*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5*

*УДК 512.541*

# ОБ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ С ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ МОНОМОРФИЗМАМИ

**А. Р. Чехлов**

**Аннотация.** Найдены необходимые и достаточные условия, при которых абелевы группы с перестановочными мономорфизмами имеют нормальное кольцо эндоморфизмов. Описаны делимые группы с инвариантными слева или справа мономорфизмами и доказано, что редуцированные группы без кручения с инвариантными слева или справа мономорфизмами имеют нормальное кольцо эндоморфизмов. Указаны необходимые и достаточные условия левой и правой инвариантности мономорфизмов для некоторых классов расщепляющихся групп.

**Ключевые слова:** левая (правая) инвариантность мономорфизмов, нормальное кольцо эндоморфизмов, центральный идемпотентный эндоморфизм.

Все группы в статье предполагаются абелевыми. Через $E(A)$ обозначается кольцо эндоморфизмов группы $A$, через $1_A$ — ее тождественный автоморфизм; $Z_n$ — циклическая группа порядка $n$, $Z_{p^\infty}$ — квазициклическая $p$-группа. Если $f\colon A \to B$ — групповой гомоморфизм, то $f|G$ — ограничение $f$ на подмножестве $G \subseteq A$. Подгруппу $H$ группы $A$ будем называть *вполне инвариантной*, если $fH \subseteq H$ для каждого $f \in E(A)$.

Напомним, что кольцо называется *нормальным*, если центральны все его идемпотенты. Как показано в [1], нормальность кольца с 1 эквивалентна перестановочности его идемпотентов. Известно, что нормальность кольца эндоморфизмов эквивалентна вполне инвариантности прямых слагаемых группы [2, утверждение 3.15]. Для некоторых классов групп нормальность их кольца эндоморфизмов влечет его коммутативность [3].

В статье рассматриваются группы с перестановочными мономорфизмами; ясно, что мономорфизмы прямых слагаемых таких групп также перестановочны. Более широкий класс образуют группы $A$, мономорфизмы которых инвариантны слева (соответственно справа), т. е. для любых мономорфизмов $\alpha, \beta$ группы $A$ найдется ее мономорфизм $\gamma$ со свойством $\alpha\beta = \gamma\alpha$ (соответственно $\alpha\beta = \beta\gamma$). Рядом авторов изучались группы с инвариантными слева или справа эндоморфизмами [4, § 19, 34], изучение этих групп связано с исследованием классов групп, рассматривавшихся в [5–7].

Отметим, что автоморфизмы любой группы инвариантны как справа, так и слева. Следовательно, к рассматриваемому классу групп относятся все конечные группы. Для сравнения заметим, что периодические группы с инвариантными слева или справа эндоморфизмами имеют коммутативное кольцо

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (№ 14. В 37.21.0354).

эндоморфизмов [4, следствие 19.3]. Существуют группы, у которых перестановочность мономорфизмов не влечет даже нормальности их кольца эндоморфизмов.

Пример. В группе $G = Z_{2^\infty} \oplus Z_2$ все мономорфизмы перестановочны.

Доказательство. Слагаемое $Z_{2^\infty}$ вполне инвариантно в $G$. Значит, эндоморфизмы $f, g$ группы $G$ можно представить в виде матриц $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$, где $\alpha, \delta \in E(Z_{2^\infty})$, $\beta, \varepsilon \in \mathrm{Hom}(Z_2, Z_{2^\infty})$, а $\gamma, \zeta \in E(Z_2)$. Кольца $E(Z_{2^\infty})$ и $E(Z_2)$ коммутативны, поэтому равенство $fg = gf$ эквивалентно равенству $\alpha\varepsilon + \beta\zeta = \delta\beta + \varepsilon\gamma$. Если $f$ и $g$ — мономорфизмы, то $\gamma$, $\zeta$ не равны 0 и, значит, являются тождественными автоморфизмами группы $Z_2$. Ограничения эндоморфизмов $\alpha, \delta$ на цоколе группы $Z_{2^\infty}$ также действуют как тождественный автоморфизм. Так как образ группы $Z_2$ в $Z_{2^\infty}$ совпадает с цоколем группы $Z_{2^\infty}$, то $\alpha\varepsilon = \varepsilon\gamma$ и $\beta\zeta = \delta\beta$, в частности, $\alpha\varepsilon + \beta\zeta = \delta\beta + \varepsilon\gamma$.

