прайсом, Р. И. Осиповым, Б. С. Кашиным, А. М. Олевским, М. Г. Григоряном и другими авторами (см. [9–14]).

Теперь напомним определение жадного (greedy) алгоритма.

Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — базис в некотором банаховом пространстве $\mathscr{X}$. Тогда каждый элемент $f \in \mathscr{X}$ разлагается в ряд

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)\varphi_n.$$

Перестановку неотрицательных целых чисел $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ назовем *убывающей*, если имеет место неравенство

$$|c_{\sigma(k)}(f)| \geq |c_{\sigma(k+1)}(f)|, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Множество таких перестановок обозначим через $D(f,\Phi)$. В случае строгих неравенств $D(f,\Phi)$ содержит только одну убывающую перестановку.

Определение 3. Для функции $f \in \mathscr{X}$ определим жадный аппроксимант по системе Φ следующим образом:

$$G_m(f) = G_m(f,\Phi,\sigma) = \sum_{k=1}^{m} c_{\sigma(k)}(f)\psi_{\sigma(k)}(x).$$

Последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f,\Phi,\sigma)\}_{m=1}^{\infty}$ известна как жадный алгоритм по системе Φ (см. обзорную статью В. Н. Темлякова [15]). Говорят, что жадный алгоритм функции f по системе Φ *сходится в* $\mathscr{X}$, если для любого $\sigma \in D(f,\Phi)$ последовательность $G_m(f)$ сходится к f по норме $\mathscr{X}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \|G_m(f) - f\|_{\mathscr{X}} = 0.$$

Отметим, что вопросы сходимости жадного алгоритма для банаховых пространств относительно нормированных базисов изучались многими математиками (см. [15–19]).

Ниже приведем некоторые результаты, относящиеся к настоящей работе.

В. Н. Темляков в [15] построил пример функции, принадлежащей всем L^p, $1 \leq p < 2$ (соответственно пример при $p > 2$), жадный алгоритм которой по тригонометрической системе расходится по мере (соответственно по метрике L^p, $p > 2$). В [20, 21] получены аналогичные результаты для классической системы Уолша Ψ_2.

Из результатов, полученных в [22, 23], следует, что для любого $1 \le p < \infty$ можно построить функцию $f(x) \in L^p[0,1)$, жадный алгоритм которой по обобщенной системе Уолша Ψ_a, $a \ge 2$, расходится в $L^p[0,1)$.

В связи с этим возникает следующий

Вопрос. *Можно ли изменить значения любой функции класса $L^p[0,1)$, $p \ge 1$, на множестве сколь угодно малой меры так, что жадный алгоритм вновь полученной функции по системе Ψ_a, $a \ge 2$, сходился бы к ней по метрике $L^p[0,1)$?*

В [24, 25] дается положительный ответ на поставленный вопрос для $p = 1$ и $2 \le p < \infty$.

Далее обозначим через $L^\infty[0,1)$ пространство конечных на $[0,1)$ измеримых функций с нормой $\|\cdot\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |\cdot|$, а через $\operatorname{spec}(f)$ — множество целых чисел k, для которых коэффициенты Фурье $c_k(f)$ функции f по системе Ψ_a ненулевые. При этих обозначениях для системы Ψ_2 в случае $p = \infty$ М. Г. Григоряном получены следующие результаты (см. [26]).

Теорема 1. *Для любых чисел $\varepsilon \in (0,1)$, $1 \le p \le \infty$ и функции $f \in L^p[0,1)$ можно найти функцию $g(x) \in L^\infty[0,1)$ с $|\{x \in [0,1); g \ne f\}| < \varepsilon$, жадный алгоритм которой по системе Ψ_2, $a \ge 2$, сходится к $g(x)$ равномерно на $[0,1)$.*

Теорема 2. *Для любых чисел $\varepsilon \in (0,1)$, $1 \le p \le \infty$ и функции $f \in L^p[0,1)$ можно найти функцию $g(x) \in L^\infty[0,1)$ с $|\{x \in [0,1); g \ne f\}| < \varepsilon$ такую, что последовательность $\{|c_k(g)| : k \in \operatorname{spec}(g)\}$ убывает.*

В настоящей работе обобщаются результаты М. Г. Григоряна для системы Ψ_a при любом $a \ge 2$, которые вытекают из следующей более сильной теоремы.

