Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 517.933/517.928.7

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ В ЗАДАЧЕ БЬЁРКНЕСА

В. А. Владимиров, А. Б. Моргулис

Аннотация. Рассматривается движение твердого тела произвольной формы в вибрирующем безвихревом потоке. Устанавливается достаточное условие существования относительных равновесий тела, т. е. равновесий усредненной системы.

Ключевые слова: плавучесть Бьёркнеса, система «жидкость — тело», вибродинамика.

Памяти С. М. Зеньковской

При колебаниях жидкости с твердыми включениями последние могут приобрести дополнительную плавучесть благодаря средней силе, действующей на них со стороны жидкости. Исследования этого эффекта восходят к Бьёркнесу [1], Хиксу [2, 3], и Н. Е. Жуковскому [4] (см. также ссылки в [5]), и к настоящему времени число работ на эту тему почти необозримо (см., например, [6–14], а также имеющиеся в них ссылки). В классической теории рассматривается твердое тело, погруженное в безвихревую несжимаемую жидкость. Колебания этой системы могут вынуждаться периодическими движениями непроницаемых границ и более общими изменениями области течения. Эффект колебаний малых амплитуд и высоких частот обнаруживается с помощью асимптотических приближений типа ван-дер-Поля — Боголюбова — Капицы. На этом пути получено множество частных результатов, из которых становится понятно, что бьёркнесова плавучесть — явление той же природы, что и вибрационная стабилизация перевернутого маятника. Однако это понимание, насколько нам известно, долгое время не формализовалось в общей теории. Напротив, рассматривались весьма специальные формы тел и границ (круглые цилиндры, шары, плоскости и т. д.) и движений (плоские и даже одномерные). Частично этот пробел заполняют недавние работы [12, 15], основанные на общей инвариантной форме метода усреднения для лагранжевых динамических систем со связями [16–18]. На этой основе в [12, 15] рассмотрена вибродинамика классической системы «жидкость+твердое тело» без специальных ограничений на форму тела. В частности, выведены уравнения среднего движения и сформулирован ряд утверждений качественного характера о таком движении. В [15] рассмотрена, вероятно, простейшая из сколько-нибудь общих моделей, где вибратором служит неподвижный точечный источник. Когда тело — шар, эта система допускает прямолинейные движения. Такие движения исследованы в [7], где установлено, что при нулевой начальной скорости шара и произвольной частоте пульсаций источника тяжелый шар всегда притягивается к источнику (тонет), но легкий шар может уйти на бесконечность (всплыть), если первоначальное расстояние от его центра до источника достаточно велико. При этом критическое для всплытия расстояние представляет собой равновесие. В настоящей статье этот результат в определенном смысле обобщается на произвольное тело, но в отличие от [7] рассматривается случай высокой частоты пульсаций. Исследование включает три этапа. Сначала устанавливается принцип наименьшего действия для системы «тело+жидкость с источником», причем соответствующий лагранжиан явно выражается через функцию Грина жидкой области. Затем рассматриваются вибрации источника и вычисляется лагранжиан усредненной системы. Наконец указываются достаточные условия существования точки максимума потенциальной энергии усредненной системы. Выполнение этих условий предполагает, что тело легче жидкости и интенсивность пульсаций источника достаточна велика по сравнению с его средней интенсивностью. Таким образом, благодаря вибрации возникает потенциальный барьер, отделяющий источник от бесконечности.

В случае однородного шара лагранжиан выражается в конечном виде через элементарные функции и существование относительных равновесий проверяется непосредственно, что позволяет исследовать движение довольно полно. Пример шара используется для контроля точности условий теоремы о существовании равновесий.

1. Уравнения движения

Рассмотрим движение произвольного твердого тела в потенциальном потоке идеальной, несжимаемой и однородной жидкости, заполняющей внешность тела. Жидкость истекает из неподвижного точечного источника и «стекает» на бесконечность, где возмущения скорости, создаваемые движением тела, полностью затухают.

Форма твердого тела определяется заданной *отсчетной областью* $D_0 \subset \mathbb{R}^3$, которая предполагается ограниченной и односвязной, а ее граница $S_0 = \partial D_0$ — гладкой.

Условимся о масштабировании: за единицу длины принимается величина $l_0 = \sqrt{|S_0|/(4\pi)}$, где $|S_0|$ — площадь твердой поверхности; за единицу массы принимается масса жидкости, взятой в объеме тела; единица времени T и единица интенсивности источника Q выбираются так, что $QT = |D_0|$, где $|D_0|$ — объем тела. В последующем изложении все величины безразмерны; в частности, безразмерные масса тела μ и плотность жидкости ρ имеют вид

$$\rho = (|S_0|/(4\pi))^{3/2}|D_0|^{-1}, \quad \mu = \mu_b/\mu_f, \tag{1.1}$$

где μ_b — масса тела и μ_f — масса жидкости, взятой в объеме тела. Заметим, что величина ρ^{-1} равна безразмерному объему тела.

Поместим источник в начало координат и совместим с ним геометрический центр отсчетной области, так что

$$\int\limits_{D_0} a\,da = 0. \tag{1.2}$$

В таком случае твердое тело не может занять отсчетную область (так как оно не может содержать источник).

Пусть $\mathscr{M}$ — группа движений евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. По определению перемещение твердого тела за время t реализуется преобразованием $\mathrm{T}(t) \in \mathscr{M}$:

$$x(a,t) = \mathrm{U}(t)a + r(t), \quad \mathrm{U}(t) \in \mathrm{SO}(3), \quad r(t) \in \mathbb{R}^3. \tag{1.3}$$

Ко времени t твердое тело занимает область $D_b(t) = \mathrm{T}(t)D_0$, а жидкость — внешнюю область $D_f(t) = \mathbb{R}^3 \setminus D_b(t)$. Ввиду (1.2) геометрический центр области $D_b(t)$ находится в точке $r(t)$.

Определение 1.1. Преобразование $\mathrm{Q} \in \mathscr{M}$ *допустимо*, если замыкание области $\mathrm{Q}(D_0)$ не содержит нуля.

Например, сдвиг $a \mapsto a+b$ заведомо допустим, если $|b| > \operatorname{diam}(D_0)$. Подмногообразие допустимых преобразований в $\mathscr{M}$ обозначим через $\mathscr{M}_{\mathrm{adm}}$. Движениям тела соответствуют гладкие пути $t \mapsto \mathrm{T}(t)$ на $\mathscr{M}_{\mathrm{adm}}$.

В соответствии с (1.3) при каждом t скорости частиц тела определяют поле

$$(\mathbf{v}_b(t))(x) = \mathbf{v}_b(x,t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) + \mathbf{u}, \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\mathbf{u}(t) = \dot{r}$ — угловая и трансляционная скорости. Кинетическая энергия тела как квадратичная форма относительно $\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}$ и стандартная (биинвариантная на $\mathscr{M}$) риманова метрика определяют при каждом $\mathrm{T} = \mathrm{T}(t)$ оператор инерции $\mathscr{J}_b = \mathscr{J}_b(\mathrm{T}) : (\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \mapsto \mu(\mathbf{P}_b, \mathbf{M}_b)$, где $\mathbf{P}_b$ — импульс, а $\mathbf{M}_b$ — угловой момент тела, так что

$$2\mathrm{K}_b = \mu \int\limits_{D_b(t)} \mathbf{v}_b^2(x,t)\bar{\rho}(x,t)\,dx = \mu(\boldsymbol{\omega}\mathbf{M}_b + \mathbf{u}\mathbf{P}_b), \tag{1.5}$$

где μ — параметр (1.1), $\bar{\rho}(x,t) = \varrho_0(\mathrm{T}^{-1}(t)x)$ и $\bar{\rho}_0$ — нормированная плотность распределения масс в отсчетной области D_0. Заметим, что момент $\mathbf{M}_b$ отнесен к геометрическому центру тела.

Рассмотрим задачу Неймана во внешней области $D_1 = \mathbb{R}^3 \setminus D_0$ и ее функцию Грина $G_0 = G_0(x,y)$. По определению

$$\Delta_x G_0(x,y) = \delta(x-y) \text{ в } D_1, \quad (d/dn(x))G_0(x,y) = 0 \text{ на } S_0,$$
$$\lim_{|x|\to\infty} G_0(x,y) = 0, \quad y \in D_1.$$

Соответственно $G(x,y|\mathrm{T}) = G_0(\mathrm{T}^{-1}x, \mathrm{T}^{-1}y)$ — функция Грина жидкой области $D_f(t)$.

