Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 517.95

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С ОДНОРОДНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

М. Т. Пикула, В. М. Владичич, Д. Д. Недич

Аннотация. Изучается обратная задача Штурма — Лиувилля с запаздыванием

$$-y''(x)+q(x)y(\alpha x), \quad q\in L_2[0,\pi],\ \alpha\in(0,1],$$

и с граничными условиями $y(0)=y(\pi)=0$.

Ключевые слова: дифференциальный оператор с запаздыванием, обратная задача, тригонометрический коэффициент Фурье.

1. Введение

Обратные задачи в спектральной теории операторов, в особенности дифференциальных операторов, изучаются с 1930-х гг. Основной работой в этом направлении является [1]. В монографии [2], освещающей эту тематику, отдельная глава посвящена обратным задачам для порожденных уравнений с запаздыванием. В [3–6] представлены последние результаты в этой области. В данной работе одновременно изучаются задачи для $\alpha=1$ и $\alpha\in(0,1)$. Показано, что набор собственных чисел однозначно определяет потенциал q в смысле L_2, только если он симметричен относительно точки $\frac{\pi}{2}$ для $\alpha=1$ и если он удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} x\in\left(0,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi\right)\Rightarrow q(x)=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}q\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}x\right), \\ x\in\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi,\pi\right)\Rightarrow q(x)=q\left(\frac{2\pi}{1+\alpha}-x\right), \quad \alpha\in(0,1). \end{gathered} \tag{$*$}$$

Для $\alpha=1$ получен известный результат из [7, 8].

2. Анализ прямой задачи

Рассмотрим краевую задачу, определенную дифференциальным уравнением

$$-y''(x)+q(x)y(\alpha x)=\lambda y(x), \quad q\in L_2[0,\pi],\ \alpha\in(0,1], \tag{1}$$

с граничными условиями

$$y(0)=y(\pi)=0, \tag{2}$$

Partially supported by Ministry of Science and Technology Government of the Republic of Srpska.

где λ — спектральный параметр. Пусть $\lambda = z^2$. Тогда характеристической для (1), (2) является (см. [6]) функция

$$\begin{aligned} F_\alpha(z) = \sin \pi z + \frac{1}{z}\int\limits_0^\pi q(t)\sin z(\pi - t)\sin z\alpha t\,dt \\ + \frac{1}{z^2}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{\alpha t_1} q(t_1)q(t_2)\sin z(\pi - t_1)\sin z(\alpha t_1 - t_2)\sin z\alpha t_2\,dt_2dt_1 \\ + \sum_{l=3}^{\infty}\frac{1}{z^l}\int\limits_{D_\pi^l} Q(T_l)\sin z(\pi - t_1)S_l(T_l)\sin z\alpha t_l\,dT_l \\ = \sin \pi z + \frac{1}{z}\int\limits_0^\pi q(t)\sin z(\pi - t)\sin z\sin \alpha t\,dt + \psi_\alpha(\pi, z). \end{aligned} \tag{3}$$

Функция F_α целая по λ порядка $\frac{1}{2}$ для всех $\alpha \in (0, 1]$. В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$a_{c,1}(z) = \int\limits_0^\pi q(t)\cos z(\pi - 2t)\,dt,\ z \in \mathbb{C}, \quad I_1 = \int\limits_0^\pi q(t)\,dt.$$

Тогда

$$\begin{gathered} \psi_1(\pi, z) = O\biggl(\frac{a_{c,1}(z)}{z^2}\biggr) \quad \text{при } z \to \infty, \\ F_1(z) = \sin \pi z - I_1\frac{\cos \pi z}{2z} + \frac{a_{c,1}(z)}{2z} + O\biggl(\frac{a_{c,1}(z)}{z^2}\biggr) \quad \text{при } z \to \infty. \end{gathered} \tag{4}$$

При $\alpha \in (0, 1)$ необходимо сначала определить функцию

$$\tilde{q}^-(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in (-\pi, \alpha\pi), \\ \frac{1}{1+\alpha}q\bigl(\frac{\pi-\theta}{1+\alpha}\bigr), & \theta \in (-\alpha\pi, \alpha\pi), \\ \frac{1}{1+\alpha}q\bigl(\frac{\pi-\theta}{1+\alpha}\bigr) - \frac{1}{1-\alpha}q\bigl(\frac{\pi-\theta}{1-\alpha}\bigr), & \theta \in (\alpha\pi, \pi). \end{cases} \tag{5}$$

Функция $\tilde{q}^-(\theta)$ называется *транзитивной*.