**Теорема 1.** *Пусть $A$ — группа с перестановочными мономорфизмами. Тогда*

1) *если $A$ не имеет прямых слагаемых, изоморфных группе $Z_{2^\infty} \oplus Z_2$, то кольцо $E(A)$ нормально;*

2) *если $A$ содержит прямое слагаемое $G$, изоморфное группе $Z_{2^\infty} \oplus Z_2$, то дополнительное прямое слагаемое к $G$ в группе $A$ вполне инвариантно в $A$ и является периодической группой с коммутативным кольцом эндоморфизмов.*

Доказательство. 1. Пусть $A = B \oplus C$ и $0 \neq f \in \mathrm{Hom}(B, C)$. Возможны следующие три случая.

(а) Найдется такой элемент $b_0 \in B$, что порядок элемента $f(b_0)$ больше 2. Зададим мономорфизмы $\alpha, \beta$ группы $A$ следующим образом: $\alpha b = b + fb$, $\alpha g = g$, $\beta b = b$, $\beta g = -g$, где $b \in B$, $g \in C$. Так как $2f(b_0) \neq 0$, то $(\alpha\beta)b_0 = b_0 + f(b_0) \neq (\beta\alpha)b_0 = b_0 - f(b_0)$.

(б) В группе $B$ нет элементов порядка 2. Тогда отображения $\alpha b = 2b$, $\alpha g = g$ и $\beta b = b + fb$, $\beta g = g$, где $b \in B$, $g \in C$, являются мономорфизмами группы $A$. Имеем $(\alpha\beta)b = 2b + fb \neq (\beta\alpha)b = 2b + 2fb = 2b$.

(в) 2-компонента группы $B$ отлична от нуля. По условию в $B$ нет подгрупп, изоморфных $Z_{2^\infty}$. Поэтому группа $B$ содержит прямое слагаемое, изоморфное $Z_{2^n}$ для некоторого натурального $n$. Так как прямые слагаемые группы $A$ также обладают свойством перестановочности своих мономорфизмов, можно считать, что $B = \langle b \rangle \cong Z_{2^n}$, а $C = \langle g \rangle \cong Z_2$. Рассмотрим мономорфизмы $\alpha b = b + g$, $\alpha g = g$ и $\beta b = b$, $\beta g = 2^{n-1}b + g$. Имеем $(\alpha\beta)b = b + g \neq (\beta\alpha)b = b + 2^{n-1}b + g$.

2. Делимые группы инъективны, поэтому согласно случаю (а) дополнительное прямое слагаемое к $G$ должно быть периодической группой, а из (в) следует, что ее 2-компонента нулевая. По утверждению 1 кольцо эндоморфизмов этой периодической группы нормально и, значит, коммутативно (так как каждая ненулевая $p$-компонента такой группы является коциклической группой). $\square$

Приведем следующие простые свойства, используемые далее в доказательствах.

**1.** Пусть $A = B \oplus C$. Эндоморфизм $\alpha$ группы $A$ является ее мономорфизмом тогда и только тогда, когда ограничения $\alpha|B$, $\alpha|C$ являются мономорфизмами и $(\alpha B) \cap (\alpha C) = 0$.

**2.** Пусть $B$ — вполне инвариантная подгруппа, а $\alpha$ — мономорфизм группы $A$ такой, что $\alpha B = B$ и $\alpha(A/B) = A/B$. Тогда $\alpha$ — автоморфизм группы $A$.

**3.** Если группа обладает свойством левой инвариантности мономорфизмов, то каждое ее вполне инвариантное прямое слагаемое также обладает этим свойством.

**4.** Если группа $A$ обладает свойством правой инвариантности мономорфизмов, то каждое ее прямое слагаемое $B$ также обладает этим свойством.

Действительно, пусть $A = B \oplus C$ и $\alpha, \beta$ — мономорфизмы группы $B$. Продолжим их до мономорфизмов $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ группы $A$, полагая $\bar{\alpha}|C = 1_C$, $\bar{\beta}|C = 1_C$. Если $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{\beta}\gamma$, то из задания $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ следует, что $\gamma|B$ — мономорфизм группы $B$ и $\alpha\beta = \beta(\gamma|B)$.

**5.** Если $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ $(A = \prod\limits_{i \in I} A_i)$, где $A_i$ — вполне инвариантные подгруппы в $A$, то $A$ обладает свойством правой или левой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда каждая $A_i$ обладает соответствующим свойством.