Уравнения движения тела в потоке безвихревой жидкости известны (см., например, [19]). Запишем их в безразмерном виде с использованием указанного выше масштабирования. Имеем

$$\mu\dot{\mathbf{P}}_b = \rho \int\limits_{S(t)} \big(\varphi_t + \mathbf{v}_f^2/2\big)\mathbf{n}\,dS_x, \quad S(t) = \partial D_b(t) = \mathrm{T}(t)S_0, \tag{1.6}$$

$$\mu(\mathbf{M}_b + \mathbf{r} \times \mathbf{P}_b)^{\boldsymbol{\cdot}} = \rho \int\limits_{S(t)} \big(\varphi_t + \mathbf{v}_f^2/2\big)(\mathbf{x} \times \mathbf{n})\,dS_x, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{v}_f = \nabla\varphi, \quad \varphi(x,t) = \rho^{-1}q(t)G(x,0|\mathrm{T}(t)) + \Phi(x|\mathrm{T}(t), \mathbf{v}_b(t)), \tag{1.8}$$

$$\Phi(x|\mathrm{T}(t), \mathbf{v}_b(t)) = \int\limits_{S(t)} G(x,y|\mathrm{T}(t))\mathbf{v}_b(y,t) \cdot \mathbf{n}\,dS, \tag{1.9}$$

где $S(t)$ — поверхность тела, $\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали на $S(t)$, направленный от тела к жидкости, $\mathbf{v}_f$ — скорость жидкости, причем $(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_b)\cdot\mathbf{n} = 0$ на $S(t)$, φ — потенциал течения, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор геометрического центра тела,

$\mathbf{x}$ — радиус-вектор точки $x \in S(t)$ и q — интенсивность источника. Заметим, что функция $p = -\rho\big(\varphi_t + \mathbf{v}_f^2/2\big)$ может быть отождествлена с давлением жидкости (в силу уравнения Лагранжа — Коши).

Положив $q \equiv 0$ в (1.8), приходим к системе, которая, как известно, подчиняется принципу наименьшего действия на $\mathscr{M}$. Соответствующий лагранжиан — полная кинетическая энергия $\mathrm{K} = \mathrm{K}_b + \mathrm{K}_f$, где K_f — кинетическая энергия жидкости,

$$2\mathrm{K}_f = -\rho \int\limits_{S(t)} \Phi(x|\mathrm{T}(t), \mathbf{v}_b(t))(\mathbf{v}_b(t))(x) \cdot \mathbf{n}\, dS = \rho(\mathbf{u}\mathbf{P}_f + \boldsymbol{\omega}\mathbf{M}_f) \tag{1.10}$$

(при $q = 0$ потенциал течения совпадает с $\Phi(x|\mathrm{T}, \mathbf{v}_b)$). Соответственно K_f порождает оператор $\mathscr{J}_f(\mathrm{T}) : (\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \mapsto \rho(\mathbf{P}_f, \mathbf{M}_f)$. Векторы $(\mathbf{P}_f, \mathbf{M}_f)$ известны как присоединенные импульс и угловой момент.

Если $q \neq 0$, то кинетическая энергия жидкости не определена из-за источника, однако функционал (1.10) определен и может рассматриваться как «присоединенная» кинетическая энергия.

2. Принцип наименьшего действия

Распространим принцип наименьшего действия на случай $q \not\equiv 0$. Пусть g — «отраженная» часть функции Грина G, так что

$$g(x, y|\mathrm{T}) = G(x, y|\mathrm{T}) + (4\pi|x - y|)^{-1}. \tag{2.1}$$

На $\mathscr{M}_{\mathrm{adm}}$ определим лагранжиан $\mathscr{L} = \mathrm{K} + q\Lambda - q^2\Pi$, полагая

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_b + \mathrm{K}_f, \quad \Lambda(\mathrm{T}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = -\Phi(0|\mathrm{T}, \mathbf{v}_b), \quad \Pi(\mathrm{T}) = g(0, 0|\mathrm{T})/(2\rho). \tag{2.2}$$

Здесь функционалы K_b и K_f — собственная (1.5) и присоединенная (1.10) кинетические энергии тела, функционал Π не зависит от скорости тела и рассматривается как потенциальная энергия; функционал $\Lambda = \Lambda(\mathrm{T}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ линеен по скорости тела и представляет 1-форму на $\mathscr{M}_{\mathrm{adm}}$. Эта 1-форма индуцирует векторное поле

$$\mathrm{T} \mapsto (\mathbf{P}_s(\mathrm{T}), \mathbf{M}_s(\mathrm{T})) : \Lambda(\mathrm{T}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_s + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_s. \tag{2.3}$$

Векторы $\mathbf{P}_s$ и $\mathbf{M}_s$ естественно трактовать как импульс и соответственно момент, сообщаемые системе источником.

Предложение 2.1. *Группа вращений* $\mathrm{SO}(3)$ *действует на* $\mathscr{M}_{\mathrm{adm}}$ *левыми сдвигами* $\mathrm{Q} \mapsto \mathrm{VQ}$, $\mathrm{Q} \in \mathscr{M}_{\mathrm{adm}}$, $\mathrm{V} \in \mathrm{SO}(3)$. *Динамическая система* $(\mathscr{L}, \mathscr{M}_{\mathrm{adm}})$ *инвариантна относительно левого действия* $\mathrm{SO}(3)$ *на* $\mathscr{M}_{\mathrm{adm}}$, *так что*

$$\mathscr{L}(\mathrm{VU}, \mathrm{V}r, \mathrm{V}\boldsymbol{\omega}, \mathrm{V}\mathbf{u}, t) = \mathscr{L}(\mathrm{U}, r, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, t)$$

для любого $\mathrm{V} \in \mathrm{SO}(3)$.

Доказательство. Заметим, что $g(x, y|\mathrm{T}) = g_0(\mathrm{T}^{-1}x, \mathrm{T}^{-1}y)$, где g_0 — отраженная часть «отсчетной» функции Грина G_0. Отсюда и из определения Π (см. (2.2)) следует, что

$$\Pi(\mathrm{T}) = \Pi_0(r_0) = g_0(r_0, r_0)/(2\rho), \quad r_0 = \mathrm{T}^{-1}0 = -\mathrm{U}^{-1}r. \tag{2.4}$$

Исходя из определения Λ и рассуждая аналогично, найдем

$$\Lambda = \Lambda_0(r_0, \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{u}_0) = -\int\limits_{S_0} G_0(r_0, a)(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{a} + \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{n}_0\, dS_a, \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \mathrm{U}^{-1}(t)\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{u}_0 = \mathrm{U}^{-1}(t)\mathbf{u}. \tag{2.6}$$

Здесь $\mathbf{n}_0$ — орт внешней нормали к S_0. Таким образом, Π и Λ инвариантны, поскольку r_0, $\boldsymbol{\omega}_0$ и $\mathbf{u}_0$ сохраняются при левом действии SO(3). Доказательство инвариантности кинетической энергии К опустим. $\square$

Применим принцип наименьшего действия:

$$\delta\mathscr{A} = 0, \quad \mathscr{A} = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\, dt.$$

Положим сначала $\delta\mathrm{U} = 0$ и $\delta\boldsymbol{\omega} = 0$. Рассмотрение таких вариаций приводит к уравнению импульса

$$(\mu\mathbf{P}_b + \rho\mathbf{P}_f + q(t)\mathbf{P}_s)^{\boldsymbol{\cdot}} = \nabla_r(q\Lambda - q^2\Pi), \quad \nabla_r = -\mathrm{U}(t)\nabla_{r_0}. \tag{2.7}$$

При его выводе полезно принять во внимание равенства (2.4)–(2.6). Уравнение момента представляет собой закон сохранения, вытекающий из вращательной симметрии в силу теоремы Эмми Нётер:

$$(\mu\mathbf{M}_b + \rho\mathbf{M}_f + q(t)\mathbf{M}_s + \mathbf{r}\times(\mu\mathbf{P}_b + \rho\mathbf{P}_f + q(t)\mathbf{P}_s))^{\boldsymbol{\cdot}} = 0, \tag{2.8}$$

Предложение 2.2. *Уравнения* (2.7), (2.8) *эквивалентны* (1.6), (1.7).