Пусть

$$a^-_{c,\alpha}(z) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\tilde{q}^-(\theta)\cos z\theta\,d\theta, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из (3) получаем

$$F_\alpha(z) = \sin \pi z + \frac{1}{2z}a^-_{c,\alpha}(z) + O\biggl(\frac{a^-_{c,\alpha}(z)}{z^2}\biggr), \quad z \to \infty. \tag{6}$$

Пусть

$$a_{2n} = \int\limits_0^\pi q(t)\cos 2nt\,dt, \quad b_{2n} = \int\limits_0^\pi q(t)\sin 2nt\,dt.$$

Известно, что для собственных значений λ_n оператора, определяемого (1), (2), при $\alpha = 1$ имеют место асимптотические формулы

$$\lambda_n = n^2 + \frac{1}{\pi} I_1 - \frac{1}{\pi} a_{2n} + O\left(\frac{b_{2n}}{n}\right) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{7}$$

При $\alpha \in (0,1)$ положим

$$a_c^-(n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{q}^-(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad b_c^-(n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{q}^-(\theta) \sin n\theta \, d\theta.$$

Получаем асимптотические формулы для собственных значений $\lambda_n^{(\alpha)}$ в виде (см. [6])

$$\lambda_n^{(\alpha)} = n^2 + \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} a_c^-(n) + O\left(\frac{b_c^-(n)}{n}\right). \tag{8}$$

Замечание 1. Если q — симметричная функция относительно точки $\frac{\pi}{2}$ при $\alpha = 1$, то $b_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\lambda_n^{(1)} = n^2 + \frac{1}{\pi} I_1 - \frac{1}{\pi} a_{2n} + O\left(\frac{a_{2n}}{n^2}\right). \tag{9_1}$$

Если q удовлетворяет условию $(*)$, то

$$\lambda_n^{(\alpha)} = n^2 + \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} a_c^-(n) + O\left(\frac{a_c^-(n)}{n^3}\right), \quad \alpha \in (0,1). \tag{9_α}$$

По теореме Адамара о факторизации F определяется своими нулями однозначно с точностью до постоянного множителя (см. [6]). Найдем этот множитель:

$$\begin{aligned} F_\alpha(z) &= A_\alpha z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^{(\alpha)}}\right) = \frac{A_\alpha}{\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda_n^{(\alpha)}} \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) + \frac{\lambda_n^{(\alpha)} - n^2}{n^2}\right] \\ &= \left(\frac{A_\alpha}{\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda_n^{(\alpha)}}\right) \pi z \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{n \neq j} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \frac{\lambda_j^{(\alpha)} - j^2}{j^2} \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_l} \prod_{n \neq j_1 \dots j_l} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \prod_{i=j}^{l} \frac{\lambda_{j_i}^{(\alpha)} - j_i^2}{j_i^2} \right\} \\ &= B_\alpha \left(\sin \pi z + \sin \pi z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{(\alpha)} - n^2}{n^2 - z^2} + \psi_\alpha(z)\right), \quad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$B_\alpha = \frac{A_\alpha}{\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda_{n_\alpha}}.$$

Из (3) и (10) получаем $B_\alpha = 1$, $\alpha \in (0,1]$ (см. [2, 5]).

