Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 512.54

О СЛАБО S–ВЛОЖЕННЫХ И СЛАБО τ–ВЛОЖЕННЫХ ПОДГРУППАХ

С. Чен, В. Го

Аннотация. Пусть G — конечная группа. Подгруппа H группы G называется слабо S-вложенной в G, если в G существует нормальная подгруппа K такая, что HK S-квазинормальна в G и $H \cap K \leq H_{seG}$, где H_{seG} — подгруппа, порожденная всеми подгруппами группы H, которые S-квазинормально вложены в G. Будем говорить, что подгруппа H группы G *слабо τ-вложена в* G, если существует нормальная подгруппа K группы G такая, что HK S-квазинормальна в G и $H \cap K \leq H_{\tau G}$, где $H_{\tau G}$ — подгруппа, порожденная всеми подгруппами группы H, которые τ-квазинормальны в G. В настоящей работе исследуются свойства слабо S-вложенных и слабо τ-вложенных подгрупп. Также эти понятия используются для изучения строения конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, слабо S-вложенная подгруппа, слабо τ-вложенная подгруппа.

1. Введение

Все группы, рассматриваемые в статье, конечны, и G всегда означает конечную группу. Обозначения и термины, не введенные в тексте, стандартны, и их можно найти в [1–3].

Напомним, что подгруппа H группы G называется S-*квазинормальной* (S-*перестановочной* или π-*квазинормальной*) в G, если H перестановочна с любой силовской подгруппой группы G. Это понятие было введено Кегелем [4] в 1962 г. и впоследствии изучалось многими авторами. В 1998 г. Баллестер-Болинше и Педраса-Агилера [5] рассмотрели более общее понятие S-квазинормальной вложенности: подгруппа H группы G называется S-*квазинормально вложенной* в G, если любая силовская подгруппа группы H является силовской подгруппой некоторой S-квазинормальной подгруппы группы G. Также рассматривались и другие обобщения. Например, в 2008 г. Ли и др. [6] ввели понятие SS-квазинормальности: подгруппа H группы G называется SS-*квазинормальной* в G, если в G существует добавление B к H такое, что H перестановочна с любой силовской подгруппой группы B. В 1987 г. Чен [7] ввел понятие S-полуперестановочности: подгруппа H группы G называется S-*полуперестановочной* в G, если H перестановочна с любой силовской p-подгруппой группы G такой, что $(p, |H|) = 1$. Кроме того, в 2008 г. В. О. Лукьяненко и А. Н. Скиба [8] предложили понятие τ-квазинормальности: подгруппа H группы G называется τ-*квазинормальной* в G, если H перестановочна со всеми силовскими q-подгруппами Q группы G такими, что $(q, |H|) = 1$ и $(|H|, |Q^G|) \neq 1$.

Research is supported by a NNSF grant of China (grant #11071229), and Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant 20113402110036).

Несложно заметить, что любая SS-квазинормальная или S-полуперестановочная подгруппа группы G будет τ-квазинормальной в G. Действительно, из S-полуперестановочности τ-квазинормальность очевидно следует по определению. Предположим, что подгруппа H группы G SS-квазинормальна в G. Тогда в G есть подгруппа B такая, что $G = HB$ и H перестановочна с любой силовской подгруппой группы B. Пусть P — силовская p-подгруппа группы G такая, что $(p, |H|) = 1$. Существует элемент $h \in H$ такой, что $P^h \leq B$. Тогда $HP^h = P^hH$ и, значит, $HP = PH$. Таким образом, H S-полуперестановочна и, как следствие, τ-квазинормальна в G.

В 2009 г. Го, Шум и А. Н. Скиба [9] предложили определение S-вложенной подгруппы: подгруппа H группы G называется S-*вложенной* в G, если существует нормальная подгруппа K группы G такая, что HK S-квазинормальна в G и $H \cap K \leq H_{sG}$, где H_{sG} — подгруппа, порожденная всеми подгруппами группы H, которые S-квазинормальны в G.

В продолжение исследований S-квазинормально вложенных подгрупп в 2011 г. Ли и др. [10] ввели следующее понятие слабой S-вложенности.

Определение 1.1. Подгруппа H группы G называется *слабо* S-*вложенной* в G, если существует нормальная подгруппа K группы G такая, что HK S-квазинормальна в G и $H \cap K \leq H_{seG}$, где H_{seG} — подгруппа, порожденная всеми подгруппами группы H, которые S-квазинормально вложены в G.

Определение 1.2. Подгруппа H группы G называется *слабо* τ-*вложенной* в G, если существует нормальная подгруппа K группы G такая, что HK S-квазинормальна в G и $H \cap K \leq H_{\tau G}$, где $H_{\tau G}$ — подгруппа, порожденная всеми подгруппами группы H, которые τ-квазинормальны в G.

Очевидно, любая τ-квазинормальная подгруппа и любая S-вложенная подгруппа группы G будут слабо τ-вложенными в G. Следовательно, любая S-квазинормальная, SS-квазинормальная или S-полуперестановочная подгруппа группы G также слабо τ-вложена в G. Однако, как показывают следующие два примера, в общем случае обратное неверно.

Пример 1.3. Пусть $G = S_4$ — симметрическая группа степени 4 и $H = \langle(14)\rangle$. Возьмем $Q = \langle(123)\rangle \in \mathrm{Syl}_3(G)$. Тогда, очевидно, $Q^G = A_4$, где A_4 — знакопеременная группа степени 4. Поскольку $HQ \neq QH$, группа H не τ-квазинормальна в G. Однако в силу того, что $G = HA_4$ и $H \cap A_4 = 1$, группа H слабо τ-вложена в G.

Пример 1.4. Пусть $G = A_5$ — знакопеременная группа степени 5 и $H = A_4$. В силу простоты группы A_5 единственные нормальные подгруппы группы G — это 1 и G. Пусть P — силовская 2-подгруппа группы G, содержащая $\langle(15)\rangle$. Поскольку $PH \neq HP$, группа H не S-квазинормальна в G и, значит, H не S-вложена в G. Однако $G = H\langle(12345)\rangle$, поэтому H τ-квазинормальна в G, следовательно, она слабо τ-вложена в G.

Более того, следующие два примера демонстрируют, что слабая S-вложенность и слабая τ-вложенность не зависят друг от друга.

Пример 1.5. Пусть $G = A_5$ — знакопеременная группа степени 5 и $H = \langle(123)\rangle \in \mathrm{Syl}_3(G)$. Поскольку любая холлова подгруппа S-квазинормально вложена в G, группа H слабо S-вложена в G. С другой стороны, пусть $Q = \langle(12345)\rangle \in \mathrm{Syl}_5(G)$. Тогда $Q^G = G$. Ясно, что HQ не подгруппа в G. Значит, H не τ-квазинормальна в G. В силу того, что $H_{\tau G}$ τ-квазинормальна в G (см. лемму 2.7(1) ниже), получаем, что H не является слабо τ-вложенной в G.

Пример 1.6. Пусть $A = A_5$ — знакопеременная группа степени 5 и $B = \mathrm{Inn}(A_5) \cong A_5$. Положим $G = A \rtimes B$ и $H = A \rtimes \langle (12)(34) \rangle$. Поскольку $\pi(G) = \pi(H)$, группа H будет τ-квазинормальной в G и, значит, слабо τ-вложенной в G. С другой стороны, $Z(A_5) = 1$, поэтому $B \ntrianglelefteq G$. Очевидно, что субнормальные подгруппы группы G — это в точности 1, A и G. Предположим, что H слабо S-вложена в G. Тогда существует нормальная подгруппа K группы G такая, что HK S-квазинормальна в G и $H \cap K \leq H_{seG}$. Поскольку H не S-квазинормальна в G (см. лемму 2.1(1) ниже), единственная возможность — это $K = G$. Следовательно, $H = H_{seG}$. Для любой неединичной подгруппы L группы H, S-квазинормально вложенной в G, и любой неединичной силовской подгруппы D группы L существует S-квазинормальная подгруппа U группы G такая, что $D \in \mathrm{Syl}(U)$. Из того, что $\pi(L) \subseteq \pi(|G : L|)$, и леммы 2.1(1) вытекает равенство $U = A$ и, значит, $L \leq A$. Следовательно, $H = H_{seG} \leq A$; противоречие. Таким образом, H не является слабо S-вложенной в G.

Цель настоящей работы — изучение строения конечных групп с использованием понятий слабо S-вложенности и слабо τ-вложенности. Для краткости будем говорить, что подгруппа H группы G *удовлетворяет условию* ($\triangle$) в G, если H слабо S-вложена или слабо τ-вложена в G.

2. Предварительные леммы

В статье $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{U}$ обозначают классы конечных нильпотентных, p-нильпотентных и сверхразрешимых групп соответственно. Для непустого класса групп $\mathfrak{F}$ через $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ (и, как правило, через $Z_\infty(G)$ вместо $Z_{\mathfrak{N}}(G)$) обозначается $\mathfrak{F}$-гиперцентр группы G, т. е. произведение всех нормальных подгрупп L группы G, G-главные факторы H/K которых удовлетворяют условию $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$. Также через $|G|_p$ обозначается порядок силовской p-подгруппы группы G.

Лемма 2.1 [4, 11]. *Предположим, что H S-квазинормальна в G, $U \leq G$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(1) *H субнормальна в G.*

(2) *H/H_G нильпотентна.*

(3) *$H \cap U$ S-квазинормальна в U.*

(4) *HN/N S-квазинормальна в G/N.*

(5) *Если H — p-подгруппа группы G, то $O^p(G) \leq N_G(H)$.*

Лемма 2.2 [12, следствие 1]. *Предположим, что A и B — S-квазинормальные подгруппы в G. Тогда $\langle A, B \rangle$ и $A \cap B$ также S-квазинормальны в G.*

Лемма 2.3. *Предположим, что H — S-квазинормальная подгруппа в G и P — силовская p-подгруппа в H, где p — простой делитель числа $|H|$. Если $H_G = 1$, то P S-квазинормальна в G.*

Доказательство. Это утверждение легко выводится из леммы 2.1(2) и [12, предложение B].