Доказательство. На основании определений (1.10), (2.1)–(2.3) перепишем уравнения (2.7), (2.8) в виде

$$\mu\dot{\mathbf{P}}_b - \rho\frac{d}{dt}\int\limits_{S(t)} \varphi\mathbf{n}\, dS = q\nabla_x|_{x=0}(\Phi(x|\mathrm{T},\mathbf{v}_b) + qg(x,0|\mathrm{T})/\rho), \tag{2.9}$$

$$\mu(\mathbf{M}_b + \mathbf{r}\times\mathbf{P}_b)^{\boldsymbol{\cdot}} = \rho\frac{d}{dt}\int\limits_{S(t)} \varphi(\mathbf{x}\times\mathbf{n})\, dS, \tag{2.10}$$

где φ — полный потенциал течения, введенный в (1.8). Выведем уравнение (1.6) из (2.9). Для этого слегка модифицируем хорошо известные рассуждения, относящиеся к жидкости без источника (см., например, [19]). Зафиксируем t и неподвижную область Γ такую, что $D_b(t) \subset \Gamma$, $0 \notin \Gamma$, и подсчитаем баланс импульса жидкости в Γ двумя способами. Первый способ: продифференцируем импульс с использованием уравнения Эйлера движения жидкости и затем преобразуем найденную производную в поверхностный интеграл; второй способ: выразим импульс поверхностным интегралом, который затем продифференцируем с использованием интеграла Лагранжа — Коши. Сравнение результатов дает

$$-\rho\frac{d}{dt}\int\limits_{S(t)} \varphi\mathbf{n}\, dS - \int\limits_{S(t)} p\mathbf{n}\, dS = \int\limits_{\partial\Gamma} \rho\left(\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}\mathbf{n}' - \frac{d\varphi}{dn'}\nabla\varphi\right) dS, \tag{2.11}$$

где $p = -\rho(\varphi_t + (\nabla\varphi)^2/2)$ — давление. Положим $\Gamma = \{\varepsilon \le |x| \le 1/\varepsilon\}$ и перейдем к пределу в (2.11) при $\varepsilon \to +0$. В пределе левая часть в (2.11) совпадет с правой частью в (2.9), что влечет (1.6). Вывод (1.7) из (2.10) не требует новых идей. $\square$

Если некоторый лагранжиан содержит линейный по скорости член L (возможно, зависящий от t), то в соответствующих уравнениях движения возникает, вообще говоря, гироскопическая сила; в локальных координатах ξ_i ее компоненты имеют вид $(L_{j\xi_i} - L_{i\xi_j})\dot{\xi}_j$, поэтому она всюду ортогональна скорости системы, как, например, сила Лоренца. Исключительный случай представляется, если 1-форма L точна (при каждом фиксированном t), так что $L = d\Psi$. Тогда $L = -\Psi_t +$ полная производная, и вклад линейного члена в уравнения движения сводится к потенциальной силе с потенциалом Ψ_t. Оказывается, 1-форма $\Lambda = -\Phi|_{x=0}$ точна тогда и только тогда, когда отсчетная область D_0 является шаром. Доказательство этого утверждения будет опубликовано отдельно.

3. Однородный шар

Исследования этого случая восходят к Хиксу [2, 3], вычислившему силу взаимодействия пары шаров. Много позже О. М. Лаврентьева [7] детально изучила чисто трансляционные движения шара в поле пульсирующего источника. Мы рассмотрим более общие движения.

В случае однородного шара μ равно отношению плотности шара к плотности жидкости и $\rho = 3/(4\pi)$, при этом $D_0 = \{|a| < 1\}$, $D_b(t) = \{x : |x - r(t)| = 1\}$, где $R(t) = |r(t)| > 1$ (это ограничение выражает допустимость перемещения).

Система обладает дополнительной инвариантностью относительно правого действия SO(3), при котором $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{TV}$, $\mathrm{T} \in \mathscr{M}_{\mathrm{adm}}$, $\mathrm{V} \in \mathrm{SO}(3)$. В силу этой симметрии возникает полная аналогия между движением шара и материальной частицы в поле центральной силы. Именно, сохраняется момент $\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{u} \equiv \mathrm{const}$, и орбиты общего положения содержатся в плоскости, ортогональной $\mathbf{m}$; если $\mathbf{m} = 0$, то движение происходит вдоль инвариантного луча, так что $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(0) = 0$. Приведенный лагранжиан записывается в виде (подробности см. в разд. 7)

$$2\mathscr{R} = \mu_1 \dot{R}^2 - (\mu_2 + (q - \bar{q})\dot{R})/R^2 + (q^2/3)(\ln(1 - R^{-2}) + (R^2 - 1)^{-1}), \qquad (3.1)$$

где $R = |r| > 1$, $\mu_1 = \mu + 1/2$, $\mu_2 = \mu_1 \mathbf{m}^2$, $\bar{q}$ — произвольная постоянная, которая будет определена позже. Этот произвол возникает потому, что $\dot{R}/R^2$ — полная производная.

Пусть q в (3.1) периодична по $\tau = \omega t$ с периодом 2π. Обозначим угловыми скобками усреднение: $\langle f\rangle(\cdot) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\cdot, \tau)\, d\tau$. Положим $\bar{q} = \langle q\rangle$. Рассмотрим асимптотику (формальную)

$$R = \overline{R}(t) + \omega^{-1}\widetilde{R}(t, \tau) + O(\omega^{-2}), \quad \omega \to \infty, \qquad (3.2)$$

где функция $\widetilde{R}$ 2π-периодическая по τ, причем $\langle \widetilde{R}\rangle = 0$. Таким образом, движение системы рассматривается как суперпозиция медленного дрейфа и быстрых осцилляций малой амплитуды с нулевым средним. Найдем лагранжиан $\overline{\mathscr{R}}$, описывающий медленный дрейф (т. е. эволюцию $\overline{R}$). Общее выражение такого лагранжиана в общем случае системы с вибрирующими силами и связями получено в [18]. В нашем случае

$$2\overline{\mathscr{R}} = \langle \mathscr{R}(\overline{R}, \dot{\overline{R}}, \tau)\rangle - \langle \tilde{q}^2\rangle/(8\mu_1 \overline{R}^4), \quad \tilde{q} = q - \langle q\rangle. \qquad (3.3)$$

Заметим, что усреднение заведомо уничтожает линейный по скорости член, входящий в $\mathscr{R}$. Слагаемое $\langle \tilde{q}^2\rangle/(8\mu_1 \overline{R}^4)$ представляет виброгенную потенциальную энергию.

Поясним вывод (3.3). Нам потребуется следующее

Определение 3.1. Лагранжианы $L_i = L_i(R, \dot{R}, t, \tau, \omega)$, где $i = 1, 2$ и $\tau = \omega t$, *асимптотически эквивалентны при* $\omega \to \infty$, если найдется лагранжиан L, эквивалентный L_2 и такой, что

$$\int_{t_1}^{t_2} (L_1(R, \dot{R}, t, \tau, \omega) - L(R, \dot{R}, t, \tau, \omega))\, dt = O(\omega^{-1}), \quad \omega \to \infty,$$

для любого пути, допускающего параметризацию вида (3.2).

Следуя [18], применим принцип наименьшего действия для быстрых и медленных движений в отдельности, выбирая при этом «наилучшего представителя» в классе асимптотической эквивалентности исходного лагранжиана. Поскольку быстрые движения предполагаются периодическими, рассматриваем действие за период: $\mathscr{A}_{fst} = \langle \mathscr{L}_{fst} \rangle$. Определяя $\mathscr{L}_{fst}$, во всяком случае пренебрегаем вкладом быстрых координат $\widetilde{R}$, считаем постоянными медленные координаты и скорости и отбрасываем члены с нулевым средним. Теперь все быстрые координаты циклические, а потому импульс быстрых движений сохраняется, что приводит к явному выражению быстрой скорости через медленные координаты и быстрое время. В нашем случае $2\mathscr{L}_{fst} = \mu_1 \widetilde{R}_\tau^2 - \tilde{q}\widetilde{R}_\tau / \overline{R}^2$, отсюда $(\mu_1 \widetilde{R}_\tau - \tilde{q}/(2\overline{R}^2))_\tau = 0$ и $\widetilde{R}_\tau = \tilde{q}/(2\mu_1 \overline{R}^2)$. Обратимся к медленным движениям. Здесь стоит отметить, что прибавление к лагранжиану членов с нулевым средним не выводит из класса асимптотической эквивалентности. Имея это в виду, определим медленный лагранжиан как $\mathscr{L}_{slw} = \langle \mathscr{R}(\overline{R}, \dot{\overline{R}} + \widetilde{R}_\tau, \tau) \rangle$, где быстрые скорости выражены через медленные координаты и τ. Отсюда, вычислив среднее, выводим (3.3).