Теорема 3. *Для любых чисел $0 < \varepsilon < 1$, $1 \le p \le \infty$ и функции $f(x) \in L^p[0,1]$ существует функция $g(x) \in L^\infty[0,1)$ с $|\{x \in [0,1) : g(x) \ne f(x)\}| < \varepsilon$ такая, что ряд Фурье по системе Ψ_a, $a \ge 2$, сходится к $g(x)$ равномерно на $[0,1)$, а последовательность коэффициентов $\{|c_k(g)| : k \in \operatorname{spec}(g)\}$ убывает.*

§ 2. Доказательство основных лемм

Обозначим интервал ранга n относительно a следующим образом:

$$\Delta_m^{(k)} = \Delta_m^{(k)}(a) = [k/a^m, (k+1)/a^m), \quad k = 0, \dots, a^m - 1,\ m = 1, 2, \dots.$$

Свойство 1. Из определения 1 следует, что n-я функция Радемахера $\varphi_n(x)$ имеет период $\frac{1}{a^n}$ и постоянна на каждом интервале $\Delta_{m+1}^{(k)}$, $0 \le k < a^{m+1}$, при этом

$$\varphi_n(x) = \omega_a^k = e^{\frac{2\pi i k}{a}}, \quad x \in \Delta_{m+1}^{(k)}. \tag{4}$$

Свойство 2. Для любых натуральных чисел n, l и $l' = l (\operatorname{mod} a)$ имеем

$$(\varphi_n(x))^l \equiv (\varphi_n(x))^{l'}. \tag{5}$$

Обозначим

$$\Omega_a = \{1, \omega_a, \omega_a^2, \dots, \omega_a^{a-1}\}. \tag{6}$$

Свойство 3. Из определения 2 следует, что

$$\psi_i(x)\psi_j(a^s x) = \psi_{ja^s+i}(x) \quad \text{при } 0 \le i, j < a^s, \tag{7}$$

в частности,

$$\psi_{a^k+j}(x) = \varphi_k(x)\psi_j(x), \quad \text{если } 0 \le j \le a^k - 1. \tag{8}$$

Далее для $m = 1, 2, \dots$ и $1 \le k \le a^m$ положим $\Delta_m^{(k)} = \left[\frac{k-1}{a^m}, \frac{k}{a^m}\right)$ и рассмотрим функции

$$\mathscr{I}_m^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0,1] \setminus \Delta_m^{(k)}, \\ 1 - a^m & \text{при } x \in \Delta_m^{(k)}. \end{cases} \tag{9}$$

Продолжим функции периодически на прямую $\mathbb{R}^1$ с периодом 1.

Обозначим через $\chi_E(x)$ характеристическую функцию множества E, т. е.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in E, \\ 0 & \text{при } x \notin E. \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, что

$$\mathscr{I}_m^{(k)}(x) = \psi_0(x) - a^m \chi_{\Delta_m^{(k)}}(x) \tag{11}$$

и для натуральных чисел $m \ge 1$ и $1 \le i \le a^m$ коэффициенты Фурье функций $\chi_{\Delta_m^{(k)}}(x)$ и $\mathscr{I}_m^{(k)}(x)$ определяются следующим образом:

$$a_i(\chi_{\Delta_m^{(k)}}) = \int_0^1 \chi_{\Delta_m^{(k)}}(t)\overline{\psi_i(t)}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{при } i \ge a^m, \\ \mathscr{A}\frac{1}{a^m} & \text{при } 0 \le i < a^m, \end{cases} \tag{12}$$

$$b_i\big(\mathscr{I}_m^{(k)}\big) = \int_0^1 \mathscr{I}_m^{(k)}(t)\overline{\psi_i(t)}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{при } i = 0 \text{ и } i \ge a^m, \\ -\mathscr{B} & \text{при } 1 \le i < a^m, \end{cases} \tag{13}$$