Лемма 2.4 [5, лемма 1]. *Предположим, что H — S-квазинормально вложенная подгруппа в G, $U \leq G$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(1) *Если $H \leq U$, то H — S-квазинормально вложенная подгруппа в U.*

(2) HN — S-*квазинормально вложенная подгруппа* G, *и* HN/N — S-*квазинормально вложенная подгруппа* G/N.

Следующая лемма является прямым следствием леммы 2.4.

Лемма 2.5. *Предположим, что* $H \le U \le G$ *и* $N \trianglelefteq G$. *Тогда*
(1) $H_{seG} \le H_{seU}$;
(2) $H_{seG}N/N \le (HN/N)_{se(G/N)}$.

Лемма 2.6. *Предположим, что* H — τ-*квазинормальная подгруппа в* G, $U \le G$ *и* $N \trianglelefteq G$. *Тогда выполнены следующие утверждения.*
(1) *Если* $H \le U$, *то* H τ-*квазинормальна в* U.
(2) *Если* $\pi(HN/N) = \pi(H)$, *то* HN/N τ-*квазинормальна в* G/N.
(3) *Если* $(|H|, |N|) = 1$, *то* HN/N τ-*квазинормальна* G/N.

Доказательство. См. [13, лемма 2.2] для (1) и (3). Докажем (2). Пусть $Q/N \in \mathrm{Syl}_q(G/N)$, причем $(|HN/N|, |(Q/N)^{(G/N)}|) \ne 1$ и $q \notin \pi(HN/N) = \pi(H)$. Тогда для некоторой силовской q-подгруппы G_q группы G имеем $Q = G_qN$. Поскольку $(Q/N)^{(G/N)} = Q^G/N = (G_qN)^G/N = G_q^GN/N \cong G_q^G/G_q^G \cap N$, получаем, что $\bigl(|H|, \bigl|G_q^G\bigr|\bigr) \ne 1$. Следовательно, по условию леммы выполнено $(HN/N)(Q/N) = HG_qN/N = G_qHN/N = (Q/N)(HN/N)$.

Из леммы 2.6 непосредственно следует

Лемма 2.7. *Предположим, что* $H \le U \le G$ *и* $N \trianglelefteq G$. *Тогда выполнены следующие утверждения.*
(1) [13, лемма 2.3(1)]. *Если* H — p-*подгруппа, то* $H_{\tau G}$ τ-*квазинормальна в* G *и* $H_G \le H_{\tau G}$.
(2) [13, лемма 2.3(2)]. $H_{\tau G} \le H_{\tau U}$.
(3) *Если* H — p-*подгруппа, то* $H_{\tau G}N/N \le (HN/N)_{\tau(G/N)}$.
(4) *Если* $(|H|, |N|) = 1$, *то* $H_{\tau G}N/N \le (HN/N)_{\tau(G/N)}$.

Лемма 2.8. *Пусть* P — p-*подгруппа в* G. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*
(1) P S-*квазинормальна в* G.
(2) [14, лемма 2.4]. $P \le O_p(G)$ *и* P S-*квазинормально вложена в* G.
(3) [13, лемма 2.2(4)]. $P \le O_p(G)$ *и* P τ-*квазинормальна в* G.

Лемма 2.9 [10, лемма 2.4]. *Предположим, что* H *слабо* S-*вложена в* G, $U \le G$ *и* $N \trianglelefteq G$.
(1) *Если* $H \le U$, *то* H *слабо* S-*вложена в* U.
(2) *Если* $N \le H$, *то* H/N *слабо* S-*вложена в* G/N.
(3) *Если* $(|H|, |N|) = 1$, *то* HN/N *слабо* S-*вложена в* G/N.

Сформулируем некоторые основные свойства слабо τ-вложенных подгрупп.

Лемма 2.10. *Предположим, что* H *слабо* τ-*вложена в* G, $U \le G$ *и* $N \trianglelefteq G$.
(1) *Если* $H \le U$, *то* H *слабо* τ-*вложена в* U.
(2) *Если* H — p-*подгруппа и* $N \le H$, *то* H/N *слабо* τ-*вложена в* G/N.
(3) *Если* $(|H|, |N|) = 1$, *то* HN/N *слабо* τ-*вложена в* G/N.

Доказательство. По условию существует нормальная подгруппа K группы G такая, что HK S-квазинормальна в G и $H \cap K \le H_{\tau G}$.

(1) $K \cap U \trianglelefteq U$ и группа $H(K \cap U) = HK \cap U$ S-квазинормальна в U по лемме 2.1(3). В силу леммы 2.7(2) получаем, что $H \cap (K \cap U) = H \cap K \le H_{\tau G} \le H_{\tau U}$. Следовательно, H слабо τ-вложена в U.

(2) $KN/N \trianglelefteq G/N$ и группа $(H/N)(KN/N) = HKN/N$ S-квазинормальна в G/N по лемме 2.1(4). Поскольку $(H/N) \cap (KN/N) = (H \cap K)N/N$, по лемме 2.7(3) выполнено $(H/N) \cap (KN/N) \leq H_{\tau G}N/N \leq (H/N)_{\tau(G/N)}$. Значит, H/N слабо τ-вложена в G/N.

(3) $KN/N \trianglelefteq G/N$ и группа $(HN/N)(KN/N) = HKN/N$ S-квазинормальна в G/N по лемме 2.1(4). Несложно заметить, что $(|N \cap HK : N \cap H|, |N \cap HK : N \cap K|) = 1$. Тогда $N \cap HK = (N \cap H)(N \cap K)$ и, значит, $HN \cap KN = (H \cap K)N$ по [15, гл. A, лемма 1.2]. Из леммы 2.7(4) следует, что $(HN/N) \cap (KN/N) = (H \cap K)N/N \leq H_{\tau G}N/N \leq (HN/N)_{\tau(G/N)}$. Таким образом, HN/N слабо τ-вложена в G/N.

Лемма 2.11 [3, лемма 3.4.7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Предположим, что $G \notin \mathfrak{F}$, но любая собственная подгруппа группы G лежит в $\mathfrak{F}$ и, кроме того, в G есть нормальная силовская p-подгруппа $G_p \neq 1$, где p — простой делитель числа $|G|$. Тогда*

(1) $G_p = G^{\mathfrak{F}}$;

(2) $F(G) = F_p(G) = G_p\Phi(G)$.

Лемма 2.12. *Пусть p — простой делитель числа $|G|$ такой, что*

$$(|G|, (p-1)(p^2-1)\dots(p^n-1)) = 1.$$

Если $H \trianglelefteq G$, $p^{n+1} \nmid |H|$ для некоторого числа $n \geq 1$ и G/H p-нильпотентна, то G также p-нильпотентна. В частности, если $p^{n+1} \nmid |G|$, то G p-нильпотентна.

Доказательство. Предположим, что заключение неверно, и пусть (G, H) — контрпример с наименьшей суммой $|G|+|H|$. Для любой нетривиальной подгруппы F группы G пара $(F, H \cap F)$ удовлетворяет условию теоремы. Тогда в силу выбора пары (G, H) группа F p-нильпотентна. Отсюда следует, что G — минимальная не p-нильпотентная группа, а значит, минимальная ненильпотентная группа ввиду [1, гл. IV, теорема 5.4]. По [3, теорема 3.4.11] и лемме 2.11 имеем $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}_p} \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $(G/N, HN/N)$ удовлетворяет условию теоремы. Значит, G/N p-нильпотентна в силу выбора пары (G, H). Следовательно, $P = G^{\mathfrak{N}_p} = N$ — элементарная абелева группа. Ясно, что $P \leq H$, поэтому $|P| \leq p^n$. Поскольку $N_G(P)/C_G(P) \lesssim \mathrm{Aut}(P)$, выполнено $|N_G(P)/C_G(P)| \mid (p-1)(p^2-1)\dots(p^n-1)$. Значит, $N_G(P) = C_G(P)$. Таким образом, по тереме Бернсайда группа G p-нильпотентна; противоречие.

Лемма 2.13 [1, гл. VI, лемма 4.10]. *Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$. Если $A^gB = BA^g$ для всех $g \in G$, то существует нетривиальная нормальная подгруппа N группы G, содержащая A или B.*

Лемма 2.14. *Пусть p — простой делитель числа $|G|$ такой, что $(|G|, p-1) = 1$. Если в G есть холлова p'-подгруппа, то любые две холловы p'-подгруппы группы G сопряжены в G.*

Доказательство. Если $p = 2$, то по [16, теорема A] любые две холловы p'-подгруппы сопряжены в G. Если p — нечетное простое число, то $2 \nmid |G|$. По теореме Фейта — Томпсона группа G разрешима. Следовательно, любые две холловы p'-подгруппы сопряжены в G.

Подгруппа M_n группы G называется *n-максимальной* $(n \geq 1)$ *в* G, если в G есть цепочка подгрупп $M_n < M_{n-1} < \dots < M_1 < M_0 = G$ такая, что M_i — максимальная подгруппа в M_{i-1} $(1 \leq i \leq n)$. Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.15. *Пусть p — простой делитель числа $|G|$, $H \le G$ и $N \trianglelefteq G$. Если $|HN/N|_p \ge p^{n+1}$ для некоторого целого числа $n \ge 1$, то для любой $T/N \in \mathrm{Syl}_p(HN/N)$ существует силовская p-подгруппа P группы H такая, что $T/N = PN/N$; для любой n-максимальной подгруппы T_n/N группы T/N существует n-максимальная подгруппа P_n группы P такая, что $T_n/N = P_nN/N$ и $P_n \cap N = P \cap N$.*

Лемма 2.16 [17, лемма 2.8]. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G и P — нормальная p-подгруппа группы G такая, что $G = PM$, где p — простой делитель числа $|G|$. Тогда $P \cap M$ нормальна в G.*

Лемма 2.17 [18]. *Пусть P — силовская p-подгруппа группы G, где p — простой делитель числа $|G|$. Если $N \trianglelefteq G$ и $N \cap P \subseteq \Phi(P)$, то N p-нильпотентна.*

Лемма 2.18 [15, гл. A, предложение 4.13(b)]. *Пусть $G = G_1 \times \dots \times G_r$, где каждая G_i — неабелева простая группа. Тогда подгруппа S субнормальна в G тогда и только тогда, когда S — (прямое) произведение некоторого числа факторов G_i.*

Лемма 2.19 [19, лемма 2.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация. Предположим, что $A \le G$.*

(1) *Если $A \trianglelefteq G$, то $AZ_{\mathfrak{F}}(G)/A \le Z_{\mathfrak{F}}(G/A)$.*

(2) *Если $\mathfrak{F}$ S-замкнута, то $Z_{\mathfrak{F}}(G) \cap A \le Z_{\mathfrak{F}}(A)$.*

(3) *Если $G \in \mathfrak{F}$, то $Z_{\mathfrak{F}}(G) = G$.*

Лемма 2.20 [1, гл. III, теорема 7.2]. *Пусть G — p-группа. Предположим, что H_1 и H_2 — (нормальные) подгруппы группы G такие, что $H_1 \le H_2$ и $|H_2 : H_1| = p^s$. Тогда для любого целого числа $1 \le t \le s$ существует (нормальная) подгруппа H_3 группы G такая, что $H_1 \le H_3 \le H_2$ и $|H_3 : H_1| = p^t$.*

Лемма 2.21 [14, лемма 2.8]. *Пусть p — простое число, делящее $|G|$, G A_4-свободная и $(|G|, p-1) = 1$. Предположим, что N — нормальная подгруппа в G такая, что G/N p-нильпотентна и $|N|$ не делится на p^3. Тогда G тоже p-нильпотентна.*

Лемма 2.22. *Пусть p — простой делитель числа $|G|$ такой, что $(|G|, p-1) = 1$. Если в G есть циклическая силовская p-подгруппа, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. См. доказательство в [2, (10.1.9)].