Рассмотрим динамику медленной системы (3.3). Введем параметры

$$\bar{m}^2 = (3\mu_2)/\langle q^2 \rangle, \quad b^2 = 3\sigma^2/(2\mu_1), \quad \sigma^2 = \langle \tilde{q}^2 \rangle / \langle q^2 \rangle, \tag{3.4}$$

где $\tilde{q} = q - \langle q \rangle$. Заметим, что $0 < \sigma < 1$ и $0 < b^2 < 3$. Определим эффективную потенциальную энергию $\mathscr{U}(\overline{R}) = \mu_1 \dot{\overline{R}}^2/2 - \overline{\mathscr{R}}$, $\overline{R} > 1$. Ее критические точки суть радиусы $\overline{R} = R_c$ орбит стационарных вращений («частицы» вокруг «центра силы», т. е. шара вокруг источника). В исключительном случае $\mu_2 = 0$ (т. е. при $\mathbf{m} = 0$) эти орбиты вырождаются в континуальные семейства равновесий.

Если $\mu_2 = 0$ и при этом $b^2 \le 1$, то $\mathscr{U}$ монотонна при $\overline{R} > 1$ и система не имеет равновесий. В противном случае существует ровно одна критическая точка $R_c(\bar{m}, b) > 1$ и в ней $\mathscr{U}$ достигает максимума. Если при этом $\mu_2 = 0$ и $b > 1$, то «частица» (центр шара) движется по инвариантному лучу, причем на каждом таком луче имеется ровно одно равновесие $\overline{R} = R_c$. Оно неустойчиво. Если $\mu_2 \ne 0$, то в каждой инвариантной плоскости (ортогональной к угловому моменту $\mathbf{m}$) содержится ровно одна замкнутая орбита — окружность радиуса R_c, и она также неустойчива.

Пусть $E = \overline{\mathscr{R}} + 2\mathscr{U}$ — полная энергия приведенной системы и $\mathscr{U}_{\max} = \mathscr{U}(\overline{R}_c)$. Если $\mathscr{U}$ монотонна, то полагаем $\overline{R}_c = \infty$ и $\mathscr{U}_{\max} = 0$. Относительно движений при $E \ne \mathscr{U}_{\max}$ верно одно из двух: или шар уходит на бесконечность («всплывает»), так что $\overline{R} \to \infty$ при $t \to \infty$, или сталкивается с источником за конечное время («тонет»), так что $R \to 1 + 0$ при $t \to t_c < \infty$. Пусть $E - \mathscr{U}_{\max} > 0$. Если при этом $\dot{\overline{R}}(0) < 0$, то шар тонет, иначе — всплывает. Пусть $E - \mathscr{U}_{\max} < 0$. В таком случае шар тонет при $\overline{R}(0) = R_0 < R_c$ и всплывает при $R_0 > R_c$.

Заметим, что вращение центра шара вокруг источника способствует его всплытию. В самом деле, при любом b функция $R_c(\bar m, b)$ монотонно убывает по $\bar m \in (0, \infty)$, причем $R_c \to 1$, когда $\bar m \to \infty$. Если $b \leq 1$, то $R_c \to \infty$ при $\bar m \to 0$, иначе предел конечен, и можно положить $R_c(0, b) = (1 - 1/b)^{-1/2}$. Таким образом, $R_c(0, b) = \max\limits_{\bar m \geq 0} R_c(\bar m, b)$ — критическое расстояние всплытия шара при нулевой начальной скорости его центра. Кстати, неравенство $b > 1$ предполагает, что $k > 1/3$ и $\rho < 1$, и потому шар может всплыть при нулевой начальной скорости лишь в том случае, если он легче жидкости и средняя интенсивность источника относительно невелика (что совпадает с выводами в [7]). Когда средняя интенсивность источника и собственная масса шара равны нулю (т. е. $b^2 = 3$), $R_c(0, b)$ достигает наименьшего значения, так что всплытие шара с расстояния, меньшего $R_c(0, \sqrt{3}) \approx 1.5389$, без начальной скорости невозможно.

4. Тело произвольной формы

Рассмотрим лагранжиан $\mathscr{L} = \mathrm{K} + q\Lambda - q^2\Pi$, где K, Λ и Π определены в (2.2). Предположим, что $q = q(\tau)$ 2π-периодична по быстрому времени $\tau = \omega t$. Рассмотрим предел $\omega \to \infty$. Введем малый параметр $\varepsilon = \omega^{-1} \to 0$. Предположим, что движение системы представимо в виде суперпозиции быстрых колебаний малой амплитуды на фоне медленного дрейфа, так что $\mathrm{T}(t, \varepsilon) = \widetilde{\mathrm{T}}(t, \tau, \varepsilon)\overline{\mathrm{T}}(t)$, причем семейство $\widetilde{\mathrm{T}}(t, \tau, \varepsilon)$ 2π-периодично по τ и $\widetilde{\mathrm{T}}(\cdot, \varepsilon) \to \mathrm{id}$ при $\varepsilon \to +0$. Предположим еще, что для любой точки a имеет место асимптотика

$$\mathrm{T}(t, \tau, \varepsilon)a = \bar x(a, t) + \varepsilon \tilde x(a, t, \tau) + O(\varepsilon^2), \ \varepsilon \to 0, \quad \langle \tilde x(a, t, \tau)\rangle \equiv 0, \tag{4.1}$$

где $\bar x(a, t) = \overline{\mathrm{T}}(t)(a)$. Пусть $\overline{\mathrm{T}}(t)a = \overline{\mathrm{U}}(t)a + \bar r(t)$. Найдутся $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t, \tau)$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t, \tau)$, такие, что

$$\tilde{\mathbf{x}}(a, t, \tau) = \boldsymbol{\xi}(t, \tau) \times (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{r}}) + \mathbf{b}, \quad \langle \boldsymbol{\xi}\rangle = \langle \mathbf{b}\rangle \equiv 0. \tag{4.2}$$

Обозначим через $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ и $\bar{\mathbf{u}}$ угловую и трансляционную скорости медленного движения $\overline{\mathrm{T}}$. В силу (4.2) угловая и трансляционная скорости полного движения T допускают представление

$$\boldsymbol{\omega} = \bar{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\xi}_\tau + O(\varepsilon), \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{b}_\tau + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.3}$$

Далее следуем схеме, намеченной в случае шара. Уравнения быстрых движений записываются в виде

$$((\mathbf{M}_b + \mathbf{M}_f)(\overline{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_\tau, \mathbf{b}_\tau) + \tilde q \mathbf{M}_s(\overline{\mathrm{T}}))_\tau = 0, \tag{4.4}$$

$$((\mathbf{P}_b + \mathbf{P}_f)(\overline{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_\tau, \mathbf{b}_\tau) + \tilde q \mathbf{P}_s(\overline{\mathrm{T}}))_\tau = 0, \quad \tilde q(\tau) = q(\tau) - \langle q\rangle, \tag{4.5}$$

где поле $\mathrm{T} \mapsto (\mathbf{P}_s(\mathrm{T}), \mathbf{M}_s(\mathrm{T}))$ ассоциировано с 1-формой Λ. Отсюда находим $\boldsymbol{\xi}_\tau = \tilde q \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{P}_s(\overline{\mathrm{T}}), \mathbf{M}_s(\overline{\mathrm{T}}))$, $\mathbf{b}_\tau = \tilde q \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{P}_s(\overline{\mathrm{T}}), \mathbf{M}_s(\overline{\mathrm{T}}))$ и затем полагаем $\mathscr{L}_{slw} = \langle \mathscr{L}(\overline{\mathrm{T}}, \bar{\boldsymbol{\omega}}, \bar{\mathbf{u}}, \tau)\rangle - \langle \tilde q^2\rangle \Pi_v(\overline{\mathrm{T}})$, где $\Pi_v = \mathrm{K}(\overline{\mathrm{T}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{u}})$ — виброгенная потенциальная энергия (удельная).