где $\mathscr{A}, \mathscr{B} = \mathrm{const} \in \Omega_a$ и $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}| = 1$. Значит,

$$\chi_{\Delta_m^{(k)}}(x) = \sum_{i=0}^{a^m-1} a_i(\chi_{\Delta_m^{(k)}})\psi_i(x), \tag{14}$$

$$\mathscr{I}_m^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{a^m-1} b_i\big(\mathscr{I}_m^{(k)}\big)\psi_i(x). \tag{15}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Для любых чисел $\gamma \ne 0$, $N_0 > 1$, $\varepsilon \in (0,1)$ и интервала вида $\Delta = \Delta_m^{(k)} = \left[\frac{k-1}{a^m}, \frac{k}{a^m}\right)$, $i = 1, \dots, a^m$, существуют измеримое множество $E \subset \Delta$ и полином $P(x)$ по системе Ψ_a вида*

$$P(x) = \sum_{k=N_0}^{N} c_k \psi_k(x),$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

1) *коэффициенты $\{c_k\}_{k=N_0}^{N}$ равны 0 или $-\mathscr{K}\gamma|\Delta|$, где $\mathscr{K} = \mathrm{const} \in \Omega_a$, $|\mathscr{K}| = 1$;*

2) *$|E| > (1-\varepsilon)|\Delta|$;*

3) $P(x) = \begin{cases} \gamma & \textit{при } x \in E, \\ 0 & \textit{при } x \notin \Delta; \end{cases}$

4) $\max\limits_{N_0 \le M \le N} \left\| \sum\limits_{k=N_0}^{M} c_k \psi_k(x) \right\|_\infty < \frac{a}{\varepsilon}|\gamma|$.

Доказательство. Возьмем натуральные числа ν_0 и s такие, что

$$\nu_0 = \left[\log_a \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1; \quad s = [\log_a N_0] + m. \tag{16}$$

Определим числа c_n, a_i, b_j и полином $P(x)$:

$$P(x) = \gamma \chi_{\Delta_m^{(k)}}(x) \mathscr{I}_{\nu_0}^{(1)}(a^s x), \quad x \in [0,1], \tag{17}$$

$$c_n = c_n(P) = \int\limits_0^1 P(x)\overline{\psi_n}(x)\,dx, \quad n \ge 0, \tag{18}$$

$$a_i = a_i(\chi_{\Delta_m^{(k)}}),\ 0 \le i < a^m, \quad b_j = b_j\big(\mathscr{I}_{\nu_0}^{(1)}\big),\ 1 \le j < a^{\nu_0}. \tag{19}$$

Учитывая (7), (12)–(15) и (17)–(19), заключаем, что полином $P(x)$ имеет следующий вид:

$$P(x) = \gamma \sum_{i=0}^{a^m-1} a_i \psi_i(x) \sum_{j=1}^{a^{\nu_0}-1} b_j \psi_j(a^s x)$$

$$= \gamma \sum_{j=1}^{a^{\nu_0}-1} b_j \sum_{i=0}^{a^m-1} a_i \psi_{ja^s+i}(x) = \sum_{k=N_0}^{N} c_k \psi_k(x), \tag{20}$$

где

$$c_k = c_k(P) = \begin{cases} -\mathscr{K}\frac{\gamma}{a^m} \text{ или } 0 & \text{при } k \in [N_0, N], \\ 0 & \text{при } k \notin [N_0, N], \end{cases} \tag{21}$$

$$\mathscr{K} \in \Omega_a, \quad |\mathscr{K}| = 1, \quad N = a^{s+\nu_0} + a^m - a^s - 1. \tag{22}$$