Лемма 2.23 [20, лемма 2.9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$ (содержащая $\mathfrak{N}$), и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если E циклическая (E содержится в $Z(G)$ соответственно), то $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 2.24 [10, основная теорема]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда G содержит нормальную подгруппу E такую, что $G/E \in \mathfrak{F}$ и для любой нециклической силовской подгруппы P обобщенной подгруппы Фиттинга $F^*(E)$ выполнено следующее: любая максимальная подгруппа группы P, не имеющая сверхразрешимого добавления в G, или любая циклическая подгруппа H группы P простого порядка или порядка 4 (если P — неабелева 2-группа и $H \nsubseteq Z_\infty(G)$), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, слабо S-замкнута в G.*

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть p — простой делитель числа $|G|$ такой, что*

$$(|G|, (p-1)(p^2-1)\dots(p^n-1)) = 1$$

для некоторого целого числа $n \geq 1$. Тогда G p-нильпотентна в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа H группы G такая, что G/H p-нильпотентна и для любой силовской p-подгруппы P группы H любая n-максимальная подгруппа P, не содержащая $P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$, если такая существует, имеет p-нильпотентное добавление в G или удовлетворяет условию $(\triangle)$ в G.

Доказательство. Необходимость очевидна, поэтому нужно доказать достаточность. Предположим, что утверждение неверно, и пусть (G, H) — контрпример с наименьшей суммой $|G| + |H|$. Дальнейшее доказательство состоит из следующих шагов.

(1) $|H|_p \geq p^{n+1}$.
По лемме 2.12 если $|H|_p \leq p^n$, то G p-нильпотентна; противоречие.

(2) G не является неабелевой простой группой.
Если G — неабелева простая группа, то $G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} = H = G$, так как $G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \neq 1$. Поскольку $|G|_p \geq p^{n+1}$, можно взять n-максимальную подгруппу P_n силовской p-подгруппы P группы G. По условию P_n удовлетворяет $(\triangle)$ или имеет p-нильпотентное добавление в G.

(i) Случай 1: P_n удовлетворяет условию $(\triangle)$ в G. В этом случае существует нормальная подгруппа K группы G такая, что P_nK S-квазинормальна в G и $P_n \cap K \leq (P_n)_{seG}$ или $P_n \cap K \leq (P_n)_{\tau G}$. Группа G проста, поэтому $K = 1$ или G. Допустим, что $K = 1$. Тогда P_n S-квазинормальна, а значит, субнормальна в G по лемме 2.1(1). Следовательно, $P_n = 1$, так как $G \neq P_n$. Получаем, что $|G|_p = p^n$, а это противоречит (1). Пусть $K = G$. Тогда $P_n = (P_n)_{seG}$ или $P_n = (P_n)_{\tau G}$. В первом случае для любой подгруппы D группы P_n, S-квазинормально вложенной в G, существует S-квазинормальная подгруппа U группы G такая, что $D \in \mathrm{Syl}_p(U)$. Поскольку $G \neq U$, получаем, что $D = U = 1$. Следовательно, $P_n = (P_n)_{seG} = 1$, и, значит, $|G|_p = p^n$; противоречие. Во втором случае P_n τ-квазинормальна в G по лемме 2.7(1). Так как G не p-группа, можно выбрать простое число $q \neq p$, делящее $|G|$, и силовскую q-подгруппу Q группы G. Предположим, что $P_n \neq 1$. В силу равенства $Q^G = G$ имеем $(p, |Q^G|) \neq 1$. Значит, $Q^gP_n = P_nQ^g$ для всех $g \in G$. Если $G = P_nQ$, то G разрешима по p^aq^b-теореме Бернсайда; противоречие. Следовательно, $G \neq P_nQ$. По лемме 2.13 найдется нетривиальная нормальная подгруппа X группы G такая, что $P_n \leq X$ или $Q \leq X$, а это невозможно. Таким образом, получаем, что $P_n = 1$ и $|G|_p = p^n$; снова противоречие.

(ii) Случай 2: P_n имеет p-нильпотентное добавление T в G. Пусть $T_{p'}$ — нормальное p-дополнение группы T. Тогда $G = P_nT = P_nN_G(T_{p'})$. Если $N_G(T_{p'}) = G$, то $T_{p'} \trianglelefteq G$ и, значит, $T_{p'} = 1$ или G. Отсюда следует, что G p-нильпотентна; противоречие. Таким образом, $N_G(T_{p'}) < G$. Ясно, что $P \cap N_G(T_{p'}) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(T_{p'}))$ и $P \cap N_G(T_{p'}) < P$. Пусть P_2 — максимальная подгруппа группы P, содержащая $P \cap N_G(T_{p'})$, и P_{n2} — n-максимальная подгруппа группы P, содержащаяся в P_2. Если P_{n2} удовлетворяет условию $(\triangle)$ в G, то рассуждение, подобное приведенному выше, приводит к противоречию. Значит, P_{n2} имеет p-нильпотентное добавление E в G. Пусть $E_{p'}$ — нормальное

p-дополнение группы E. Тогда также выполнено $G = P_{n2}N_G(E_{p'}) = P_2N_G(E_{p'})$. Поскольку $T_{p'}$ и $E_{p'}$ — холловы p'-подгруппы в G, по лемме 2.14 существует элемент $g \in P_2$ такой, что $T_{p'} = (E_{p'})^g$. Следовательно, $G = (P_2N_G(E_{p'}))^g = P_2N_G(T_{p'})$, и тем самым $P = P_2(P \cap N_G(T_{p'})) = P_2$; противоречие. Утверждение (2) доказано.

(3) Если $1 \neq L \trianglelefteq G$ такова, что $L \leq H$ или $(|L|, p) = 1$, то G/L p-нильпотентна.

Если $|HL/L|_p \leq p^n$, то G/L p-нильпотентна по лемме 2.12, поэтому можно считать, что $|HL/L|_p \geq p^{n+1}$. Пусть PL/L — силовская p-подгруппа группы HL/L, причем $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$, и P_nL/L — n-максимальная подгруппа в PL/L, не содержащая $(PL/L) \cap (G/L)^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$, такая, что P_n — n-максимальная подгруппа в P и $P_n \cap L = P \cap L$ (см. лемму 2.15). Поскольку $G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \leq H$, имеем $(|PG^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \cap L : P \cap L|, |PG^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \cap L : G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \cap L|) = 1$. Значит, $PL \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}L = (P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}})L$ по [15, гл. A, лемма 1.2]. Если $P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \leq P_n$, то $(PL/L) \cap (G/L)^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} = (PL/L) \cap (G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}L/L) = (P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}})L \leq P_nL/L$; противоречие. Следовательно, по условию P_n имеет p-нильпотентное добавление T или удовлетворяет $(\triangle)$ в G. В первом случае P_nL/L имеет p-нильпотентное добавление TL/L в G/L. Во втором случае существует нормальная подгруппа K группы G такая, что P_nK S-квазинормальна в G и $P_n \cap K \leq (P_n)_{seG}$ или $P_n \cap K \leq (P_n)_{\tau G}$. Отметим, что $|L \cap P_nK : L \cap K| = |K(L \cap P_nK) : K| \mid |P_nK : K|$ и $|L \cap P_nK : L \cap P_n| \mid |L : L \cap P_n| = |L : L \cap P| = |PL : P|$. Поскольку $L \leq H$ или $(|L|, p) = 1$, получаем, что $p \nmid |PL : P|$. Отсюда следует, что $(|L \cap P_nK : L \cap K|, |L \cap P_nK : L \cap P_n|) = 1$. Значит, $P_nL \cap KL = (P_n \cap K)L$, как и выше. В силу лемм 2.5(2) и 2.7(3) имеем $(P_nL/L) \cap (KL/L) \leq (P_n)_{seG}L/L \leq (P_nL/L)_{seG}$ или $(P_nL/L) \cap (KL/L) \leq (P_n)_{\tau G}L/L \leq (P_nL/L)_{\tau G}$. Это означает, что P_nL/L удовлетворяет $(\triangle)$ в G/L. Следовательно, $(G/L, HL/L)$ удовлетворяет условию теоремы. В силу выбора пары (G, H) группа G/L p-нильпотентна.

(4) Если $P \leq F < G$, то F p-нильпотентна. В частности, если $H < G$, то H p-нильпотентна.

Очевидно, что $P \in \mathrm{Syl}_p(H \cap F)$. Пусть P_n — n-максимальная подгруппа группы P, не содержащая $P \cap F^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$. Предположим, что $P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \leq P_n$. Тогда $P \cap F^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \leq P \cap (G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \cap F) \leq P_n$, что невозможно. Значит, по условию P_n имеет p-нильпотентное добавление T или удовлетворяет $(\triangle)$ в G. Из леммы 2.9(1) и леммы 2.10(1) следует, что P_n имеет p-нильпотентное добавление $T \cap F$ или удовлетворяет $(\triangle)$ в F. Силовские p-подгруппы сопряжены, поэтому пара $(F, H \cap F)$ удовлетворяет условию теоремы и, значит, F p-нильпотентна в силу выбора пары (G, H).