Пусть $\mathscr{J} = \mathscr{J}(\mathrm{T})$ — оператор инерции, ассоциированный с кинетической энергией $\mathrm{K} = \mathrm{K}_b + \mathrm{K}_f$. Ввиду ее вращательной инвариантности оператор $\mathscr{J}(\mathrm{T})$ ортогонально эквивалентен постоянному оператору $\mathscr{J}_0$, определяемому лишь отсчетной областью. Обозначим через $2\mathrm{K}^0_{-1}$ и $2\mathrm{K}_{-1}$ квадратичные формы, ассоциированные с $\mathscr{J}_0^{-1}$ и $\mathscr{J}^{-1}$. В силу (4.4), (4.5)

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) = -\mathscr{J}^{-1}(\overline{\mathrm{T}})(\mathbf{P}_s(\overline{\mathrm{T}}), \mathbf{M}_s(\overline{\mathrm{T}})),$$

$$\Pi_v(\overline{\mathrm{T}}) = \mathrm{K}_{-1}(\overline{\mathrm{T}}, \mathbf{M}_s(\overline{\mathrm{T}}), \mathbf{P}_s(\overline{\mathrm{T}})) = \mathrm{K}^0_{-1}(\overline{\mathrm{U}}^*\mathbf{P}_s(\overline{\mathrm{T}}), \overline{\mathrm{U}}^*\mathbf{M}_s(\overline{\mathrm{T}})),$$

где $\overline{\mathrm{T}}a = \overline{\mathrm{U}}a + \bar{r}$. Отсюда с учетом (2.5) вытекает инвариантное выражение виброгенной потенциальной энергии:

$$\Pi_v(\overline{\mathrm{T}}) = \Pi^0_v(\bar{r}_0) = \mathrm{K}^0_{-1}\big(\mathbf{M}^0_s(\bar{r}_0), \mathbf{P}^0_s(\bar{r}_0)\big), \quad \bar{r}_0 = \overline{\mathrm{T}}^{-1}0, \tag{4.6}$$

$$\mathbf{P}^0_s(z) = \int\limits_{S_0} G_0(z,a)\mathbf{n}_0\, dS_a, \quad \mathbf{M}^0_s(z) = \int\limits_{S_0} G_0(z,a)(\mathbf{a}\times\mathbf{n}_0)\, dS_a. \tag{4.7}$$

Окончательная форма лагранжиана медленных движений такова:

$$\mathscr{L}_{slw} = \mathrm{K}(\overline{\mathrm{T}}, \bar{\boldsymbol{\omega}}, \bar{\mathbf{u}}) + \langle q\rangle \Lambda(\overline{\mathrm{T}}, \bar{\boldsymbol{\omega}}, \bar{\mathbf{u}}) - \overline{\Pi}(\overline{\mathrm{T}}), \tag{4.8}$$

$$\overline{\Pi}(\overline{\mathrm{T}}) = \langle q^2\rangle \Pi_0(\bar{r}_0) + \langle \tilde{q}^2\rangle \Pi^0_v(\bar{r}_0), \quad \bar{r}_0 = \overline{\mathrm{T}}^{-1}0, \tag{4.9}$$

здесь Π^0_v имеет вид (4.6) и Π_0 определена в (2.4). Отсюда следует

Предложение 4.1. *Медленная система* $(\mathscr{L}_{slw}, \mathscr{M}_{\mathrm{adm}})$ *наследует инвариантность исходной относительно левого действия* $\mathrm{SO}(3)$ *на* $\mathscr{M}_{\mathrm{adm}}$.

5. Равновесия центрально-симметричных тел

Напомним, что отсчетная область $D_0 \subset \mathbb{R}^3$ расположена так, что ее геометрический центр совпадает с нулем. Предположим, что тело и распределение масс в нем центрально-симметричны, так что $-x \in D_0$ вместе с любым $x \in D_0$, и $\rho_0(x) = \rho_0(-x)$, где ρ_0 — плотность тела. В таком случае центр масс совпадает с геометрическим центром и оператор инерции $\mathscr{J}_0$ представим в блочно-диагональном виде:

$$\mathscr{J}_0 : (\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{u}_0) \mapsto (\mathrm{J}_{\omega\omega}\boldsymbol{\omega}_0, \mathrm{J}_{uu}\mathbf{u}_0),$$

где, в частности, $\mathrm{J}_{uu} = \mu\mathbf{1} + \rho \mathrm{J}_{fuu}$, μ и ρ — параметры (1.1). Напомним, что $\rho^{-1} = \operatorname{vol} D_0$, где $\operatorname{vol} D_0$ — объем (безразмерный) области D_0.

Собственные числа λ_1, λ_2, λ_3 матрицы $\rho\mathrm{J}_{fuu}$ — безразмерные присоединенные массы тела. Введем

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)/3 = \rho \operatorname{tr} \mathrm{J}_{fuu}/3, \quad \lambda_* = \max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \tag{5.1}$$

Теорема 5.1. *Пусть тело центрально-симметрично (вместе с распределением масс в нем). Предположим, что*

$$\sigma^2(1+\bar{\lambda}) > \mu + \lambda_*, \tag{5.2}$$

где $\sigma^2 = \langle \tilde{q}^2\rangle / \langle q^2\rangle$. *Тогда медленная система* $(\mathscr{L}_{slw}, \mathscr{M}_{\mathrm{adm}})$ *допускает равновесие, и оно максимизирует потенциальную энергию* $\overline{\Pi}$.

Замечание. В случае однородного шара $\lambda_* = \bar{\lambda} = 1/2$ и условие (5.2) примет вид $3\sigma^2 > 2\mu + 1$, что эквивалентно $b^2 > 1$, а это условие необходимо и достаточно для всплытия шара с нулевой начальной скоростью (см. разд. 3). Если $b^2 \le 1$, то потенциальная энергия медленной системы (но не приведенная потенциальная энергия $\mathscr{U}$) всюду отрицательна, не имеет критических точек и обращается в нуль на бесконечности. При таких условиях равновесие шара невозможно. В этом смысле условия теоремы 5.1 точны.

Доказательство теоремы 5.1. Начнем с оценки удельной потенциальной энергии на единицу интенсивности источника. Это функция $\Pi_0(r_0)$, определенная в (2.4).

Лемма 5.1. *Имеет место равенство*

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1}\Pi_0(R\eta)\,dS_\eta=-\frac{1}{2}\frac{(1+\bar{\lambda})}{(4\pi\rho R^2)^2}+O\left(\frac{1}{R^5}\right),\quad R\to\infty. \tag{5.3}$$

Замечание. Как видно из (5.3), потенциальная энергия источника $\langle q^2\rangle\Pi_0(r_0)$ в среднем отрицательна на бесконечности. При этом виброгенная потенциальная энергия по определению положительна всюду.

Доказательство. Пусть $D_1=\mathbb{R}\setminus D_0$. По определению

$$2\rho\Pi_0(z)=g_0(z,z),\quad \Delta_x g_0(x,y)=0,\quad x,y\in D_1,$$

$$\mathbf{n}_0\cdot\nabla_x(g_0(x,y)-(4\pi|x-y|)^{-1})|_{S_0}=0,\quad y\in D_1,$$

где $S_0=\partial D_0$. Из теории потенциала известно, что

$$g_0(x,y)=\int\limits_{S_0}\frac{\sigma(z,y)\,dS_z}{|x-z|},$$

где плотность σ — решение уравнения

$$\sigma(z,y)=\int\limits_{S_0}K(z,\zeta)\sigma(\zeta,y)\,dS_\zeta-\frac{1}{4\pi}K(z,y), \tag{5.4}$$

$$2\pi K(z,\zeta)=\mathbf{n}_0\cdot\nabla_z|\zeta-z|^{-1}.$$

Заметим, что при любом $y\in D_1$ среднее ядра $K(z,y)$ по $z\in S_0$ равно нулю. Отсюда, проинтегрировав (5.4) по S_0, найдем, что среднее σ также равно нулю на S_0. Следовательно,

$$g_0(R\eta,y)=\frac{1}{R^2}\int\limits_{S_0}\sigma(z,y)\mathbf{z}\boldsymbol{\eta}\,dS_z+O(1/R^3),\quad R\to\infty,\ z\in S. \tag{5.5}$$

Пусть $y=R\eta$, тогда

$$K(z,R\eta)=\frac{1}{2\pi}\frac{\boldsymbol{\eta}\mathbf{n}_0(z)}{R^2}+O(1/R^3),\quad R\to\infty,\ z\in S,$$

Подстановка этого выражения в (5.4) дает

$$\sigma(z,R\eta)=\frac{\boldsymbol{\eta}\mathbf{s}(z)}{R^2}+O(1/R^3),\quad R\to\infty,$$