Поскольку функция

$$B_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{(\alpha)} - n^2}{n^2 - z^2}, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z},$$

важна, исследуем ее. При $\alpha = 1$ имеем

$$B_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{(1)} - n^2 - \frac{I_1}{\pi} + \frac{1}{\pi} a_{2n}}{n^2 - z^2} + \frac{I_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z^2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{n^2 - z^2}\, dt$$
$$= \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^{(1)} - n^2 - \frac{I_1}{\pi} + \frac{1}{\pi} a_{2n}\right) \frac{n^2}{n^2 - z^2} - \frac{S_1^*}{z^2} + \frac{I_1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2z} \cdot \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} + \frac{1}{2z^2}\right]$$
$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} q(t) \left(-\frac{\pi}{2z} \cdot \frac{\cos(\pi - 2t)z}{\sin \pi z} + \frac{1}{2z^2}\right) dt,$$

где $S_1^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^{(1)} - n^2 - \frac{I_1}{\pi} + \frac{1}{\pi} a_{2n}\right)$ — так называемый первый регуляризованный след оператора. Стало быть,

$$B_1(z) = -\frac{I_1}{2z} \cdot \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} + \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{\sin \pi z} a_{c_1}(z) + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}, \tag{11_1}$$

где

$$a_{c_1}(z) = \int_0^{\pi} q(t) \cos z(\pi - 2t)\, dt.$$

Из (4) и (10) получаем

$$a_{c,1}(z) = 2z \sin \pi z \cdot B_1(z) + I_1 \cos \pi z + O\left(\frac{\sin \pi z}{z}\right), \quad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}. \tag{12_1}$$

Для $\alpha \in (0, 1)$ имеем

$$B_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{(\alpha)} - n^2 - \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} a_c^-(n)}{n^2 - z^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a_c^-(n)}{n^2 - z^2}$$
$$= \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^{(\alpha)} - n^2 - \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} a_c^-(n)\right) \frac{n^2}{n^2 - z^2} - \frac{S_1^*}{z^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a_c^-(n)}{n^2 - z^2},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \tilde{q}^-(\theta) \cos n\theta}{n^2 - z^2}\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{q}^-(\theta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos n\theta}{n^2 - z^2}\, d\theta$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{q}^-(\theta) \left[\frac{\pi}{2z} \cdot \frac{\cos z\theta}{\sin \pi z} - \frac{1}{2z^2}\right] d\theta = \frac{\pi}{2z \sin \pi z} a_c^-(z) - \frac{1}{2z^2} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{q}^-(\theta)\, d\theta,$$

$$B_\alpha(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\lambda_n^{(\alpha)} - n^2 - \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} a_c^-(n)\right) \frac{n^2}{n^2 - z^2}$$
$$- \frac{S_1^*}{z^2} + \frac{1}{2z \sin \pi z} a_c^-(z) - \frac{1}{2z^2} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{q}^-(\theta)\, d\theta.$$

Тем самым

$$B_\alpha(z) = \frac{1}{2z \sin \pi z} a_c^-(z) + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad \text{при } z \to \infty. \tag{11_α}$$

Из (6) и (10) следует, что

$$a_c^-(z) = 2z\sin\pi z \cdot B_\alpha(z) + O\left(\frac{\sin\pi z}{z}\right) \quad \text{при } z \to \infty. \tag{12_α}$$

Анализируя функцию $B_\alpha(z)$ при $z \to \infty$, с помощью асимптотик собственных значений нетрудно понять, что асимптотическая формула для $F_\alpha(z)$, полученная с помощью бесконечного произведения, совпадает с формулой, полученной в прямой задаче. Тем самым выводим следующий результат.