(5) В G есть единственная минимальная нормальная подгруппа $N = G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$, содержащаяся в H и такая, что $N \nleq \Phi(G)$ и $|N|_p \geq p^{n+1}$.

Это прямо следует из (3) и леммы 2.12.

(6) $O_{p'}(G) = 1$.

Если это не так, то по (3) группа $G/O_{p'}(G)$ p-нильпотентна. Следовательно, G тоже p-нильпотентна; противоречие.

(7) $O_p(H) = 1$.

Предположим, что это не так.

(i) $N = O_p(H) \leq O_p(G)$ и $G = N \rtimes M$ для некоторой максимальной подгруппы M группы G.

Поскольку $O_p(H)\,\mathrm{char}\,H \trianglelefteq G$, получаем, что $N \leq O_p(H)$ и тем самым N абелева. В силу того, что $N \nleq \Phi(G)$, существует максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = N \rtimes M = O_p(H)M$. Из леммы 2.16 следует, что $O_p(H) \cap M \trianglelefteq G$. Из единственности группы N получаем, что $O_p(H) \cap M = 1$, откуда $O_p(H) = N(O_p(H) \cap M) = N \leq O_p(G)$.

(ii) Пусть G_p — силовская p-подгруппа группы G такая, что $P = G_p \cap H$. Тогда в P существуют максимальная подгруппа P_1 и n-максимальная подгруппа P_n, содержащаяся в P_1, такие, что $P_1 \trianglelefteq G_p$ и $P = NP_n = NP_1$. Кроме того, $N \nleq P_1$ и $N \cap P_n$ — n-максимальная подгруппа группы N.

Ясно, что $G_p = N(G_p \cap M)$. Поскольку $|G_p : G_p \cap M| = |G_pM : M| = |G : M| = |N| \geq p^{n+1}$, существуют n-максимальная подгруппа $(G_p)_n$ и максимальная подгруппа $(G_p)_1$ группы G_p такие, что $G_p \cap M \leq (G_p)_n \leq (G_p)_1$. Отсюда следует, что $G_p = N(G_p)_n = N(G_p)_1$. Пусть $P_n = (G_p)_n \cap H$ и $P_1 = (G_p)_1 \cap H$. Очевидно, что $P_1 \trianglelefteq G_p$ и $P \cap M \leq P_n \leq P_1$. Таким образом, $P = N(P \cap M) = NP_n = NP_1$. Более того, так как $|P : P_n| = |G_p \cap H : (G_p)_n \cap H| = |G_p : (G_p)_n| = p^n$ и $|P : P_1| = |G_p \cap H : (G_p)_1 \cap H| = |G_p : (G_p)_1| = p$, группа P_n — n-максимальная подгруппа в P и P_1 — максимальная подгруппа в P. Ясно, что $N \nleq P_1$. В силу равенств $|N : N \cap P_n| = |P : P_n| = p^n$ группа $N \cap P_n$ — n-максимальная подгруппа в N.

(iii) P_n удовлетворяет условию $(\triangle)$ в G, т. е. существует нормальная подгруппа K группы G такая, что P_nK S-квазинормальна в G и $P_n \cap K \leq (P_n)_{seG}$ или $P_n \cap K \leq (P_n)_{\tau G}$.

Допустим, что P_n не удовлетворяет $(\triangle)$ в G. Тогда P_n имеет p-нильпотентное добавление T в G по условию теоремы. Пусть $T_{p'}$ — нормальное p-дополнение группы T. Тогда $G = P_nT = P_nN_G(T_{p'})$. Поскольку $M \cong G/N$ p-нильпотентна, M имеет нормальное p-дополнение $M_{p'}$ такое, что $M \leq N_G(M_{p'}) \leq G$. Если $N_G(M_{p'}) = G$, то $M_{p'} \trianglelefteq G$, откуда $M_{p'} = 1$ по (6). Это означает, что G — p-группа; противоречие. Следовательно, $N_G(M_{p'}) = M$. По лемме 2.14 существует элемент $g \in P_n$ такой, что $M_{p'} = (T_{p'})^g$. Тогда $G = (P_nN_G(T_{p'}))^g = P_nN_G(M_{p'}) = P_nM$ и, значит, $P = P_n(P \cap M) = P_n$; противоречие. Таким образом, (iii) выполнено.

(iv) $P_n \cap K = 1$.

Предположим сначала, что $P_n \cap K \leq (P_n)_{seG}$. Пусть $D_1, D_2, \dots, D_s$ — все подгруппы группы P_n, S-квазинормально вложенные в G. Тогда $(P_n)_{seG} = \langle D_1, D_2, \dots, D_s \rangle$. По определению существуют S-квазинормальные подгруппы $U_1, U_2, \dots, U_s$ группы G такие, что $D_i \in \mathrm{Syl}_p(U_i)$ $(1 \leq i \leq s)$. Допустим, что $(U_i)_G \neq 1$. Пусть N_1 — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $(U_i)_G$. Если $N_1 \nleq H$, то $N_1 \cap H = 1$. Пусть N_2/H — нормальная подгруппа группы G/H, содержащаяся в HN_1/H. Тогда $N_2 \trianglelefteq G$ и, значит, $N_1 \cap N_2 = 1$ или N_1. Следовательно, $N_2 = H(N_1 \cap N_2) = H$ или HN_1. Поэтому HN_1/H — минимальная нормальная подгруппа в G/H. Поскольку G/H p-нильпотентна, она также p-разрешима. Из (6) следует, что $N_1 \cong HN_1/H$ — p-подгруппа. Значит, $N_1 \leq D_i \leq H$; противоречие. Следовательно, $N_1 \leq H$. Тогда по (5) выполнено $N_1 = N \leq U_i \leq P_n$; это опять дает противоречие. Таким образом, $(U_i)_G = 1$ $(1 \leq i \leq s)$. По леммам 2.2 и 2.3 группы D_i S-квазинормальны в G, а значит, группа $(P_n)_{seG}$ тоже S-квазинормальна. Тогда $(P_n)_{seG} \leq O_p(H) = N$ и $O^p(G) \leq N_G((P_n)_{seG})$ в силу лемм 2.1(1) и 2.1(5). Если $(P_n)_{seG} \neq 1$, то $N \leq ((P_n)_{seG})^G = ((P_n)_{seG})^{O^p(G)G_p} = ((P_n)_{seG})^{G_p} \leq (P_n \cap N)^{G_p} \leq (P_1 \cap N)^{G_p} = P_1 \cap N \leq N$. Отсюда следует, что

$N = P_1 \cap N$ и тем самым $N \leq P_1$; противоречие. Таким образом, $(P_n)_{seG} = 1$ и $P_n \cap K = 1$. Теперь рассмотрим случай, когда $P_n \cap K \leq (P_n)_{\tau G}$. Если $H \cap K \neq 1$, то $N \leq H \cap K \leq K$. Вследствие этого имеем $N \cap P_n \leq P_n \cap K \leq (P_n)_{\tau G}$, и, значит, $N \cap P_n = N \cap (P_n)_{\tau G}$. Выберем произвольное простое число $q \neq p$, делящее $|G|$, и силовскую q-подгруппу Q группы G. Предположим, что $(p, |Q^G|) = 1$. Тогда $Q^G \leq O_{p'}(G)$, что противоречит (6). По лемме 2.7(1) группа $(P_n)_{\tau G}$ τ-квазинормальна в G, поэтому $(P_n)_{\tau G}Q$ — подгруппа в G. Заметим, что $N \cap P_n$ — n-максимальная подгруппа группы N. Поскольку $|N : N \cap (P_n)_{\tau G}Q| = |N(P_n)_{\tau G}Q : (P_n)_{\tau G}Q| = |N(P_n)_{\tau G} : (P_n)_{\tau G}| = |N : N \cap P_n| = p^n$, выполнено равенство $N \cap (P_n)_{\tau G}Q = N \cap P_n$. Следовательно, $Q \leq N_G(N \cap (P_n)_{\tau G}Q) = N_G(N \cap P_n)$, и, значит, $O^p(G) \leq N_G(N \cap P_n)$. Если $N \cap P_n \neq 1$, то $N \leq (N \cap P_n)^G = (N \cap P_n)^{G_p} \leq (N \cap P_1)^{G_p} = N \cap P_1$. Отсюда следует, что $N \leq P_1$; противоречие. Значит, $N \cap P_n = 1$. Тогда $|N| = p^n$; снова противоречие. Таким образом, $H \cap K = 1$ и $P_n \cap K = 1$. Утверждение (iv) доказано.

(v) $H = G$.

Если $H < G$, то H p-нильпотентна в силу (4). Пусть $H_{p'}$ — нормальное p-дополнение группы H. Тогда $H_{p'} \trianglelefteq G$. Значит, $H_{p'} = 1$ по (6), откуда $H = N = P$. Поскольку $P_n(H \cap K) = P_nK \cap H$ S-квазинормальна в G по лемме 2.2, получаем, что $O^p(G) \leq N_G(P_n(H \cap K))$. Если $P_n(H \cap K) \neq 1$, то $H = (P_n(H \cap K))^G = (P_n(H \cap K))^{G_p} \leq (P_1(H \cap K))^{G_p} = P_1(H \cap K)$. Следовательно, $H = P_1(H \cap K)$ и $H \cap K \neq 1$. Из этого вытекает, что $H \cap K = H$, так как H — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда $H \leq K$ и, значит, $P_n = P_n \cap K = 1$ по (iv). Следовательно, $|H| = p^n$, что противоречит (1). Таким образом, $P_n(H \cap K) = 1$. Также получаем, что $P_n = 1$; противоречие, как и выше.

(vi) Завершение доказательства утверждения (7).