где векторная плотность $\mathbf{s}$ — решение уравнения

$$\mathbf{s}(z)=\int\limits_{S_0}K(z,\zeta)\mathbf{s}(\zeta)\,dS_\zeta-(8\pi)^{-2}\mathbf{n}_0(z),\quad z\in S. \tag{5.6}$$

С учетом равенств (5.5) и (5.6)

$$2\rho\Pi_0(R\eta)=\frac{1}{R^4}\int\limits_{S_0}(\boldsymbol{\eta}\mathbf{z})(\boldsymbol{\eta}\mathbf{s}(z))\,dS_z+O(1/R^5),\quad R\to\infty. \tag{5.7}$$

Отсюда

$$\frac{2\rho}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1}\Pi_0(R\eta)\,dS_\eta = \frac{1}{3R^4}\int\limits_{S_0}\mathbf{z}\mathbf{s}(z)\,dS_z + O(1/R^5), \quad R\to\infty.$$

Далее, в силу уравнения (5.6)

$$\int\limits_{S_0}\mathbf{z}\mathbf{s}(z)\,dS_z = \int\limits_{S_0}\int\limits_{S_0}K(z,\zeta)\mathbf{z}\mathbf{s}(\zeta)\,dS_\zeta dS_z - \frac{3\mathrm{vol}(D_0)}{8\pi^2}. \tag{5.8}$$

Займемся $\int K(z,\zeta)\mathbf{z}\,dS_z$. Зафиксируем $z_0\in D_0$. По формуле Грина

$$4\pi\mathbf{z}_0 = \int\limits_{S_0}\frac{\mathbf{n}_0(z)\,dS_z}{|z_0-z|} - \int\limits_{S_0}\left(\frac{d}{dn(z)}\frac{1}{|z_0-z|}\right)\mathbf{z}\,dS_z.$$

Устремив здесь $z_0\to\zeta\in S_0$, получим

$$\int\limits_{S_0}K(z,\zeta)\mathbf{z}\,dS_z = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_0}\frac{\mathbf{n}_0(z)\,dS_z}{|\zeta-z|} - \boldsymbol{\zeta}$$

(в силу стандартной теоремы о потенциале двойного слоя). Подстановка этого выражения в (5.8) приводит к равенству

$$\int\limits_{S_0}\mathbf{z}\mathbf{s}(z)\,dS_z = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\int\limits_{S_0}\frac{\mathbf{s}(\zeta)\mathbf{n}_0(z)}{|\zeta-z|}\,dS_\zeta dS_z - \frac{3\mathrm{vol}(D_0)}{16\pi^2}. \tag{5.9}$$

Из уравнения (5.6) и определения $\mathbf{P}_s^0$ (см. (4.7)) вытекает представление

$$\mathbf{P}_s^0(z) = 4\pi\int\limits_{S_0}\frac{\mathbf{s}(\zeta)\,dS_\zeta}{|\zeta-z|}. \tag{5.10}$$

Отсюда

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\int\limits_{S_0}\frac{\mathbf{s}(\zeta)\mathbf{n}_0(z)}{|\zeta-z|}\,dS_\zeta dS_z = -\frac{1}{(4\pi)^2}\int\limits_{D_1}\left(\nabla\mathbf{P}_s^0\right)^2 dz$$

(напомним: $\mathbf{n}_0$ направлен во внешнюю область D_1). Вместе с тем

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{J}_{fuu} = -\int\limits_{S_0}\int\limits_{S_0}\mathbf{n}_0(z)\mathbf{n}_0(\zeta)G_0(z,\zeta)\,dS_\zeta dS_z = \int\limits_{D_1}\left(\nabla\mathbf{P}_s^0\right)^2 dz,$$

следовательно,

$$\frac{2\rho}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1}\Pi_0(R\eta)\,d\eta = -\frac{1}{(4\pi R^2)^2}\left(\frac{\mathrm{tr}\,\mathrm{J}_{fuu}}{3} + \mathrm{vol}\,D_0\right) + O(1/R^5), \quad R\to\infty,$$

что эквивалентно (5.3) (так как $\rho^{-1} = \mathrm{vol}\,D_0$). $\square$

Лемма 5.2. *Имеет место неравенство*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R^4}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \left|\mathbf{P}_s^0\right|^2(R\eta)\, dS_\eta \geq \left(\frac{1+\bar\lambda}{4\pi\rho}\right)^2. \tag{5.11}$$

Доказательство. Представим $\mathbf{P}_s^0$ как потенциал простого слоя (5.10) с векторной плотностью $\mathbf{s}$, которая определяется уравнением (5.6). Из него, в частности, следует, что среднее $\mathbf{s}$ на S_0 равно нулю. Поэтому

$$\mathbf{P}_s^0(R\eta) = \frac{4\pi}{R^2}\mathrm{A}\boldsymbol{\eta} + O(R^{-3}),\ R\to\infty, \quad \mathrm{A} = \int\limits_{S_0} \mathbf{s}(z)\otimes\mathbf{z}\, dS_z.$$

Отсюда

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R^4}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \left|\mathbf{P}_s^0\right|^2(R\eta)\, dS_\eta = 4\pi \int\limits_{|\eta|=1} \boldsymbol{\eta}\cdot(\mathrm{A}^*\mathrm{A})\boldsymbol{\eta}\, dS_\eta$$
$$= (4\pi)^2\,\mathrm{tr}(\mathrm{A}^*\mathrm{A})/3 \geq (4\pi)^2(\mathrm{tr}\,\mathrm{A}/3)^2.$$

Вместе с тем в силу (5.7)

$$\frac{\mathrm{tr}\,\mathrm{A}}{3} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \boldsymbol{\eta}\mathrm{A}\boldsymbol{\eta}\, dS_\eta = 2\rho \lim_{R\to\infty} \frac{R^4}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \Pi_0(R\eta)\, dS_\eta.$$

Отсюда по лемме 5.1 $\mathrm{tr}\,\mathrm{A}/3 = -(1+\bar\lambda)/((4\pi)^2\rho)$, что влечет (5.11). $\square$

Введем функцию $\overline{\Pi}_0$, полагая $\overline{\Pi}_0(z) = \langle q^2\rangle\Pi_0(z) + \langle\tilde q^2\rangle\Pi_v^0(z)$, где Π_v^0 определена в (4.6). Согласно (4.9), полная потенциальная энергия $\overline{\Pi}(\overline{\mathrm{T}})$ медленной системы $(\mathscr{L}_{slw}, \mathscr{M}_{\mathrm{adm}})$ равна $\overline{\Pi}_0(\bar r_0)$ для всех $\overline{\mathrm{T}} : \bar r_0 = \overline{\mathrm{T}}^{-1}0$.

Лемма 5.3. *Справедливо неравенство*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R^4}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \overline{\Pi}_0(R\eta)\, dS_\eta \geq \frac{\langle q^2\rangle}{2}\frac{1}{(4\pi\rho)^2}(1+\bar\lambda)\left(\sigma^2\frac{1+\bar\lambda}{\mu+\lambda_*} - 1\right). \tag{5.12}$$

Доказательство. По определению

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R^4}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \overline{\Pi}_0(R\eta)\, dS_\eta = \lim_{R\to\infty} \frac{R^4}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \left(\langle q^2\rangle\Pi_0(R\eta) + \langle\tilde q^2\rangle\mathrm{K}_{-1}^0\big(\mathbf{M}_s^0, \mathbf{P}_s^0\big)\right) dS_\eta.$$

Здесь с учетом центральной симметрии тела

$$2\mathrm{K}_{-1}^0\big(\mathbf{M}_s^0, \mathbf{P}_s^0\big) \geq \big(\mathbf{P}_s^0\cdot\mathrm{J}_{uu}^{-1}\mathbf{P}_s^0\big) \geq (\mu+\lambda_*)^{-1}\left|\mathbf{P}_s^0\right|^2.$$

Воспользовавшись равенствами (5.3) и (5.11), получим (5.12). $\square$

Вектор $\mathbf{M}_s^0(z)$ — потенциал простого слоя, как и $\mathbf{P}_s^0$, и потому $\Pi_v^0(r_0)\to +0$, $r_0\to\infty$, и $\Pi_0(r_0)\to -0$, $\bar r_0\to\infty$, по лемме 5.1, так что $\overline{\Pi}_0(r_0)\to 0$ при $r_0\to\infty$. По лемме 5.3 $\overline{\Pi}_0(r_0)\to +0$ в условиях теоремы (5.1) по крайней мере вдоль большинства лучей, выходящих из начала координат. Следующая лемма показывает, что $\overline{\Pi}_0(r_0)\to -\infty$ при $\mathrm{dist}(r_0, D_0)\to +0$ (т. е. при сближении тела с источником).