Теорема 1. *Для функции F_α, $\alpha \in (0,1]$, заданной формулой (3), при $\alpha = 1$ имеет место асимптотическая формула (4), а при $\alpha \in (0,1)$ — формула (6) в том и только том случае, когда для квадратов нулей $\lambda_n^{(\alpha)}$, $\alpha \in (0,1]$, функции имеют место асимптотические формулы (7) при $\alpha = 1$ и (8) при $\alpha \in (0,1)$.*

3. Связь $\lambda_n^{(\alpha)}$ с коэффициентами Фурье функций q и $\tilde{q}^-$

С помощью функции $B_\alpha(z)$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, $\alpha \in (0,1]$, получим связь собственных значений $\lambda_n^{(\alpha)}$ оператора (1), (2) с коэффициентами Фурье a_{2m}, b_{2m}, $m \in \mathbb{N}_0$, потенциала q на $[0,\pi]$ при $\alpha = 1$ и коэффициентами Фурье a_m, b_m, $m \in \mathbb{N}_0$, функции переноса $\tilde{q}^-$ на $[-\pi,\pi]$.

Введем функцию

$$\widehat{B}_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi}I_1}{n^2 - z^2}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}.$$

Тогда

$$a_{c,1}(z) = 2z\sin\pi z \cdot \widehat{B}_1(z) + O\left(\frac{\sin\pi z}{z}\right) \quad \text{при } z \to \infty. \tag{13}$$

Положим

$$a_{2m}(t) = \int_0^t q(t_1)\cos 2mt_1\,dt_1, \quad b_{2m}(t) = \int_o^t q(t_1)\sin 2mt_1\,dt_1,$$

$$a_{2m} = a_{2m}(\pi), \quad b_{2m} = b_{2m}(\pi),$$

$$\zeta_k = 2k\int_0^\pi a_{2m}(t)\operatorname{sh} k(\pi - 2t)\,dt, \quad \eta_k = 2k\int_0^\pi b_{2m}(t)\operatorname{ch} k(\pi - 2t)\,dt.$$

Тогда

$$a_{c,1}(m + ik) = (-1)^m\{a_{2m}\operatorname{ch} k\pi + \zeta_k + i[-b_{2m}\operatorname{sh} k\pi + \eta_k]\}.$$

Положим

$$\sigma_{n,m,k} = (n^2 + k^2 - m^2) + 4m^2k^2,$$

$$C_{n,m,k}^{(\alpha)} = (-2k)\left(\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi}I_1\right)(n^2 + m^2 + k^2),$$

$$S_{n,m,k}^{(\alpha)} = 2m\left(\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi}I_1\right)(n^2 - m^2 - k^2).$$

При $z = m + ik$ из (13) получаем

$$a_{2m} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{(1)}_{n,m,k}}{\sigma_{n,m,k}}, \quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{13_1}$$

$$b_{2m} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^{(1)}_{n,m,k}}{\sigma_{n,m,k}}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Поступая аналогично при $\alpha \in (0,1)$, имеем

$$a^{-}_{m,\alpha} = -\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{(\alpha)}_{n,m,k}}{\sigma_{n,m,k}}, \quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{15}$$

$$b^{-}_{m,\alpha} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^{(\alpha)}_{n,m,k}}{\sigma_{n,m,k}}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Величины $C^{(\alpha)}_{n,m,k}$ и $S^{(\alpha)}_{n,m,k}$ порождаются с помощью значений, принимаемых $\lambda^{(\alpha)}_n$, а не на основе их асимптотик. Соотношения (13_1), (14) и (15), (16) получены подходящим выбором асимптотического поведения функций $\widetilde{B}_\alpha(z)$, $z = m + ik$, $k \to \infty$, $m \in \mathbb{R}$.

Соотношения (13_1), (14) для $\alpha = 1$ и (15), (16) для $\alpha \in (0,1)$ существенны при решении обратной задачи (1), (2).

Заметим, что последние соотношения также верны для $-m \in \mathbb{N}$. Действительно,

$$a_{-2m} = \int_0^\pi q(t)\cos(-2m)t\,dt = a_{2m}, \quad a_{-2m} = \int_0^\pi q(\pi - t)\cos 2mt\,dt, \quad m \in \mathbb{N},$$

т. е.

$$a^{-}_{-m} = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{q}^{-}(\theta)\cos(-m)\theta\,d\theta = a_{-m}, \quad a^{-}_{-m} = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{q}^{-}(\pi - \theta)\cos m\theta\,d\theta, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, соотношения (13_1) и (15) устанавливают общий способ выражения коэффициентов $\{a_{2m}\}$ с помощью $\lambda^{(1)}_n$ и коэффициентов $\{a_m\}$ с помощью $\lambda^{(\alpha)}_n$ соответственно.