В силу (iv) и (v) выполнено $|K|_p = |K : P_n \cap K|_p = |P_nK : P_n|_p \leq p^n$. Если $K \neq 1$, то $N \leq K$, поэтому G/K p-нильпотентна. Из леммы 2.12 следует, что G тоже p-нильпотентна; противоречие. Таким образом, можно считать, что $K = 1$. Тогда P_n S-квазинормальна в G. Если $P_n \neq 1$, то, как и выше, $N \leq {P_n}^G \leq P_1$; противоречие. Значит, $P_n = 1$ и $|G|_p = p^n$. Это противоречие завершает доказательство утверждения (7).

(8) $H = G$.

Если это не так, то H p-нильпотентна по (4). Пусть $H_{p'}$ — нормальное p-дополнение в группе H. Тогда $H_{p'} \trianglelefteq G$, откуда следует, что $H = O_p(H) = 1$ в силу (6) и (7). Тем самым G p-нильпотентна; противоречие.

(9) $O_p(G) = 1$.

Непосредственно следует из (7) и (8).

(10) N не p-разрешима.

Если N p-разрешима, то $O_{p'}(N) \neq 1$ или $O_p(N) \neq 1$, что противоречит (6) или (9).

(11) Пусть P — силовская p-подгруппа группы G. Тогда $G = PN$ и $P \cap N \nleq \Phi(P)$. Кроме того, $N = O^p(G)$.

Если $PN < G$, то PN p-нильпотентна по (4) и, значит, N тоже p-нильпотентна, что противоречит (10). Следовательно, $G = PN$. Если $P \cap N \leq \Phi(P)$, то N p-нильпотентна по лемме 2.17, что также противоречит (10). Очевидно, $1 \neq O^p(G) \leq N$, откуда $N = O^p(G)$.

(12) Завершение доказательства.

По (11) существует максимальная подгруппа P_1 группы P такая, что $P = (P \cap N)P_1$. Очевидно, $P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} = P \cap N \nleq P_1$. Пусть P_n — n-максимальная подгруппа группы P, содержащаяся в P_1. По условию P_n удовлетворяет ($\triangle$) или имеет p-нильпотентное добавление T в G.

(i) Случай 1: P_n удовлетворяет ($\triangle$) в G. В этом случае существует нормальная подгруппа K группы G такая, что P_nK S-квазинормальна в G и $P_n \cap K \leq (P_n)_{seG}$ или $P_n \cap K \leq (P_n)_{\tau G}$. Если $K = 1$, то P_n S-квазинормальна в G. Из леммы 2.1(1) и (9) вытекает, что $P_n \leq O_p(G) = 1$ и, значит, $|G|_p \leq p^n$, что противоречит (1). Следовательно, можно считать, что $K \neq 1$. Тогда $N \leq K$, откуда $P_n \cap N \leq (P_n)_{seG}$ или $P_n \cap N \leq (P_n)_{\tau G}$. Сначала предположим, что $P_n \cap N \leq (P_n)_{seG}$. Так же, как и выше, пусть $D_1, D_2, \dots, D_s$ — все подгруппы группы P_n, которые S-квазинормально вложены в G. Тогда существуют S-квазинормальные подгруппы $U_1, U_2, \dots, U_s$ группы G такие, что $D_i \in \mathrm{Syl}_p(U_i)$ $(1 \leq i \leq s)$. Если $(U_i)_G \neq 1$, то $N \leq (U_i)_G \leq U_i$. Значит, $D_i \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$. Поскольку $P \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$, выполнено равенство $D_i \cap N = P \cap N$. Следовательно, $P \cap N \leq D_i \leq P_n \leq P_1$; противоречие. Таким образом, $(U_i)_G = 1$, и D_i S-квазинормальна в G по лемме 2.3. В силу того, что $(P_n)_{seG} = \langle D_1, D_2, \dots, D_s \rangle$, имеем $(P_n)_{seG} \leq O_p(G) = 1$, откуда вытекает равенство $P_n \cap N = 1$. Значит, $|N|_p = |P \cap N| = |P \cap N : P_n \cap N| = |P_n(P \cap N) : P_n| \leq |P : P_n| = p^n$. Из леммы 2.12 следует, что G p-нильпотентна; противоречие.

Рассмотрим случай, когда $P_n \cap N \leq (P_n)_{\tau G}$. Пусть $q \neq p$ — произвольный простой делитель числа $|G|$ и $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. Ясно, что $Q \leq O^p(G) = N$ и $(p, |Q^G|) \neq 1$. Тогда по лемме 2.7(1) имеем $(P_n)_{\tau G}Q = Q(P_n)_{\tau G}$. Следовательно, $(P_n \cap N)Q = ((P_n)_{\tau G} \cap N)Q = (P_n)_{\tau G}Q \cap N = Q(P_n)_{\tau G} \cap N = Q((P_n)_{\tau G} \cap N) = Q(P_n \cap N)$. Значит, $(P_n \cap N)Q^n = Q^n(P_n \cap N)$ для всех $n \in N$. Если $N = (P_n \cap N)Q$, то N разрешима по p^aq^b-теореме Бернсайда, что противоречит (10). Поэтому по лемме 2.13 существует нетривиальная нормальная подгруппа X группы N такая, что $P_n \leq X$ или $Q \leq X$. Группа N характеристически проста в G, следовательно, $N \cong A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$, где $A_i \cong A$ $(1 \leq i \leq t)$ — простая группа. Очевидно, что A неабелева в силу (10). По лемме 2.18 без потери общности можно считать, что $X \cong A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ $(k < t)$. Поскольку $Q \in \mathrm{Syl}_q(N)$, выполнено $|Q| = |N|_q = (|A|_q)^t > (|A|_q)^k = |X|_q$. Отсюда вытекает, что $P_n \cap N \leq X$. Заметим, что $|P \cap N : P_n \cap N| = |P_n(P \cap N) : P_n| \leq |P : P_n| = p^n$. Тогда $|N|_p/|X|_p = (|A|_p)^{t-k} \leq p^n$. Так как $t - k \geq 1$, имеем $|A|_p \leq p^n$. Значит, A p-нильпотентна по лемме 2.12. Следовательно, N p-разрешима; противоречие.

(ii) Случай 2: P_n имеет p-нильпотентное добавление T в G. Пусть $T_{p'}$ — нормальное p-дополнение группы T. Тогда $G = P_nT = P_nN_G(T_{p'})$ и $N_G(T_{p'}) < G$. Поскольку $P = P_n(P \cap N_G(T_{p'}))$ и $P \cap N_G(T_{p'}) < P$, существует максимальная подгруппа P_2 группы P такая, что $P \cap N_G(T_{p'}) \leq P_2$. В силу того, что $N = O^p(G)$ по (11), любая холлова p'-подгруппа группы G содержится в N. Используя лемму 2.14 и аргумент Фраттини, получаем, что $G = NN_G(T_{p'}) = PN_G(T_{p'})$. Тогда $|P| = |G|_p \leq |N|_p|N_G(T_{p'})|_p = |P \cap N||P \cap N_G(T_{p'})|$. Значит, $P = (P \cap N)(P \cap N_G(T_{p'})) \leq (P \cap N)P_2$. Отсюда вытекает, что $P = (P \cap N)P_2$ и $P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} = P \cap N \nleq P_2$. Пусть P_{n2} — n-максимальная подгруппа группы P, содержащаяся в P_2. Тогда по условию P_{n2} имеет p-нильпотентное добавление E

или удовлетворяет ($\triangle$) в G. Если P_{n2} имеет p-нильпотентное добавление E в G, то, рассуждая так же, как в доказательстве утверждения (2)(ii), можно прийти к противоречию. Таким образом, P_{n2} удовлетворяет ($\triangle$) в G. Тогда, повторяя рассуждение из (i), снова приходим к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть p — простой делитель числа $|G|$ такой, что*

$$(|G|, (p-1)(p^2-1)\dots(p^n-1)) = 1$$

для некоторого целого числа $n \geq 1$. Тогда G p-нильпотентна в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа H группы G такая, что G/H p-нильпотентна и для любой силовской p-подгруппы P группы H любая подгруппа L группы $P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$ порядка p^n или 4 (когда $p = 2$, $n = 1$, P неабелева и L циклическая), не содержащаяся в $Z_\infty(G)$, если такая существует, имеет p-нильпотентное добавление в G или удовлетворяет условию ($\triangle$) в G.

Доказательство. Нам нужно установить только достаточность. Предположим, что это не так, и пусть (G, H) — контрпример с наименьшей суммой $|G| + |H|$.

(1) $|H|_p \geq p^{n+1}$.

Это следует из леммы 2.12.

(2) Если $1 \neq N \trianglelefteq G$ и $(|N|, p) = 1$, то G/N p-нильпотентна.

Если $|(HN/N) \cap (G/N)^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}|_p = |G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}N/N|_p \leq p^n$, то G/N p-нильпотентна по лемме 2.12. Поэтому можно считать, что $|G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}N/N|_p \geq p^{n+1}$. Пусть L/N — подгруппа группы $PN/N \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}N/N$ порядка p^n или 4 (когда $p = 2$, $n = 1$, PN/N неабелева и L/N циклическая), не содержащаяся в $Z_\infty(G/N)$, где $PN/N \in \mathrm{Syl}_p(HN/N)$ и $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$. Поскольку $L = (P \cap L)N$ и $(|N|, p) = 1$, получаем, что $|L/N| = |(P \cap L)N/N| = |P \cap L|$ равен p^n или 4. В силу того, что $P \cap L \leq G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}N$ и $(|P \cap L|, |G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}N : G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}|) = 1$, выполнено $P \cap L \leq P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$. Из леммы 2.19(1) следует, что $P \cap L \nsubseteq Z_\infty(G)$. Предположим, что $|P \cap L| = 4$. Тогда P неабелева и $P \cap L$ циклическая в силу G-изоморфизма $L/N \cong P \cap L$. Рассуждая так же, как на шаге (3) доказательства теоремы 3.1, выводим, что L/N имеет p-нильпотентное добавление или удовлетворяет ($\triangle$). Это означает, что пара $(G/N, HN/N)$ удовлетворяет условию теоремы. Выбор пары (G, H) приводит к тому, что G/N p-нильпотентна.

(3) Любая нетривиальная подгруппа F группы G p-нильпотентна.