Лемма 5.4. *Пусть* $x \in D_1$ *и* $\operatorname{dist}(x, D_0) = \varepsilon > 0$. *Найдутся* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(S) > 0$ *и константа* $C = C(S, \varepsilon_0) > 0$ *такие, что*

$$\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \; \Pi_0(x) = -(8\pi\varepsilon)^{-1} + R(x), \quad |R(x)| \leq -C \ln \varepsilon. \tag{5.13}$$

Доказательство см. в разд. 6.

Завершим доказательство теоремы 5.1. Пусть $S_\varepsilon = \{z : \operatorname{dist}(z, D_0) < \varepsilon\}$. Рассмотрим $\overline{\Pi}_0(z) = \langle q^2 \rangle \Pi_0(z) + \langle \tilde{q}^2 \rangle \Pi_v^0(z)$. Π_v^0 ограничена на S_ε. Отсюда и из леммы 5.4 следует, что $\overline{\Pi}_0$ отрицательна на S_ε для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, равна нулю на бесконечности и по лемме 5.4 принимает положительные значения при некоторых $z \notin S_\varepsilon$. Следовательно, $\overline{\Pi}_0$ достигает глобального максимума в некоторой точке $\bar{r}_c \in D_1 \setminus S_\varepsilon$, причем $\overline{\Pi}_0(\bar{r}_c) > 0$. Следовательно, полная потенциальная энергия $\overline{\Pi}(\overline{\mathrm{T}}) = \overline{\Pi}_0(\bar{r}_0)$, $\bar{r}_0 = \overline{\mathrm{T}}^{-1} 0$, достигает глобального максимума на целой орбите $E = \left\{\overline{\mathrm{T}}_c : \bar{r}_c = \overline{\mathrm{T}}_c^{-1} 0\right\}$, состоящей поэтому из равновесных конфигураций. $\square$

Из доказательства теоремы видно, что при условии (5.2) вибрации жидкости создают вокруг вибратора потенциальный барьер, на котором достигается максимум потенциальной энергии. Твердое тело, отделенное им от вибратора, отталкивается от него (всплывает).

6. Приложение 1. Оценка потенциальной энергии вблизи источника

Напомним, что D_1 — внешность заданной гладкой, ограниченной и односвязной области D_0 и $S_0 = \partial D_0$. Пусть $S_{\varepsilon_0} \subset D_1$ — приграничная полоска толщины ε_0, причем ε_0 столь мало, что для любой точки $y \in S_{\varepsilon_0}$ найдется ровно одна ближайшая к ней точка $x_0 \in S_0$. Тогда $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{n}_0(x_0)$, $\varepsilon = \operatorname{dist}(y, S_0)$. Рассмотрим отраженную точку $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{x}_0 - \varepsilon \mathbf{n}_0(x_0) \in D_0$. Определим функцию $f = f(x, y)$, $x \in S_0$, $y \in S_{\varepsilon_0}$, полагая

$$4\pi f(x, y) = \mathbf{n}_0(x) \cdot ((\mathbf{y} - \mathbf{x})|x - y|^{-3} + (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{x})|x - \bar{y}|^{-3}). \tag{6.1}$$

Пусть $y \in S_{\varepsilon_0}$. Представим g_0 в виде $g_0(x, y) = h(x, y) - (4\pi|x - \bar{y}|)^{-1}$. Тогда равенство (5.13) имеет место с $R(x) = h(x, x)$, причем

$$\Delta_x h(x, y) = 0, \quad x \in D_1, \; y \in S_{\varepsilon_0}, \tag{6.2}$$

$$dh(x, y)/dn_0(x)|_{S_0} = f(x, y), \quad h(x, y) \to 0, |x| \to \infty, \; y \in S_{\varepsilon_0}. \tag{6.3}$$

Займемся оценкой функции h. Для любого $x \in D_1$

$$h(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_0} h(z, y) \frac{\mathbf{n}_0(z)(\mathbf{x} - \mathbf{z})}{|x - z|^3} \, dS_z - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_0} f(z, y) \frac{dS_z}{|x - z|}$$

(это формула Грина, записанная для области D_1 с использованием нормали, направленной внутрь D_1). Пусть $x \to \xi \in S_0$. По теореме о потенциале двойного слоя

$$h(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_0} h(z, y) \frac{\mathbf{n}_0(z)(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{z})}{|\xi - z|^3} \, dS_z - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_0} f(z, y) \frac{dS_z}{|\xi - z|}. \tag{6.4}$$

Отсюда следует, что $h(\xi, y)$ — плотность потенциала двойного слоя на S_0, решающего внутреннюю задачу Дирихле с граничными значениями

$$I(\xi, y) = \int\limits_{S_0} f(z, y) \frac{dS_z}{|\xi - z|}, \quad \xi \in S_0. \tag{6.5}$$

Уравнение (6.4) неявно определяет ограниченный линейный оператор $I \mapsto h$ в пространстве $\mathrm{C}(S_0)$, так что

$$\max_{S_0} |h(\cdot, y)| \le c(S_0) \max_{S_0} |I(\cdot, y)|,$$

а потому

$$\max_{D_1} |h(\cdot, y)| \le \max_{S_0} |h(\cdot, y)| \le c(S_0) \max_{S_0} |I(\cdot, y)| \tag{6.6}$$

(слабая форма принципа максимума верна для внешних областей). Оценим интеграл (6.5). Положим

$$h = |z - y|^2, \quad \bar{h} = |z - \bar{y}|^2, \quad h_0 = |x_0 - z|^2, \quad h_* = \min(h, \bar{h}).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} f(z, y) = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{z})\mathbf{n}_0(z)(h^{-3/2} + \bar{h}^{-3/2}) + \varepsilon \mathbf{n}_0(z)\mathbf{n}_0(x_0)(h^{-3/2} - \bar{h}^{-3/2}) \\ \le (\mathbf{x}_0 - \mathbf{z})\mathbf{n}_0(z) h_*^{-3/2}(1 + \varepsilon^2/h_*), \end{aligned}$$

где $|(\mathbf{x}_0 - \mathbf{z})\mathbf{n}_0(z)| \le c(S_0) h_0$ (это верно для любой C^2-гладкой поверхности), так что

$$|f(z, y)| \le c(S_0) h_0 h_*^{-3/2}(1 + \varepsilon^2/h_*), \quad h_* = \min(h, \bar{h}). \tag{6.7}$$

Введем интегралы

$$I_1 = \int\limits_{\Sigma_\varepsilon} f(z, y) \frac{dS_z}{|\xi - z|}, \quad \Sigma_\varepsilon = \{z \in S_0 : |x_0 - z| \le 2\varepsilon\},$$

$$I_2 = \int\limits_{\Sigma'_\varepsilon} f(z, y) \frac{dS_z}{|\xi - z|}, \quad \Sigma'_\varepsilon = S_0 \setminus \Sigma_\varepsilon, \quad I_1 + I_2 = I.$$

Оценим I_2. Заметим, что $h_*^2 \ge h_0/4$ на Σ'_ε. Отсюда с учетом (6.7) находим $|f(z, y)| \le c(S_0) h_0^{-1/2}$ на Σ'_ε, а потому

$$I_2(\xi, x_0, \varepsilon) \le c(S_0) \int\limits_{\Sigma'_\varepsilon} \frac{dS_z}{|x_0 - z||\xi - z|}.$$

Если $|\xi - z| \ge |x_0 - z|$, то

$$I_3(\xi, x_0, \varepsilon) \le \int\limits_{\Sigma'_\varepsilon} \frac{dS_z}{|x_0 - z|^2} \le C(S_0) \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad |\xi - z| \ge |x_0 - z|.$$

Если $|\xi - z| < |x_0 - z|$, то фиксируем произвольное число $\sigma \in (0, 1)$ и заключаем, что

$$I_2(\xi, x_0, \varepsilon) \le \varepsilon^{-\sigma} \int\limits_{\Sigma'_\varepsilon} \frac{dS_z}{|\xi - z|^{2-\sigma}} \le c(S_0)\sigma^{-1}\varepsilon^{-\sigma}, \quad |\xi - z| < |x_0 - z|.$$

Минимизировав правую часть этого неравенства по $\sigma \in (0, 1)$, установим, что найдутся $c = c(S_0) > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$I_2(\xi, x_0, \varepsilon) \le c \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