**6.** Если $A = B \oplus C$, $\theta\colon A \to C$ — проекция и $\alpha$ — мономорфизм группы $A$ такой, что $\alpha B = B$, то $(\theta\alpha)|C$ — мономорфизм группы $C$.

**Теорема 2.** *Для делимой группы $D$ эквивалентны следующие условия:*

(а) *ее мономорфизмы инвариантны справа;*

(б) *любой ее мономорфизм является автоморфизмом;*

(в) *часть без кручения группы $D$, а также каждая ее $p$-компонента имеют конечный ранг.*

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (в). Каждая $p$-компонента, а также часть без кручения группы $D$ являются прямыми слагаемыми в $D$, поэтому они также обладают свойством правой инвариантности мономорфизмов. Если ранг одной из этих подгрупп бесконечен, то можно так выбрать ее мономорфизмы $\alpha$ и $\beta$, что $\operatorname{im}\alpha \cap \operatorname{im}\beta = 0$, но тогда равенство $\alpha\beta = \beta\gamma$ невозможно. Импликация (в) $\Rightarrow$ (б) вытекает из свойства 2, импликация (б) $\Rightarrow$ (а) справедлива всегда. $\square$

**Предложение 1.** *Мономорфизмы каждой делимой группы $D$ инвариантны слева.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta$ — мономорфизмы группы $D$. Рассмотрим случай, когда $D$ — группа без кручения или $p$-группа. Пусть $\{a_i\}_{i \in I}$ — максимальная линейно независимая система элементов группы $D$. Имеем $(\alpha\beta)D = \bigoplus\limits_{i \in I} \overline{\alpha\beta a_i}$, где $\overline{\alpha\beta a_i} \cong \mathbb{Q}$, если $D$ — группа без кручения, и $\overline{\alpha\beta a_i} \cong Z_{p^\infty}$, если $D$ — $p$-группа. Далее, $D = ((\alpha\beta)D) \oplus G = (\alpha D) \oplus B$ для некоторых подгрупп $G, B \subseteq D$. Отсюда $\alpha D = ((\alpha\beta)D) \oplus C$, где $C = (\alpha D) \cap G$. Поэтому ранг группы $G$ не меньше ранга группы $B$. В силу инъективности $D$ отображение $\alpha a_i \mapsto (\alpha\beta)a_i$, $i \in I$, продолжается до некоторого гомоморфизма $\gamma\colon \alpha D \to (\alpha\beta)D$, являющегося мономорфизмом. Если $\gamma\colon B \to G$ — произвольный мономорфизм, то $\gamma$ является мономорфизмом группы $D$ таким, что $\alpha\beta = \gamma\alpha$.

Пусть $D$ — произвольная делимая группа и $D = T \oplus D_0$, где $T$ — периодическая часть $D$, а $D_0$ — часть без кручения; $\pi\colon D \to T$ и $\theta\colon D \to D_0$ — проекции. Имеем $\alpha\beta = (\pi\alpha+\theta\alpha)(\pi\beta+\theta\beta) = \pi\alpha\pi\beta+\pi\alpha\theta\beta+\theta\alpha\theta\beta$ (учтено, что $\theta\alpha\pi\beta = 0$). По доказанному $(\alpha|T)\cdot(\beta|T) = (\pi\alpha\cdot\pi\beta)|T = \delta(\alpha|T)$ для некоторого мономорфизма $\delta$ группы $T$. Заметим, что $(\theta\alpha)|D_0$ — мономорфизм группы $D_0$. Действительно, если $(\theta\alpha)y = 0$ для $0 \neq y \in D_0$, то $\alpha y \in T$, но тогда $0 \neq ny \in \ker \alpha$ для некоторого натурального $n$, поскольку $T$ — периодическая группа; противоречие. Поэтому $((\theta\alpha)|D_0) \cdot ((\theta\beta)|D_0) = \gamma((\theta\alpha)|D_0)$ для некоторого мономорфизма $\gamma \in E(D_0)$. Имеем $(\theta\alpha)|D_0 \subseteq D_0$ и отображение $(\theta\alpha)y \mapsto (\pi\alpha\pi\beta + \pi\alpha\theta\beta - \delta\pi\alpha)y$, где $y \in D_0$, продолжается до некоторого гомоморфизма $\xi\colon D_0 \to D$. Положим $\delta|D_0 = 0$, $\xi|T = 0$, $\gamma|T = 0$, и пусть $\psi = \delta + \xi + \gamma$. Тогда $\psi\alpha = \alpha\beta$. Действительно, если $x \in T$, то $(\psi\alpha)x = (\delta\alpha)x = (\alpha\beta)x$. Пусть $y \in D_0$. Имеем $(\psi\alpha)y = \psi(\pi\alpha y + \theta\alpha y) = \delta\pi\alpha y + (\pi\alpha\pi\beta + \pi\alpha\theta\beta - \delta\pi\alpha)y + \gamma\theta\alpha y = (\pi\alpha\pi\beta + \pi\alpha\theta\beta)y + (\theta\alpha\theta\beta)y = (\alpha\beta)y$. Осталось показать, что $\psi$ — мономорфизм. Если $0 \neq x \in T$, то $\psi x = \delta x \neq 0$. Если $0 \neq y \in D_0$, то $\psi y = \xi y + \gamma y$. Здесь $\xi y \in T$ и $0 \neq \gamma y \in D_0$. Поэтому $\psi y \neq 0$. Тогда $\psi(x + y) = (\delta x + \xi y) + \gamma y \neq 0$. $\square$