Положим $E = \{x \in \Delta : P(x) = \gamma\}$. Из (10), (11) и (17) получим

$$|E| = a^{-m}(1 - a^{-\nu_0}) > (1-\varepsilon)|\Delta|,$$

$$P(x) = \begin{cases} \gamma & \text{при } x \in E, \\ \gamma(1 - a^{\nu_0}) & \text{при } x \in \Delta \setminus E, \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta. \end{cases}$$

Пусть $M \in [N_0, N]$. Тогда для некоторых чисел $j_0 \in [1, a^{\nu_0}]$ и $i_0 \in [0, a^m]$ имеем (см. (19)–(22))

$$\sum_{k=N_0}^{M} c_k \psi_k(x) = \gamma \left(\sum_{j=1}^{j_0-1} b_j \left[\sum_{i=0}^{a^{i_0}-1} a_i \varphi_i(x) \right] \psi_j(a^s x) \right) + \gamma b_{j_0} \psi_{j_0}(a^s x) \sum_{i=0}^{i_0-1} a_i \varphi_i(x).$$

Отсюда, учитывая соотношения (12)–(15), получим

$$\left| \sum_{k=N_0}^{M} c_k \psi_k(x) \right| \le |\gamma| \left(\sum_{j=1}^{j_0-1} |b_j| \chi_\Delta(x) + |b_{j_0}| \sum_{i=0}^{i_0-1} |a_i| \right)$$

$$= |\gamma| \left((j_0 - 1)\chi_\Delta(x) + \frac{i_0}{a^m} \right) \le \begin{cases} a^{\nu_0}|\gamma| & \text{при } x \in \Delta, \\ |\gamma| & \text{при } x \in [0,1) \setminus \Delta; \end{cases}$$

$$\max_{N_0 \le M \le N} \left\| \sum_{k=N_0}^{M} c_k \psi_k(x) \right\|_\infty < \frac{a^2}{\varepsilon}|\gamma|.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любых чисел* $N_0 > 1$ $(N_0 \in \mathscr{N})$, ε, $\delta \in (0,1)$ *и полинома* $f(x)$ *по системе* Ψ_a *существуют измеримое множество* $E \subset [0,1)$ *и полиномы* $P(x)$ *по системе* Ψ_a *вида*

$$P(x) = \sum_{j=N_0}^{N} c_j \psi_j(x),$$

удовлетворяющие условиям:

1) $0 \le |c_j| < \delta$ *и ненулевые коэффициенты* $\{|c_j|\}_{j=N_0}^{N}$ *убывают;*
2) $|E| > 1 - \varepsilon$;
3) $P(x) = f(x)$ *для всех* $x \in E$;
4) $\max\limits_{N_0 \le m \le N} \Big\| \sum\limits_{j=N_0}^{m} c_j \psi_j \Big\|_\infty < \frac{2a}{\varepsilon} \|f\|_\infty$.

Доказательство. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=0}^{M} b_k \psi_k(x) = \sum_{s=1}^{m} \gamma_s \chi_{\Delta_s}(x), \quad \sum_{s=1}^{m} |\Delta_s| = 1, \tag{23}$$

где Δ_s — непересекающиеся интервалы вида $\Delta_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, a^n$.

Без ограничения общности можно предположить, что

$$\delta > |\gamma_1||\Delta_1| > \dots > |\gamma_s||\Delta_s| > \dots > |\gamma_m||\Delta_m| > 0. \tag{24}$$

Последовательным применением леммы 1 можно определить множества $E_s \subset \Delta_s$ и полиномы

$$P_s(x) = \sum_{j=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_j \psi_j(x), \quad s = 1, 2, \dots, m, \tag{25}$$