Рассматривая пару $(F, H \cap F)$, можно считать, что $|(H \cap F) \cap F^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}|_p = |F^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}|_p \geq p^{n+1}$. Если это не так, то F p-нильпотентна по лемме 2.12. Пусть L — подгруппа группы $(P \cap F) \cap F^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} = P \cap F^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$ порядка p^n или 4 (когда $p = 2$, $n = 1$, $P \cap F$ неабелева и L циклическая), не содержащаяся в $Z_\infty(F)$, где $P \cap F \in \mathrm{Syl}_p(H \cap F)$ и $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$. По лемме 2.19(2) имеем $L \nsubseteq Z_\infty(G)$. В силу того, что $P \cap F^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}} \leq P \cap (F \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}) \leq P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$, по леммам 2.9(1) и 2.10(1) группа L имеет p-нильпотентное добавление или удовлетворяет условию ($\triangle$) в F. Следовательно, пара $(F, H \cap F)$ удовлетворяет условию теоремы. Тогда F p-нильпотентна ввиду выбора пары (G, H).

(4) $O_{p'}(G) = 1$.

Если это не так, то $G/O_{p'}(G)$ p-нильпотентна по (2) и тогда G тоже p-нильпотентна; противоречие.

(5) G — минимальная ненильпотентная группа.

В силу (3) группа G — минимальная не p-нильпотентная группа. Тогда G — минимальная ненильпотентная группа по теореме Ито (см. [1, гл. IV, теорема 5.4]). Из [3, теорема 3.4.11] и леммы 2.11 следует, что $G = P \rtimes Q$, где P — нормальная силовская p-подгруппа группы G и Q — циклическая силовская q-подгруппа группы G $(p \neq q)$. Кроме того,

(i) $P/\Phi(P)$ — G-главный фактор;
(ii) $P = G^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$;
(iii) $\exp(P) = p$ или 4 (когда $p = 2$ и P неабелева);
(iv) $\Phi(G) = Z_\infty(G)$;
(v) $F(G) = F_p(G) = P\Phi(G)$.

(6) $P \leq H$.

Это следует из того, что $P = G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$ и G/H p-нильпотентна.

(7) $F(G) = P$ и $\Phi(G) = \Phi(P)$.

Поскольку $F_p(G)/O_{p'}(G) = O_p(G/O_{p'}(G))$, из (4) и (5) получаем, что $F(G) = F_p(G) = P\Phi(G) = O_p(G) = P$. Значит, $\Phi(P) \leq \Phi(G) \leq P$. Так как $P/\Phi(P)$ — G-главный фактор, если $\Phi(G) = P$, то $G = Q$; противоречие. Таким образом, $\Phi(G) = \Phi(P)$.

(8) В P есть собственная подгруппа L порядка p^n или 4 такая, что $L \nleq \Phi(P)$ и L имеет p-нильпотентное добавление или удовлетворяет условию $(\triangle)$ в G.

Выберем $x \in P\backslash\Phi(P)$ и положим $E = \langle x \rangle$. Тогда $|E|$ равен p или 4 (когда $p = 2$ и P неабелева). Ясно, что $E \nsubseteq Z_\infty(G) = \Phi(G) = \Phi(P)$. Из леммы 2.20 следует, что существует подгруппа L группы P порядка p^n или 4 (если $p = 2$ и $n = 1$, то можно взять $L = E$) такая, что $E \leq L$ и $L \nleq \Phi(P)$. По условию L имеет p-нильпотентное добавление T или удовлетворяет $(\triangle)$ в G. Более того, если $L = P$, то, поскольку $|P| \geq p^{n+1}$ по (1), выполнено равенство $|P| = 4$. Но тогда P абелева; противоречие.

(9) Завершение доказательства.

(i) Случай 1: L имеет p-нильпотентное добавление T в G. Из равенств $G = LT = PT$ следует, что $P \cap T \trianglelefteq T$ и $T\Phi(P)/\Phi(P) \leq N_{G/\Phi(P)}((P \cap T)\Phi(P)/\Phi(P))$. Очевидно, $(P \cap T)\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq P/\Phi(P)$, так как $P/\Phi(P)$ абелева. Значит, $(P \cap T)\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$. Группа $P/\Phi(P)$ является G-главным фактором, поэтому $(P \cap T)\Phi(P) = \Phi(P)$ или P. В первом случае $P \cap T \leq \Phi(P)$. Следовательно, $P = L(P \cap T) = L$, что противоречит (8). Во втором случае $P \cap T = P$. Тогда $P \leq T$ и, значит, $G = T$ p-нильпотентна; противоречие.

(ii) Случай 2: L удовлетворяет условию $(\triangle)$ в G. По предположению существует нормальная подгруппа K группы G такая, что LK S-квазинормальна в G и $L \cap K \leq L_{seG}$ или $L \cap K \leq L_{\tau G}$. Поскольку $L \leq P = O_p(G)$, из лемм 2.8 и 2.2 получаем, что $L_{seG} = L_{\tau G} = L_{sG}$, где L_{sG} — наибольшая S-квазинормальная подгруппа группы G, содержащаяся в L.

По лемме 2.1(5) имеем $O^p(G) \leq N_G(L_{sG})$. Значит, $O^p(G)\Phi(P)/\Phi(P) \leq N_G(L_{sG})\Phi(P)/\Phi(P) \leq N_{G/\Phi(P)}(L_{sG}\Phi(P)/\Phi(P))$. Группа $P/\Phi(P)$ абелева, поэтому $P/\Phi(P) \leq N_{G/\Phi(P)}(L_{sG}\Phi(P)/\Phi(P))$. Следовательно, $L_{sG}\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$, откуда $L_{sG}\Phi(P) \trianglelefteq G$. Таким образом, $L_{sG}\Phi(P) = P$ или $\Phi(P)$.

Если $L_{sG}\Phi(P) = P$, то $L_{sG} = P = L$, что противоречит (8). Теперь предположим, что $L_{sG}\Phi(P) = \Phi(P)$. Тогда $L_{sG} \leq \Phi(P)$. Если $K = G$, то $L = L_{sG} \leq \Phi(P)$; противоречие. Следовательно, $K < G$. Группа K нильпотентна, поэтому $K \leq F(G) = P$. Это говорит о том, что LK — S-квазинормальная подгруппа группы G, содержащаяся в P. Рассуждения, аналогичные вышеизложенным, показывают, что $LK\Phi(P) \trianglelefteq G$ и, значит, $LK\Phi(P)$ совпадает с P или $\Phi(P)$. Если $LK\Phi(P) = \Phi(P)$, то $L \leq LK \leq \Phi(P)$; противоречие.

Таким образом, $LK\Phi(P) = P$, поэтому $LK = P$. Поскольку $K\Phi(P) \trianglelefteq G$, то $K\Phi(P)$ совпадает с P или $\Phi(P)$. В первом случае $K = P$ и тем самым $L = L_{sG} \leq \Phi(P)$; противоречие. Во втором случае $K \leq \Phi(P)$, откуда $L = P$; снова противоречие. Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Пусть G — A_4-свободная группа и p — простой делитель числа $|G|$ такой, что $(|G|, p-1) = 1$. Тогда G p-нильпотентна в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа H группы G такая, что G/H p-нильпотентна и для любой силовской p-подгруппы P группы H любая 2-максимальная подгруппа группы P, не содержащая $P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$, или любая подгруппа порядка p^2 группы $P \cap G^{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}$, не содержащаяся в $Z_\infty(G)$, если такая существует, имеет p-нильпотентное добавление в G или удовлетворяет условию $(\triangle)$ в G.*

Доказательство. Ввиду леммы 2.21 теорема доказывается аналогично теоремам 3.1 и 3.2.

Теорема 3.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа H группы G такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и для любой нециклической силовской подгруппы P группы H любая максимальная подгруппа группы P имеет сверхразрешимое добавление в G или удовлетворяет условию $(\triangle)$ в G.*

Доказательство. Нужно доказать только достаточность. Предположим, что утверждение неверно, и пусть (G, H) — контрпример с наименьшей суммой $|G| + |H|$.

(1) Если r — максимальный простой делитель числа $|H|$, то силовская r-подгруппа R группы H нормальна в G.

Пусть p — наименьший простой делитель числа $|H|$ и P — силовская p-подгруппа группы H. Если P циклическая, то H p-нильпотентна по лемме 2.22. Заметим, что сверхразрешимая группа p-нильпотентна, если p — наименьший простой делитель ее порядка. Если P нециклическая, то в силу того, что пара (H, H) удовлетворяет условию теоремы, группа H p-нильпотентна по теореме 3.1. Следовательно, H имеет нормальное p-дополнение $H_{p'}$ такое, что $H_{p'} \operatorname{char} H \trianglelefteq G$. Ясно, что пара $(H_{p'}, H_{p'})$ тоже удовлетворяет условию. Пусть q — наименьший простой делитель числа $|H_{p'}|$. Тогда, как выше, получаем, что $H_{p'}$ q-нильпотентна. Дальнейшее рассуждение ведется аналогично. Таким образом, если r — максимальный простой делитель числа $|H|$ и R — силовская r-подгруппа в H, то $R \trianglelefteq G$.

(2) Существует единственная минимальная нормальная подгруппа N группы G, содержащаяся в R, такая, что $G/N \in \mathfrak{F}$ и $N \nleq \Phi(G)$.

В самом деле, несложно понять, что пара $(G/N, H/N)$ удовлетворяет условию теоремы для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G, содержащейся в R. Из выбора пары (G, H) следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в R, и $N \nleq \Phi(G)$.

(3) $N = R \leq O_r(G)$.

Поскольку $N \nleq \Phi(G)$, существует максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = NM = RM$. По лемме 2.16 группа $R \cap M$ нормальна в G. Тогда $R \cap M = 1$, так как $N \nleq R \cap M$. Значит, $R = N(R \cap M) = N \leq O_r(G)$.

(4) Завершение доказательства.

Если R циклическая, то $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 2.23; противоречие. Значит, R нециклическая. Пусть R' — силовская r-подгруппа группы G. Тогда $R' = R(M \cap R')$. Можно выбрать максимальную подгруппу R'_1 группы R' так, что $M \cap R' \leq R'_1$. Ясно, что $R_1 = R \cap R'_1$ — максимальная подгруппа группы R, причем $R_1 \trianglelefteq R'$. По условию R_1 имеет сверхразрешимое добавление T или удовлетворяет $(\triangle)$ в G.