**Теорема 3.** 1. *Если у делимой части группы $A$ все мономорфизмы являются автоморфизмами, то мономорфизмы группы $A$ инвариантны слева тогда и только тогда, когда инвариантны слева мономорфизмы ее редуцированной части.*

2. *У нередуцированной группы $A$ мономорфизмы инвариантны справа тогда и только тогда, когда этим свойством обладают ее редуцированная и делимая части.*

Доказательство. Пусть $A = D \oplus G$, где $D$ — делимая часть группы $A$, $\pi\colon A \to D$ и $\theta\colon A \to G$ — проекции.

1. Необходимость. Если $\alpha, \beta$ — мономорфизмы группы $G$, то продолжим их до мономорфизмов $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ группы $A$, полагая $\bar{\alpha}|D = 1_D$, $\bar{\beta}|D = 1_D$. По условию $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \gamma\bar{\alpha}$ для некоторого мономорфизма $\gamma$ группы $A$, откуда $\alpha\beta = (\theta\gamma)\alpha$. Осталось показать, что $\theta\gamma$ — мономорфизм группы $G$. Допустим, что $(\theta\gamma)g = 0$ для некоторого $0 \neq g \in G$. Тогда $x = \gamma g \in D$. Так как $(\bar{\alpha}\bar{\beta})D = D$, то $\gamma D = D$, т. е. $x = \gamma y$ для некоторого $y \in D$, тем самым $0 \neq y - g \in \ker\gamma$; противоречие.

Достаточность доказываем аналогично рассуждениям из предложения 1. Пусть $\alpha, \beta$ — мономорфизмы группы $A$. По условию $(\alpha\beta)|D = (\pi\alpha\pi\beta)|D = \delta((\pi\alpha)|D)$ и $(\theta\alpha\theta\beta)|G = \gamma((\theta\alpha)|G)$ для некоторых мономорфизмов $\delta \in E(D)$ и $\gamma \in E(G)$. Имеем $(\pi\alpha + \theta\alpha)(\pi\beta + \theta\beta) = \pi\alpha\pi\beta + \pi\alpha\theta\beta + \theta\alpha\theta\beta$ $(\theta\alpha\pi\beta = 0)$. Так как $\theta\alpha G \subseteq G$, отображение $(\theta\alpha)g \mapsto (\pi\alpha\pi\beta + \pi\alpha\theta\beta - \delta\pi\alpha)g$, где $g \in G$, продолжается до некоторого гомоморфизма $\xi\colon G \to D$. Полагаем $\delta|G = 0$, $\xi|D = 0$, $\gamma|D = 0$, и пусть $\psi = \delta + \xi + \gamma$. Покажем, что $\psi\alpha = \alpha\beta$. Действительно, если $x \in D$, то $\psi\alpha x = \delta\alpha x = \delta(\pi\alpha)x = (\alpha\beta)x$. Пусть $g \in G$. Имеем $(\psi\alpha)g = \psi(\pi\alpha g + \theta\alpha g) = \delta\pi\alpha g + (\pi\alpha\pi\beta + \pi\alpha\theta\beta - \delta\pi\alpha)g + \gamma\theta\alpha g = (\pi\alpha\pi\beta + \pi\alpha\theta\beta)g + (\theta\alpha\theta\beta)g = (\alpha\beta)g$. Далее, если $0 \neq x \in D$, то $\psi x = \delta x \neq 0$. Если $0 \neq g \in G$, то $\psi g = \xi g + \gamma g$. Здесь $\xi g \in D$ и $0 \neq \gamma g \in G$. Поэтому $\psi g \neq 0$ и $\psi(x + g) = (\delta x + \xi g) + \gamma g \neq 0$, т. е. $\psi$ — мономорфизм группы $A$.