для всех ξ, x_0 и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Обратимся к I_1. Теперь $h_0^{1/2} = |x_0 - z| \le 2\varepsilon$. Выберем местные декартовы координаты $Oz_1'z_2'\zeta$ с началом отсчета в точке x_0 и направим ось ζ по $\mathbf{n}_0(x_0)$. В этих координатах

$$y = (0, 0, \varepsilon), \quad \bar{y} = (0, 0, -\varepsilon),$$

и некоторая окрестность x_0 в S_0 есть график функции $\zeta = F(z')$, определенной в некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^2$ и такой, что $F(0) = 0$ и $\nabla F(0) = 0$. Записав правую часть неравенства (6.7) в этих координатах, получим оценку

$$|I_1| \le c \int\limits_{|z'|<c\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + z'^2)^{3/2}} \frac{dz'}{|\xi - z|},$$

где c зависит лишь от S_0. Отсюда следует, что

$$|I_1(\xi, x_0, \varepsilon)| \le C(S_0), \quad |\xi - z| > \varepsilon.$$

Если $|\xi - z| \le \varepsilon$, то ξ лежит на графике F, так что $\xi = (\xi', F(\xi'))$. Тогда

$$|I_1| \le c \int\limits_{|z'|<c\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + z'^2)^{3/2}} \frac{dz'}{|\xi' - z'|} \le \frac{c}{\varepsilon} \int\limits_{|\xi'-z'|<c_1\varepsilon} \frac{dz'}{|\xi' - z'|} \le C = C(S_0).$$

Итак, I_1 ограничен равномерно по x_0, ξ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Лемма доказана. $\square$

7. Приложение 2. Лагранжиан шара

Пусть тело — однородный шар. Приведем общий лагранжиан $\mathscr{L} = \mathrm{K} + q\Lambda - q^2\Pi$ к виду (3.1). Общие выражения функционалов К, Λ и Π определены в (2.2). Значения безразмерных параметров (1.1) таковы: μ равно отношению плотностей шара и жидкости и $\rho = 3/(4\pi)$.

Как известно (см., например, [19]), в случае однородного шара

$$2\mathrm{K} = \mu_1 \mathbf{u}^2/2 + (2\mu\boldsymbol{\omega}^2/5), \quad \mu_1 = \mu + 1/2. \tag{7.1}$$

Далее, течение, вызываемое движением шара с трансляционной скоростью $\mathbf{u}$, имеет потенциал $|x-r|^{-3}((\mathbf{r}-\mathbf{x})\cdot\mathbf{u})/2$, где r — координата центра шара, $|x-r| > 1$ и $|r| > 1$. Таким образом,

$$\Lambda = -\Phi(0|r, \mathbf{u}) = -\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}/(2|r|)^3 = -\dot{R}/(2R^2), \quad R = |r| > 1. \tag{7.2}$$

Заметим, кстати, что $\Lambda(\mathbf{u}) = dW(\mathbf{u})$, $W = (2R)^{-1}$.

Обратимся к вычислению Π. Как видно из (2.4), дело сводится к определению $g_0(z, z_0)$, где

$$\Delta_z g_0 = 0,\ |R| > 1, \quad (\partial/\partial R)|_{R=1}(g_0 - (4\pi|z - z_0|)^{-1}) = 0, \quad R = |z|. \tag{7.3}$$

В этой связи заметим, что функция $F(z, z_0) = (\mathbf{z}, \nabla_z)g_0(z, z_0)$ — решение внешней задачи Дирихле

$$\Delta_z F = 0,\ |R| > 1, \quad F|_{|R|=1} = \partial g_0/\partial R.$$

Отсюда находим $F(z, z) = (4\pi)^{-1}(|z|^2 - 1)^{-2}$. Вместе с тем

$$(\mathbf{z}, \nabla_z)(g_0(z, z)) = 2((\mathbf{z}, \nabla_z)g_0(z, z_0))|_{z=z_0} = 2F(z, z), \quad \lim_{R\to\infty} g(z, z) \to 0.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем $g_0(z, z)$. Итак,

$$\Pi(\mathrm{T}) = \Pi_0(R) = g_0(r_0, r_0)/(2\rho) = -(\ln(1 - R^{-2}) + (R^2 - 1)^{-1})/6, \qquad (7.4)$$

где $R = |r_0| = |r|$ и $r_0 = \mathrm{T}^{-1}0$.

Как видно из (7.1), (7.2) и (7.4), лагранжиан $\mathscr{L}$ инвариантен относительно как левого, так и правого действия SO(3) (правое действие мы определили в разд. 3), а потому $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathrm{const}$. Следовательно, вклад угловой скорости исключается из выражения кинетической энергии (7.1). Таким образом, центр шара движется как материальная частица массы $\mu_1 = \mu + 1/2$ в осциллирующем центральном поле с потенциалом

$$-q^2(\ln(1 - R^{-2}) + (R^2 - 1)^{-1})/6 - \dot{q}/(2R).$$

Радиальные перемещения в таком поле описываются лагранжианом (3.1).

Заметим кстати, что закон сохранения полного момента тела (2.8) сводится к равенству $\mathbf{u} \times \mathbf{r} \equiv \mathrm{const}$, т. е. к сохранению углового момента одной материальной частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cooke C.* Bjerknes's hydrodynamical experiments // Engineering. 1882. V. 33. P. 23–25.
2. *Hicks W. M.* On the problem of two pulsating spheres in a fluid. Part I // Proc. Cam. Phil. Soc. 1879. V. 3. P. 276–285.
3. *Hicks W. M.* On the problem of two pulsating spheres in a fluid. Part II // Proc. Cam. Phil. Soc. 1890. V. 4. P. 29–35.
4. *Жуковский Н. Е.* Обобщение задачи Бьёркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы // Собр. соч. М.; Л.: Физматгиз, 1949. Т. 2. С. 670–688..
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973.
6. *Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.* О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
7. *Лаврентьева О. М.* Движение тела в пульсирующей идеальной жидкости // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1991. Вып. 103. С. 120–125.
8. *Сенницкий В. Л.* Движение шара в жидкости в присутствии стенки при колебательных воздействиях // Прикл. математика техн. физика. 1999. Т. 40, № 4. С. 125–132.
9. *Lavrentyeva O. M.* On the motion of particles in non-uniformly vibrating fluid // Eur. J. Appl. Math. 1999. V. 10. P. 251–263.
10. *Заичкин Е. В., Любимов Д. В.* Поведение взвешенного в жидкости тела в поле торсионных вибраций // Вибрационные эффекты в гидродинамике. Пермь, 2001. Вып. 2. С. 97–109.
11. *Сенницкий В. Л.* О движении пульсирующего твердого тела в вязкой колеблющейся жидкости // Прикл. математика техн. физика. 2001. Т. 42, № 1. С. 82–86.
12. *Vladimirov V. A.* On vibrodynamics of pendulum and submerged solid // J. Math. Fluid Mech. 2005. V. 7, N 3. P. S397–S412.
13. *Борисов А. В., Мамаев И. С., Рамоданов С. М.* Взаимодействие двух круговых цилиндров в идеальной жидкости // Нелинейная динамика. 2005. Т. 1, № 1. С. 3–21.
14. *Borisov A. V., Mamaev I. S.* On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation // Chaos. 2006. V. 16, N 013118. 7 p.
15. *Morgulis A. B., Vladimirov V. A.* Dynamics of a solid affected by a pulsating point source of fluid // Proc. IUTAM Symp. Hamiltonian dynamics, vortex structures and turbulence. Dordrecht: Springer-Verl., 2008. P. 135–150.
16. *Юдович В. И.* Вибродинамика систем со связями // Докл. АН. 1997. Т. 354, № 5. С. 622–624.
17. *Юдович В. И.* Динамика материальной частицы на вибрирующей гладкой поверхности // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 62, № 6. С. 968–976.
18. *Юдович В. И.* Вибродинамика и виброгеометрия систем со связями // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 3. С. 26–129.

19. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика.. М: Физматгиз, 1955. Ч. 1.

Статья поступила 7 мая 2013 г.

Владимиров Владимир Алексеевич
The University of York, Heslington, York, YO10 5DD, UK
`vladimir.vladimirov@york.ac.uk`

Моргулис Андрей Борисович
Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова, 8^a, Ростов-на-Дону 344090;
Южный математический институт,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
`amor@math.sfedu.ru` `amor@donpac.ru`