Предположим сначала, что $G = R_1T = RT$, где T — сверхразрешимая подгруппа группы G. Поскольку $R = N$ абелева, $R \cap T \trianglelefteq G$. Следовательно, $R \cap T$ совпадает с 1 или R. В первом случае $R = R_1(R \cap T) = R_1$; противоречие. Во втором случае $R \leq T$ и тем самым $G = T \in \mathfrak{F}$; снова противоречие.

Предположим, что R_1 удовлетворяет условию $(\triangle)$ в G. Тогда существует нормальная подгруппа K группы G такая, что R_1K S-квазинормальна в G и $R_1 \cap K \leq (R_1)_{seG}$ или $R_1 \cap K \leq (R_1)_{\tau G}$. Поскольку $R_1 \leq O_r(G)$, группы $(R_1)_{seG}$ и $(R_1)_{\tau G}$ S-квазинормальны в G по леммам 2.8 и 2.2. Следовательно, $(R_1)_{seG} = (R_1)_{\tau G} = (R_1)_{sG}$, где $(R_1)_{sG}$ — наибольшая S-квазинормальная подгруппа группы G, содержащаяся в R_1. Очевидно, $R \cap K$ совпадает с 1 или R. В первом случае $R_1 = R \cap R_1K$ S-квазинормальна в G по лемме 2.2. Во втором случае $R \leq K$, поэтому $R_1 = R_1 \cap K = (R_1)_{sG}$ также S-квазинормальна в G. Однако поскольку $R_1 \trianglelefteq R'$ и $O^r(G) \leq N_G(R_1)$, получаем, что $R_1 \trianglelefteq G$. Таким образом, $R_1 = 1$. Отсюда следует, что R циклическая и, значит, $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 2.23. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 3.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа H группы G такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и для любой нециклической силовской подгруппы P группы H любая циклическая подгруппа L группы P простого порядка или порядка 4 (когда $p = 2$ и P неабелева), не содержащаяся в $Z_\infty(G)$, имеет сверхразрешимое добавление в G или удовлетворяет условию $(\triangle)$ в G.*

Доказательство. Нужно доказать только достаточность. Предположим, что утверждение неверно, и пусть (G, H) — контрпример с наименьшей суммой $|G| + |H|$.

(1) Силовская q-подгруппа Q группы H нормальна в G, где q — наибольший простой делитель числа $|H|$.

Ввиду леммы 2.22 и теоремы 3.2 утверждение доказывается так же, как в шаге (1) доказательства теоремы 3.4.

(2) $G^{\mathfrak{F}} = Q = H$.

Из лемм 2.9(3) и 2.10(3) несложно вывести, что пара $(G/Q, H/Q)$ удовлетворяет условию теоремы. Из выбора пары (G, H) следует, что $G/Q \in \mathfrak{F}$. Значит, $G^{\mathfrak{F}} \leq Q \leq H$. Поскольку $1 \neq G^{\mathfrak{F}}$ — q-подгруппа в H, пара $(G, G^{\mathfrak{F}})$ также удовлетворяет условию. Отсюда вытекает, что $G^{\mathfrak{F}} = Q = H$.

(3) Если M — максимальная подгруппа группы G, не содержащая $G^{\mathfrak{F}} = Q$, то $M \in \mathfrak{F}$.

Действительно, $G = MQ$ и $M/M \cap Q \cong MQ/Q = G/Q \in \mathfrak{F}$. По леммам 2.9(1) и 2.10(1) пара $(M, M \cap Q)$ удовлетворяет условию теоремы. Таким образом, $M \in \mathfrak{F}$ в силу выбора пары (G, H).

(4) $Q/\Phi(Q)$ — G-главный фактор и $\exp(Q)$ равна q или 4 (когда $q = 2$, Q неабелева).

Это непосредственно вытекает из (3) и [3, теорема 3.4.2].

(5) В Q есть подгруппа L порядка q или 4 такая, что $L \nleq \Phi(Q)$ и L имеет сверхразрешимое добавление или удовлетворяет условию ($\triangle$) в G.

Выберем $x \in Q \backslash \Phi(Q)$ и положим $L = \langle x \rangle$. Тогда $|L|$ равен q или 4 (когда $q = 2$, Q неабелева). Допустим, что $L \subseteq Z_\infty(G)$. Из (4) следует, что $(Q \cap Z_\infty(G))\Phi(Q)$ совпадает с $\Phi(Q)$ или Q. В первом случае $L \leq Q \cap Z_\infty(G) \leq \Phi(Q)$; противоречие. Во втором случае $Q \leq Z_\infty(G) \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, где $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ — произведение всех нормальных подгрупп E группы G, G-главные факторы которых имеют простой порядок. Значит, $|Q/\Phi(Q)| = q$. Отсюда следует, что Q циклическая и $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 2.23; противоречие. Таким образом, $L \nsubseteq Z_\infty(G)$. Тогда по условию L имеет сверхразрешимое добавление T или удовлетворяет ($\triangle$) в G.

(6) $L \neq Q$.

Если это не так, то $Q = G^{\mathfrak{F}}$ — циклическая группа. По лемме 2.23 имеем $G \in \mathfrak{F}$; противоречие.

(7) Завершение доказательства.

Предположим сначала, что L удовлетворяет условию ($\triangle$) в G. Рассуждая так же, как на шаге (9) доказательства теоремы 3.2, можно показать, что это невозможно. Теперь предположим, что $G = LT$ и T сверхразрешима. Пусть r — наибольший простой делитель числа $|T|$ и R — силовская r-подгруппа в T. Мы показали, что $L \neq Q$, поэтому $r \geq q$. Поскольку $R \trianglelefteq T$, имеем $G = LN_G(R)$ и $|G : N_G(R)|$ равен 1, q или 4.

(i) Случай 1: $|G : N_G(R)| = 1$. В этом случае $R \trianglelefteq G$. Если $r > q$, то R — силовская r-подгруппа группы G. Поскольку $(G/R, QR/R)$ удовлетворяет условию теоремы, $G/R \in \mathfrak{F}$ в силу выбора пары (G, H). Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} = Q \leq R$; противоречие. Теперь предположим, что $r = q$. Тогда $(R \cap Q)\Phi(Q)$ совпадает с $\Phi(Q)$ или Q, так как $Q/\Phi(Q)$ — G-главный фактор. В первом случае $R \cap Q \leq \Phi(Q)$. Поскольку $Q \cap T \leq R$, имеем $Q = L(Q \cap T) \leq LR$. Тогда $Q = LR \cap Q = L(R \cap Q)$ и, значит, $Q = L$, что противоречит (6). Во втором случае $L \leq Q \leq R \leq T$. Тогда $G = T \in \mathfrak{F}$; снова противоречие.

(ii) Случай 2: $|G : N_G(R)| = 2$. В этом случае $N_G(R) \trianglelefteq G$. Это означает, что $Q = G^{\mathfrak{F}} \leq N_G(R)$ и тем самым $G = N_G(R)$; противоречие.

(iii) Случай 3: $|G : N_G(R)| = q$, где q — нечетное простое число. В этом случае $L \cap N_G(R) = 1$, поэтому $N_G(R) = (L \cap N_G(R))T = T$. Если $r > q$, то R — силовская r-подгруппа группы G. Так как $|G : N_G(R)| = q$, число силовских r-подгрупп группы G равно q. Тогда по теореме Силова $q \equiv 1 \pmod r$, что невозможно. Теперь пусть $r = q$. Тогда $T \leq N_G(Q \cap R)$. Поскольку T — максимальная подгруппа группы G, то $N_G(Q \cap R)$ совпадает с G или T. В первом случае $Q \cap R \trianglelefteq G$, и рассуждение, аналогичное проведенному в (i), приводит к противоречию. Во втором случае ясно, что $Q \cap R < Q$. Это означает, что $Q \cap R < N_Q(Q \cap R) = Q \cap N_G(Q \cap R) = Q \cap T$. Однако $Q \cap T \leq R$; снова противоречие.

(iv) Случай 4: $|G : N_G(R)| = 4$. В этом случае $q = 2$ и $T = N_G(R)$. Если $r > q = 2$, то $4 \equiv 1 \pmod r$, поскольку R — силовская r-подгруппа группы G. Следовательно, $r = 3$, и, таким образом, $\pi(G) = \{2, 3\}$. Так как $|L| = 4$, группа Q не циклическая в силу (4). Отметим, что $G/Q = QT/Q \cong T/Q \cap T$ сверхразрешима и, значит, 2-нильпотентна. Тогда получается, что пара (G, Q) удовлетворяет условию теоремы 3.2 (при $p = 2$, $n = 1$). Следовательно, G 2-нильпотентна. Это означает, что $G_{2'} = R \trianglelefteq G$ и тем самым $T = N_G(R) = G$; противоречие. Теперь предположим, что $r = q = 2$. Тогда $T \leq N_G(Q \cap R)$.

Значит, $|G : N_G(Q \cap R)|$ равен 1, 2 или 4. Если $|G : N_G(Q \cap R)|$ равен 1 или 4, то $N_G(Q \cap R) = G$ или T, и противоречие может быть достигнуто так же, как в (iii). Таким образом, $|G : N_G(Q \cap R)| = 2$. Тогда $N_G(Q \cap R) \trianglelefteq G$ и $Q = G^{\mathfrak{F}} \leq N_G(Q \cap R)$. Значит, $N_G(Q \cap R) = G$, и это противоречие завершает доказательство.

Теорема 3.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа H группы G такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и для любой нециклической силовской подгруппы P группы $F^*(H)$ выполнено хотя бы одно из следующих утверждений.*

(i) *Любая максимальная подгруппа группы P, не имеющая сверхразрешимого добавления, удовлетворяет условию $(\triangle)$ в G.*

(ii) *Любая циклическая подгруппа L группы P простого порядка или порядка 4 (когда $p = 2$, P неабелева и $L \nsubseteq Z_\infty(G)$), не имеющая сверхразрешимого добавления, удовлетворяет условию $(\triangle)$ в G.*

Доказательство. Нужно доказать только достаточность.

(1) Случай 1: $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$.