2. Необходимость следует из свойства 4. Достаточность. В силу вполне инвариантности подгруппы $D$ в $A$ эндоморфизмы $f, g$ группы $A$ можно представить в виде матриц $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$, где $\alpha, \delta \in E(D)$, $\beta, \varepsilon \in \mathrm{Hom}(G, D)$, а $\gamma, \zeta \in E(G)$. Имеем $\alpha\delta = \delta\eta$ и $\gamma\zeta = \zeta\lambda$ для некоторых мономорфизмов $\eta \in E(D)$ и $\lambda \in E(G)$. В силу теоремы 2 $\delta$ является автоморфизмом группы $D$, поэтому определен гомоморфизм $\mu = \delta^{-1}(\alpha\varepsilon + \beta\zeta - \varepsilon\lambda) \in \mathrm{Hom}(G, D)$. Если $h = \begin{pmatrix} \eta & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, то $fg = gh$. $\square$

**Предложение 2.** *Если $A$ — редуцированная группа без кручения с инвариантными слева или справа мономорфизмами, то кольцо $E(A)$ нормально.*

Доказательство. Допустим, что $A = B \oplus C$ и $f\colon C \to B$ — ненулевой гомоморфизм. Зададим мономорфизмы $\alpha, \beta, \delta$ группы $A$ следующим образом: $\alpha x = nx$, $\alpha b = b$, $\beta x = x + fx$, $\beta|B$ — произвольный мономорфизм группы $B$, $\delta b = nb$, $\delta x = x$, где $x \in C$, $b \in B$, причем $n$ — натуральное число такое, что $fx \notin nA$. Тогда $\alpha\beta(x) = \alpha(x + fx) = nx + fx$. Допустим, что $\alpha\beta(x) = \gamma\alpha(x)$ для некоторого мономорфизма $\gamma$. Тогда если $\pi\colon A \to B$ — проекция, то $\pi\gamma\alpha(x) = n\pi\gamma(x) = fx$; противоречие.

Допустим, что $\beta\delta = \delta\varphi$ для некоторого мономорфизма $\varphi$ группы $A$. Имеем $\beta\delta(x) = x + fx$. Если $\varphi x = u + v$, где $u \in B$, $v \in C$, то $x + fx = \delta(u + v) = nu + v$, откуда $fx = nu$; противоречие. $\square$

Как в более частном случае исследования групп с коммутативными кольцами эндоморфизмов [4, § 19], задача изучения групп с инвариантными мономорфизмами практически не разрешима для произвольных групп без кручения, хотя для отдельных классов таких групп в последние десятилетия получены значительные продвижения в их структурной теории (см., например, [4, 8, 9] и др.).

**Теорема 4.** *Пусть $A = T \oplus R$ — редуцированная расщепляющаяся группа, где $T$ — периодическая ее часть, а $R$ — часть без кручения. Тогда*

1) *группа $A$ обладает свойством левой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладают группы $T$ и $R$, причем подгруппа $R$ вполне инвариантна в $A$;*

2) *если каждая $p$-компонента группы $T$ конечна, то группа $A$ обладает свойством правой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает группа $R$.*

Доказательство. Для правой инвариантности необходимость следует из свойства 4. Пусть $A$ — группа с левой инвариантностью мономорфизмов и $fx \neq 0$ для некоторого $x \in R$, где $f \in \mathrm{Hom}(R, T)$. В силу редуцированности группы $T$ найдется натуральное $n$ со свойством $fx \notin nT$. Зададим мономорфизмы $\alpha, \beta$ группы $A$ следующим образом: $\alpha|T = 1_T$, $\alpha|R = n \cdot 1_R$, $\beta|T$ — произвольный мономорфизм группы $T$, а $\beta y = fy + y$ для каждого $y \in R$. Имеем $\alpha\beta(x) = \alpha(fx + x) = fx + nx$. Допустим, что $\alpha\beta(x) = \gamma\alpha(x)$. Тогда если $\pi\colon A \to T$ — проекция, то $\pi\gamma\alpha(x) = n\gamma(x) = fx$. Полученное противоречие показывает, что $\mathrm{Hom}(R, T) = 0$, т. е. $pR = R$ для каждого простого числа $p$ с условием $T_p \neq 0$. Ссылка на свойство 3 заканчивает доказательство необходимости.