которые для всех $1 \le s \le m$ удовлетворяют следующим условиям:

$$c_j = 0 \quad \text{или} \quad -\mathscr{K} \gamma_s |\Delta_s|, \quad \text{где } j \in [N_{s-1}, N_s), \ \mathscr{K} \in \Omega_a, \ |\mathscr{K}| = 1, \tag{26}$$

$$|E_s| > (1 - \varepsilon)|\Delta_s|, \tag{27}$$

$$P_s(x) = \begin{cases} \gamma_s & \text{при } x \in E_s, \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta_s, \end{cases} \tag{28}$$

$$\max_{N_{s-1} \le m \le N_s} \Bigg\| \sum_{j=N_{s-1}}^{m} c_j \psi_j \Bigg\|_\infty < a \frac{|\gamma_s|}{\varepsilon}. \tag{29}$$

Определим множество E и полином $P(x)$ следующим образом:

$$P(x) = \sum_{s=1}^{m} P_s(x) = \sum_{j=N_0}^{N} c_j \psi_j(x), \quad N = N_{m-1}, \tag{30}$$

$$E = \bigcup_{s=1}^{m} E_s. \tag{31}$$

Учитывая соотношения (23)–(28), (30) и (31), получим условия: $0 \le |c_j| < \delta$ и ненулевые коэффициенты $\{|c_j|\}_{j=N_0}^{N}$ убывают, $P(x) = f(x)$ при $x \in E$, $|E| > 1 - \varepsilon$, т. е. утверждения 1–3 леммы 2 выполнены. Теперь проверим выполнение утверждения 4.

Для любого M, $N_0 \le M \le N$, определим s_0, $1 \le s_0 \le m$, такое, что $N_{s_0-1} < M \le N_{s_0}$. Тогда из (25)и (30) имеем

$$\sum_{j=N_0}^{M} c_j \psi_j(x) = \sum_{s=1}^{s_0-1} P_s(x) + \sum_{j=N_{s_0-1}}^{M} c_j \psi_j(x).$$

Отсюда и из соотношений (29)–(31) получим

$$\max_{N_0 \le m \le N} \left\| \sum_{j=N_0}^{m} c_j \psi_j \right\|_\infty < \frac{2a}{\varepsilon} \|f\|_\infty.$$

Лемма 2 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Пусть даны функция $f(x) \in L^\infty[0,1)$ и число $\varepsilon \in (0,1)$. Нетрудно видеть, что можно найти последовательность полиномов $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ по системе Ψ_a такую, что

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - f(x) \right\|_\infty dx = 0, \quad \|f_n(x)\|_\infty \le \varepsilon^{\frac{1}{q}} a^{-2n}. \tag{32}$$

Последовательно применяя лемму 2, можем определить последовательности множеств $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ и полиномов по системе Ψ_a вида

$$P_n(x) = \sum_{k=M_{n-1}}^{M_n - 1} b_k \psi_{s_k}(x), \quad n \ge 1, \ M_n \nearrow, \tag{33}$$

такие, что для всех $n \ge 1$ выполняются следующие условия:

$$P_n(x) = f_n(x) \quad \text{для } x \in E_n, \tag{34}$$

$$|E_n| > 1 - \varepsilon a^{-n}, \tag{35}$$

$$|b_{k+1}| < |b_k| < \min\{|b_{M_{n-1}-1}|; a^{-n}\} \quad \text{для всех } k \in [M_{n-1}; M_n), \tag{36}$$

$$\max_{M_{n-1} \le m \le M_n} \left\| \sum_{k=M_{n-1}}^{m} b_k \psi_{s_k} \right\|_\infty < \frac{2a}{\varepsilon} \|f_n\|_\infty. \tag{37}$$

Положим

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \psi_{s_k}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=M_{n-1}}^{M_n - 1} b_k \psi_{s_k}(x) \right), \tag{38}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x), \quad E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{39}$$

Учитывая соотношения (32)–(35), (37) и (41), получим

$$g(x) = f(x) \quad \text{при } x \in E, \quad |E| > 1 - \varepsilon, \quad g(x) \in L^\infty[0,1).$$

Из (32), (36)–(39) следует, что ряд (41) сходится равномерно на $[0,1)$ к $g(x)$, значит,

$$b_k = \int_0^1 g(x) \psi_{s_k}(x)\, dx = c_{s_k}(g), \quad k \ge 1,$$

и $\{|c_k(g)|,\ k \in \operatorname{spec}(g)\}$ убывают. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chrestenson H. E.* A class of generalized Walsh functions // Pacific J. Math. 1955. V. 45. P. 17–31.
2. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша, теория и применения. М.: Наука, 1987.
3. *Paley R. E. A. C.* A remarkable set of orthogonal functions // Proc. London Math. Soc. 1932. V. 34. P. 241–279.