Однако из (14) и (16) получаем

$$b_{-2m} = -b_{2m} = \int_0^\pi q(\pi - t)\sin 2mt\,dt, \quad b^{-}_{-m} = -b^{-}_m \int_{-\pi}^{\pi} q(\pi - \theta)\sin m\theta\,d\theta.$$

Следовательно, эта система определяет синус-коэффициенты Фурье и функции $q(x)$ и $q(\pi - x)$ так, что q — симметричная функция относительно $\frac{\pi}{2}$ при $\alpha = 1$, и если неверно $q(x) = q(\pi - x)$, то $b_{2m} \neq 0$, тем самым $b_{2m} \neq -b_{2m}$.

Если q — симметричная функция относительно $\frac{\pi}{2}$ и $q(x) = q(\pi - x)$, то $b_{2m} = 0$, $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, приходим к условию

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^{(1)}_{n,m,k}}{\sigma_{n,m,k}} = 0, \quad \alpha = 1. \tag{17}$$

Аналогично при $\alpha \in (0,1)$ получаем

$$
\begin{aligned}
x \in \left(0, \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi\right) &\Rightarrow q(x) = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} q\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}x\right),\\
x \in \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi, \pi\right) &\Rightarrow q(x) = q\left(\frac{2\pi}{1+\alpha} - x\right).
\end{aligned} \tag{18}
$$

Если q не удовлетворяет равенству (18) и неверно $q(x) = q(\pi - x)$, то $b_m^- \neq 0$ и тем самым $b_m^- \neq -b_m^-$. В противном случае имеем $b_m^- = 0$, $m \in \mathbb{N}$, откуда следует, что

$$
\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{n,m,k}^{(1)}}{\sigma_{n,m,k}} = 0. \tag{19}
$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если $\lambda_n^{(\alpha)}$ — ряд собственных значений оператора* (1), (2) *с симметричным потенциалом при $\alpha = 1$ и потенциалом, удовлетворяющим условиям* $(*)$ *при $\alpha \in (0,1)$, то коэффициенты Фурье потенциала q при $\alpha = 1$ и коэффициенты Фурье функции перехода $\tilde{q}^-$ при $\alpha \in (0,1)$ определены однозначно.*

4. Решение обратной задачи

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 3. *Пусть $\lambda_n^{(\alpha)}$, $n \in \mathbb{N}$, — ряд собственных значений оператора* (1), (2) *с потенциалом,*

(1) *симметричным относительно точки $\frac{\pi}{2}$ при $\alpha = 1$;*

(2) *удовлетворяющим равенствам* $(*)$ *при $\alpha \in (0,1)$.*

Тогда потенциал q определен однозначно для всех $\alpha \in (0,1]$.

Доказательство. Из (9_1) получим

$$
\frac{1}{\pi} I_1 = \lim_{n\to\infty} \left(\lambda_n^{(1)} - n^2\right) = a_0.
$$

Построим целые функции F_1 и F_α, используя их нули $z_n^{(\alpha)} = \pm\sqrt{\lambda_n^{(\alpha)}}$, с помощью бесконечного произведения. Рассуждениями из разд. 2 и 3 придем к тождествам (13_1) и (13_α) в $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

При $z = m + ik$, поступая, как в разд. 3, выводим (14_1) и (16). Таким образом получаем значения коэффициентов Фурье функций q и $\tilde{q}^-$. Имеем

$$
q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} \cos 2mx, \quad x \in [0,\pi],\ q \in L_2[0,\pi], \tag{20}
$$

$$
\tilde{q}^-(\theta) = \begin{cases} \frac{a_0^-}{2} + \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m^- \cos m\theta, & \theta \in [-\alpha\pi, \alpha\pi];\\ 0, & \theta \in [(-\pi, -\alpha\pi) \cup (\alpha\pi, \pi)]. \end{cases} \tag{21}
$$