В случае левой инвариантности достаточность следует из свойства 5. Достаточность для правой инвариантности доказывается аналогично достаточности п. 2 теоремы 3. $\square$

Близкие вопросы рассматривались в [10–16]. В [17] доказаны следующие результаты.

**Теорема 5.** *Пусть $A$ — $p$-группа, являющаяся прямой суммой циклических групп. Тогда мономорфизмы группы $A$ инвариантны слева тогда и только тогда, когда $A$ либо конечная группа, либо имеет вид $A = B \oplus G \oplus F$, где $B = \langle b \rangle$ — циклическая группа, $G$ — бесконечная прямая сумма циклических групп одного и того же порядка $p^r$. Если $B \neq 0$, то $p^r > o(b)$, а $F = 0$ или $F = \bigoplus_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle$ — конечная группа такая, что $p^r < o(x_i)$ для каждого $i = 1, \ldots, n$.*

**Теорема 6.** *Пусть $A$ — прямая сумма циклических групп. Группа $A$ обладает свойством:*

1) *левой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда $A$ либо периодическая группа, каждая $p$-компонента которой является группой, рассматриваемой в теореме* 5, *либо изоморфна аддитивной группе целых чисел;*

2) *правой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда $A = B \oplus R$, где $B$ — периодическая группа, каждая $p$-компонента которой конечна, а $R = 0$ или группа $R$ изоморфна аддитивной группе целых чисел.*

## ЛИТЕРАТУРА


**1.** *Чехлов А. Р.* О проективном коммутанте абелевых групп // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 451–464.
**2.** *Туганбаев А. А.* Теория колец (Арифметические модули и кольца). М.: МЦНМО, 2009.
**3.** *Чехлов А. Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 4. С. 520–539.
**4.** *Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2007.
**5.** *Чехлов А. Р.* $E$-энгелевы абелевы группы ступени $\leqslant 2$ // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2012. № 1. С. 54–60.
**6.** *Чехлов А. Р.* Об абелевых группах с нильпотентными коммутаторами эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 60–73.
**7.** *Чехлов А. Р.* О проективно разрешимых абелевых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1157–1165.
**8.** *Fomin A. A.* Abelian groups in Russia // Rocky Mount. J. Math. 2002. V. 32, N 4. P. 1161–1180.
**9.** *Mikhalev A. V., Mishina A. P.* Infinite Abelian groups: Methods and results // Handb. Algebra. 2000. V. 2. P. 667–704.
**10.** *Călugăreanu G., Schultz Ph.* Modules with Abelian endomorphism rings // Bull. Aust. Math. Soc. 2010. V. 82, N 1. P. 99–112.
**11.** *Wei J., Li N.* Some notes on semiabelian rings // Int. J. Math. Math. Sci. 2011. Article ID 154636, 10 p. (2011).
**12.** *Danchev P. V., Goldsmith B.* On socle-regularity and some notions of transitivity for Abelian $p$-groups // J. Commut. Algebra. 2011. V. 3, N 3. P. 301–319.
**13.** *Schultz Ph., Breaz S.* Dualities for self-small groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2012. V. 140, N 1. P. 69–82.
**14.** *Туганбаев А. А.* Автоморфизмы подмодулей и их продолжения // Дискрет. математика. 2013. Т. 25, № 1. С. 144–151.
**15.** *Albrecht U., Breaz S., Wickless W.* $A$-solvability and mixed Abelian groups // Commun. Algebra. 2009. V. 37, N 2. P. 439–452.
**16.** *Danchev P. V., Keef P. W.* Nice elongations of primary Abelian groups // Publ. Mat. 2010. V. 54, N 2. P. 317–339.
**17.** *Чехлов А. Р.* О прямых суммах циклических групп с инвариантными мономорфизмами // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2013. № 3. С. 60–65.


*Статья поступила 4 октября 2012 г.*

Чехлов Андрей Ростиславович
Национальный исследовательский Томский гос. университет,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
`cheklov@math.tsu.ru`