4. *Fine J.-N. J.* The generalized Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 69. P. 66–77.
5. *Watari C.* On generalized Walsh–Fourier series // Tohoku Math. J. 1958. V. 10. P. 211–241.
6. *Vilenkin N.* On a class of complete orthonormal systems // AMS Transl. 1963. V. 28. P. 1–35.
7. *Лузин Н. Н.* К основной теореме интегрального исчисления // Мат. сб. 1912. Т. 28, № 2. С. 266–294.
8. *Menchoff D.* Sur la convergence uniforme des series de Fourier // Мат. сб. 1942. V. 53, N 1–2. P. 67–96.
9. *Талалян А. А.* О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции // Мат. заметки. 1983. Т. 33, № 5. С. 715–722.
10. *Price J. J.* Walsh series and adjustment of functions on small sets // Illinois J. Math. 1969. V. 13. P. 131–136.
11. *Осипов Р. И.* О сходимости рядов по системе Уолша // Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. 1966. Т. 1, № 4. С. 270–283.
12. *Кашин Б. С., Кошелева Г. Г.* Об одном подходе к теоремам об исправлении // Вестн. МГУ. Сер. I. Математика, механика. 1988. № 1. С. 6–8.
13. *Олевский А. М.* Модификация функций и ряды Фурье // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, № 5. С. 157–193.
14. *Grigorian M. G.* On the convergence of Fourier series in the metric of L^1 // Anal. Math. 1991. V. 17, N 3. P. 211–237.
15. *Temlyakov V. N.* Nonlinear methods of approximation // Found. Comput. Math. 2003. V. 3. P. 33–107.
16. *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Some remarks on greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 1996. V. 5. P. 173–187.
17. *Konyagin S. V., Temlyakov V. N.* A remark on greedy approximation in Banach spaces // East J. Approx. 1999. V. 5, N 1. P. 1–15.
18. *Körner T. W.* Divergence of decreasing rearranged Fourier series // Ann. Math. 1996. V. 144. P. 167–180.
19. *Wojtaszczyk P.* Greedy algorithm for general biorthogonal systems // J. Approx. Theory. 2000. V. 107. P. 293–314.
20. *Episkoposian S. A.* On the divergence of greedy algorithms with respect to Walsh subsystems in L^1 // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 2007. V. 66. P. 1782–1787.
21. *Амирханян Г. М.* О сходимости гриди алгоритма по системе Уолша в пространстве L^p // Изв. НАН Армении. 2008. Т. 43, № 3. С. 127–134.
22. *Gribonval R., Nielsen M.* On the quasi-greedy property and uniformly bounded orthonormal systems / http://www.math.auc.dk/research/reports/R-2003-09.pdf.
23. *Episkoposian S. A.* On greedy algorithms with respect to generalized Walsh system // Global J. Pure Appl. Math. 2007. V. 3. P. 77–86.
24. *Episkoposian S. A.* L^1-convergence of greedy algorithm by generalized Walsh system // Banach J. Math. Anal. 2012. V. 6, N 1. P. 161–174.
25. *Episkoposian S. A., Grigorian M. G.* L^p-convergence of greedy algorithm by generalized Walsh system // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 389. P. 1374–1379.
26. *Grigorian M. G.* Uniform convergence of the greedy approximation with respect to the Walsh system // Studia Math. 2010. V. 198. P. 197–206.

Статья поступила 25 октября 2012 г.

Епископосян Серго Арменакович
Гос. инженерный университет Армении,
ул. Теряна, 105, Ереван 0009, Армения
`sergoep@ysu.am`