Значения функции $\tilde{q}^-$ однозначно определяются по (21). Имеем

$$
\tilde{q}^-(\pi - (1+\alpha)x) = \frac{a_0^-}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m a_m^- \cos m(1+\alpha)x, \quad x \in \left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi, \pi\right], \tag{22}
$$

$$q(x) = \frac{(1+\alpha)a_0^-}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(1+\alpha)a_m^- \cos m(1+\alpha)x, \quad x \in \left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi, \pi\right]. \quad (23)$$

Тем самым потенциал q определен однозначно в смысле $L_2[0,\pi]$ на отрезке $\left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi, \pi\right]$. На отрезке $\left[0, \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi\right]$ потенциал определяется с помощью первого равенства из (18), так что

$$q(x) = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} q\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}x\right), \quad x \in \left[0, \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi\right]. \quad (24)$$

Рассмотрим разбиение

$$\left[0, \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi\right] = \bigcup_{l=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{l+1}\pi, \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{l}\pi\right],$$

в результате которого равенство (24) распадается на счетный набор верных соотношений

$$q(x) = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} q\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}x\right), \quad x \in \left[\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{l+1}\pi, \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{l}\pi\right],$$

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}x \in \left[\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{l}\pi, \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{l-1}\pi\right], \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Действительно, при $l = 1$ имеем

$$x \in \left[\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{2}\pi, \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi\right] \Rightarrow \frac{1+\alpha}{1-\alpha}x \in \left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi, \pi\right],$$

при $l = 2$ —

$$x \in \left[\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{3}\pi, \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{2}\pi\right] \Rightarrow \frac{1+\alpha}{1-\alpha}x \in \left[\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{2}\pi, \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi\right].$$

Продолжая этот процесс, убеждаемся, что потенциал q определяется однозначно на $\left[0, \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi\right]$ своими значениями на $\left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\pi, \pi\right]$.

Тем самым доказали, что потенциал определен однозначно в смысле $L_2[0,\pi]$ для всех $\alpha \in (0, 1]$. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ambarzumjan V.* Über eine Frage der Eigenwerttheorie // Zeitshr. Physik. 1929. Bd 53. S. 690–695.
2. *Freiling G., Yurko V.* Inverse Sturm–Liouville problems and their applications. Huntigton; New York: Nova Sci. Publ., Inc., 2008.
3. *Bayramov A., Ozturk U. S., Kizilbudak C. S.* Computation of eigenvalues and eigenfunction of a discontinuous boundary value problem with retarded argument // Appl. Math. Comput. 2007. V. 191. P. 592–600.
4. *Chuan-Fu Yang.* Trace and inverse problems of a discontinuous Sturm–Liouville operator with retarded argument // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 395. P. 30–41.
5. *Freiling G., Yurko V.* Inverse problems for Sturm–Liouville differential operators with a constant delay // Appl. Math. Lett. 2012. V. 25, N 11. P. 1999–2004.
6. *Pikula M., Vladicic V., Markovic O.* A solution to the inverse problem for the Sturm–Liouville type equation with a delay // Filomat. 2013. V. 27, N 7. P. 1237–1245.
7. *Borg S.* Eine Umkehrung der Sturm–Liouvillschen Eigenwertaufgabe // Acta Math. 1946. Bd 78. Heft 1. S. 1–96.

8. *Левитан Б. М., Саргсян И. Ш.* Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 14 августа 2013 г.

Milenko T. Pikula (Пикула Миленко Т.),
Vladimir M. Vladičić (Владичич Владимир М.)
University of East Sarajevo
East Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
mpikula@paleol.net, vvladicic@ffuis.edu.ba

Dragana D. Nedić (Недич Драгана Д.)
University of East Sarajevo
Doboj, Bosnia and Herzegovina
dnedic@gmail.com