Очевидно, пара $(F^*(H),\ F^*(H))$ удовлетворяет условию теоремы 3.4 или теоремы 3.5. Следовательно, группа $F^*(H)$ сверхразрешима и, в частности, разрешима. Из [21, гл. X, следствие 13.7(d)] вытекает, что $F^*(H) = F(H) \leq F(G)$. В этом случае слабая τ-вложенность эквивалентна слабой S-вложенности по лемме 2.8. Значит, пара (G, H) удовлетворяет условию леммы 2.24. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$.

(2) Случай 2: $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{U}$.

Очевидно, пара (H, H) удовлетворяет условию из п. (1). Поэтому H сверхразрешима, а значит, и разрешима. Следовательно, $F^*(H) = F(H) \leq F(G)$. Таким образом, снова по лемме 2.24 получаем, что $G \in \mathfrak{F}$.

4. Приложения

Как видно в § 1, любая S-квазинормальная, SS-квазинормальная, S-полуперестановочная, τ-квазинормальная или S-вложенная подгруппа группы G слабо τ-вложена в G. С другой стороны, ясно, что любая S-квазинормально вложенная подгруппа группы G слабо S-вложена в G.

Кроме понятий, упомянутых в § 1, есть еще несколько, которые стоит ввести. Напомним, что подгруппа H группы G называется *c-нормальной в G* [22], если существует нормальная подгруппа K группы G такая, что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_G$, где H_G — наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H; подгруппа H группы G называется c*-нормальной [23] в G, если существует нормальная подгруппа K группы G такая, что $G = HK$ и $H \cap K$ S-квазинормально вложена в G; подгруппа H группы G называется *n-вложенной в G* [20], если существует нормальная подгруппа K группы G такая, что $HK = H^G$ и $H \cap K \leq H_{sG}$. Несложно понять, что все такие подгруппы группы G также слабо S-вложены или слабо τ-вложены в G.

Таким образом, из полученных теорем непосредственно вытекает много следствий. Приведем некоторые из них.

Следствие 4.1 [24, теорема 3.3]. *Пусть p — наименьшее простое число, делящее $|G|$, и P — силовская p-подгруппа группы G. Если любая максимальная подгруппа группы P S-полуперестановочна в G, то G p-нильпотентна.*

Следствие 4.2 [23, теорема 3.1]. *Пусть H — нормальная подгруппа группы G такая, что G/H p-нильпотентна, и P — силовская p-подгруппа группы H, где p — простой делитель числа $|G|$ и $(|G|, p-1) = 1$. Если все максимальные подгруппы группы P c*-нормальны в G, то G p-нильпотентна. В частности, G p-сверхразрешима.*

Следствие 4.3 [25, теорема 2.3]. *Пусть P — силовская p-подгруппа группы G, где p — простой делитель числа $|G|$ и $(|G|, p-1) = 1$. Если любая максимальная подгруппа группы P, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, S-вложена в G, то G p-нильпотентна.*

Следствие 4.4 [6, теорема 1.7]. *Пусть p — наименьшее простое число, делящее $|G|$, и P — силовская p-подгруппа группы G. Если любая 2-максимальная подгруппа группы P SS-квазинормальна в G и G A_4-свободна, то G p-нильпотентна.*

Следствие 4.5 [24, теорема 3.5]. *Пусть p — наименьшее простое число, делящее $|G|$, и P — силовская p-подгруппа группы G. Если любая 2-максимальная подгруппа группы P S-полуперестановочна в G и G A_4-свободна, то G p-нильпотентна.*

Следствие 4.6 [6, теорема 1.5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа H группы G такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и для любого простого числа p, делящего $|H|$, и любой $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$ любая максимальная подгруппа группы P SS-квазинормальна в G.*

Следствие 4.7 [26, теорема 2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа H группы G такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы группы H S-полуперестановочны в G.*

Следствие 4.8 [23, теорема 4.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Предположим, что G — группа с нормальной подгруппой H такой, что $G/H \in \mathfrak{F}$. Если все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы группы H c*-нормальны в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Следствие 4.9 [27, теорема 3.4]. *Если все циклические подгруппы простого порядка или порядка 4 группы G SS-квазинормальны в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 4.10 [26, теорема 3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа H группы G такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и все циклические подгруппы простого порядка или порядка 4 группы H S-полуперестановочны в G.*

Следствие 4.11 [20, теорема D]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если для любой нециклической силовской подгруппы P группы E любая максимальная подгруппа группы P или любая циклическая подгруппа H группы P простого порядка или порядка 4 (когда P — неабелева 2-группа и $H \nsubseteq Z_\infty(G)$) n-вложена в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Следствие 4.12 [9, теорема C]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Предположим, что для любой нециклической силовской подгруппы P группы E любая максимальная подгруппа P или любая циклическая подгруппа H группы P простого порядка или порядка 4 $\big($когда P — неабелева 2-группа и $H \nsubseteq Z_\infty(G)\big)$* S-*вложена в G. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Следствие 4.13 [27, теорема 3.3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа H группы G такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы группы $F^*(H)$* SS-*квазинормальны в G.*

Следствие 4.14 [27, теорема 3.7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует нормальная подгруппа H группы G такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и все циклические подгруппы простого порядка или порядка 4 группы $F^*(H)$* SS-*квазинормальны в G.*

Следствие 4.15 [26, теорема 2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует разрешимая нормальная подгруппа H группы G такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы группы $F(H)$* S-*полуперестановочны в G.*

Следствие 4.16 [26, теорема 4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда существует разрешимая нормальная подгруппа H группы G такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и все циклические подгруппы простого порядка или порядка 4 группы $F(H)$* S-*полуперестановочны в G.*

Следствие 4.17 [23, теорема 4.3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Предположим, что G — группа с нормальной подгруппой H такой, что $G/H \in \mathfrak{F}$. Если все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы группы $F^*(H)$* c*-*нормальны в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Следствие 4.18 [20, теорема E]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если для любой нециклической силовской подгруппы P группы $F^*(E)$ любая максимальная подгруппа группы P или любая циклическая подгруппа H группы P простого порядка или порядка 4 (когда P — неабелева 2-группа и $H \nsubseteq Z_\infty(G)$)* n-*вложена в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Следствие 4.19 [9, теорема D]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Предположим, что для любой нециклической силовской подгруппы P группы $F^*(E)$ любая максимальная подгруппа группы P или любая циклическая подгруппа H группы P простого порядка или порядка 4 (когда P — неабелева 2-группа и $H \nsubseteq Z_\infty(G)$)* S-*вложена в G. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979.
2. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. New York: Springer-Verl., 1996.
3. *Guo W.* The theory of classes of groups. Dordrecht: Kluwer, 2000.

4. *Kegel O. H.* Sylow-gruppen und subnormalteiler endlicher gruppen // Math. Z. 1962. Bd 78. S. 205–221.
5. *Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M. C.* Sufficient conditions for supersolubility of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 1998. V. 127. P. 113–118.
6. *Li S., Shen Z., Liu J., Liu X.* The influence of SS-quasinormality of some subgroups on the structure of finite groups // J. Algebra. 2008. V. 319. P. 4275–4287.
7. *Chen Z.* On a theorem of Srinivasan // J. Southwest Normal Univ. Nat. Sci. 1987. V. 12, N 1. P. 1–4.
8. *Lukyanenko V. O., Skiba A. N.* On τ-quasinormal and weakly τ-quasinormal subgroups of finite groups // Math. Sci. Res. J. 2008. V. 12. P. 243–257.
9. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* On solubility and supersolubility of some classes of finite groups // Sci. China, Ser. A. 2009. V. 52, N 1. P. 1–15.
10. *Li J., Chen G., Chen R.* On weakly S-embedded subgroups of finite groups // Sci. China, Ser A. 2011. V. 54, N 9. P. 1899–1908.
11. *Deskins W. E.* On quasinormal subgroups of finite groups // Math. Z. 1963. Bd 82. S. 125–132.
12. *Schmid P.* Subgroups permutable with all Sylow subgroups // J. Algebra. 1998. V. 82, N 1. P. 285–293.
13. *Lukyanenko V. O., Skiba A. N.* On weakly τ-quasinormal subgroups of finite groups // Acta Math. Hungar. 2009. V. 125, N 3. P. 247–248.
14. *Li Y., Wang Y., Wei H.* On p-nilpotency of finite groups with some subgroups π-quasinormally embedded // Acta Math. Hungar. 2005. V. 108, N 4. P. 283–298.
15. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
16. *Cross F.* Conjugacy of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. 1987. V. 19, N 4. P. 311–319.
17. *Wang Y., Wei H., Li Y.* A generalization of a theorem of Kramer and its applications // Bull. Austral. Math. Soc. 2002. V. 65. P. 467–475.
18. *Tate J.* Nilpotent quotient groups // Topology. 1964. V. 3. P. 109–111.
19. *Guo W.* On $\mathfrak{F}$-supplemented subgroups of finite groups // Manuscr. Math. 2008. V. 127. P. 139–150.
20. *Guo W., Skiba A. N.* Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups // J. Algebra. 2009. V. 321. P. 2843–2860.
21. *Huppert B., Blackburn N.* Finite Groups. III. Berlin: Springer-Verl., 1982.
22. *Wang Y.* c-Normality of groups and its properties // J. Algebra. 1996. V. 180, N 3. P. 954–965.
23. *Wei H., Wang Y.* On c*-normality and its properties // J. Group Theory. 2007. V. 10. P. 211–224.
24. *Wang L., Wang Y.* On S-semipermutable maximal and minimal subgroups of Sylow p-subgroups of finite groups // Comm. Algebra. 2006. V. 34. P. 143–149.
25. *Го В., Лу И., Ню В.* Об S-вложенных подгруппах конечных групп // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 4. С. 433–450.
26. *Zhang Q., Wang L.* The influence of S-semipermutability of some subgroups on the structure of groups // Acta Math. Sin. 2005. V. 48, N 1. P. 81–88. (in chinese).
27. *Li S., Shen Z., Kong X.* On SS-quasinormal subgroups of finite groups // Comm. Algebra. 2008. V. 36. P. 4436–4447.

Статья поступила 22 сентября 2012 г.

Xiaoyu Chen (Чен Сяоюй), Wenbin Guo (Го Вэньбинь)
School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China,
Wu Wen-Tsun Key Laboratory of Mathematics, Chinese Academy of Science,
Hefei 230026 China
jelly@mail.ustc.edu.cn, wbguo@ustc.edu.cn