Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 512.54

О СИЛЬНО ЗАМКНУТЫХ ПОДГРУППАХ, ИЛИ $\mathscr{H}$–ПОДГРУППАХ, КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Чж. Шэнь, У. Ши, Ж. Шэнь

Аннотация. Пусть G — конечная группа. Гольдшмидт, Флорес и Фут изучали следующий вопрос. Пусть $K \leq G$. Подгруппа H группы K называется *сильно замкнутой* в K относительно G, если $H^g \cap K \leq H$ для всякого $g \in G$. В частности, когда H — подгруппа, порядок которой есть степень простого числа, а K — силовская подгруппа, ее содержащая, H называется *сильно замкнутой подгруппой.* Бьянки и др. назвали подгруппу H группы G $\mathscr{H}$-подгруппой, если $N_G(H) \cap H^g \leq H$ для всех $g \in G$. $\mathscr{H}$-подгруппа порядка, равного степени простого числа, — это сильно замкнутая подгруппа. В данной статье дана характеризация конечных не $\mathscr{T}$-групп, максимальные подгруппы которых четного порядка являются расширениями разрешимых $\mathscr{T}$-групп $\mathscr{H}$-подгруппами или сильно замкнутыми подгруппами. Кроме того, структура конечных не $\mathscr{T}$-групп, у которых максимальные подгруппы четного порядка являются разрешимыми $\mathscr{T}$-группами, может оказаться сложной, если не использовать нормальность.

Ключевые слова: $\mathscr{H}$-подгруппа, сильно замкнутая подгруппа, $\mathscr{T}$-группа, сверхразрешимая группа.

1. Введение

Все рассматриваемые в статье группы конечны. Обозначения и терминология статьи стандартны (см. [1–4]).

Следующее важное понятие (см. определение 1.1 ниже) исследовано Гольдшмидтом, Флоресом и Футом [5–8].

Определение 1.1. Пусть $K \leq G$. Подгруппа H в K называется *сильно замкнутой* в K относительно G, если $H^g \cap K \leq H$ для всякого $g \in G$. В частности, если H — подгруппа, порядок которой есть степень простого числа, а K — силовская подгруппа, ее содержащая, то говорят, что H — *сильно замкнутая подгруппа.*

Понятие сильной замкнутости имеет важные приложения вне теории конечных групп. В частности, оно тесно связано с понятием систем слияния (или фробениусовых категорий) Пуига, которое возникло из теории модулярных представлений конечных групп. Каждому p-блоку конечной группы можно сопоставить (насыщенную) систему слияния. Аксиоматический подход Пуига предоставил формализм, необходимый для исследования слияния в контексте, содержащем в качестве частного случая естественные системы слияния, возникающие из пар (G, S), где G — конечная группа и S — силовская p-подгруппа

The project is supported by the Natural Science Foundation of China (N 11171364, 11301532), the CPSF (N 2012T50010)) and the Innovation Foundation of Chongqing (KJTD201321). The first author and corresponding author made with the same contribution to this paper.

в G. Понятие сильного замыкания очевидным образом обобщается на системы слияния и играет там ключевую роль: если $\mathscr{F}$ — система слияния на p-группе S, то гомоморфные образы $\mathscr{F}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с сильно замкнутыми подгруппами в S. Системы слияния были в дальнейшем уточнены Брото, Леви и Оливером для создания класса p-локальных конечных групп. Затем Оливер использовал этот подход для доказательства того, что гомотопический тип p-пополненного классифицирующего пространства конечной группы G единственным образом определяется насыщенной системой слияния (G, S), где S — силовская p-подгруппа в G. Таким образом, сильное замыкание и его обобщения на системы слияния и теорию p-локальных конечных групп также имеет значительные приложения в глубоких и в настоящее время активно развиваемых областях теории модулярных представлений и алгебраической топологии.

Важнейшими результатами в теории сильно замкнутых 2-подгрупп являются знаменитые Z*-теорема Глаубермана [6] и теорема Гольдшмидта о сильно замкнутых абелевых 2-подгруппах [7]. Z*-теорема утверждает, что если A — сильно замкнутая подгруппа порядка 2, то $\overline{A} \le Z(\overline{G})$, где $\overline{G} = G/O_{2'}(G)$. Гольдшмидт обобщил этот факт, показав, что если A — сильно замкнутая 2-подгруппа, то $\overline{A}^{\overline{G}}$ — центральное произведение абелевой 2-группы и квазипростых групп, которые имеют BN-пару ранга 1 или абелевы силовские 2-подгруппы. Эти две теоремы, в частности, сыграли фундаментальную роль в изучении конечных групп и особенно в классификации свободных простых групп.

В 1964–1969 гг. в [9–11] Робинсон исследовал структуру разрешимых $\mathscr{T}$-групп (т. е. разрешимых групп, для которых нормальность — транзитивное отношение) и минимальных не $\mathscr{T}$-групп (т. е. не $\mathscr{T}$-групп, у которых все собственные подгруппы являются $\mathscr{T}$-группами).

В 2000 г. в [12] Бьянки, Маури, Херцог и Верарди ввели следующее понятие.

Определение 1.2. Подгруппа H конечной группы G называется *$\mathscr{H}$-подгруппой* G, если $N_G(H) \cap H^g \le H$ для всех $g \in G$.

Это определение также фигурирует в статьях [13–23]. Там разрешимые $\mathscr{T}$-группы характеризуются с помощью $\mathscr{H}$-подгрупп.

Теорема 1.1 [12]. *Пусть G — группа. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *G — разрешимая $\mathscr{T}$-группа;*

(2) *всякая подгруппа в G есть $\mathscr{H}$-подгруппа G;*

(3) *для всех $p \in \pi(G)$ все p-подгруппы в G являются $\mathscr{H}$-подгруппами G;*

(4) *$G = LM$, где $L = [G', G]$ — абелева нормальная холлова подгруппа в G, M — дедекиндова группа и элементы группы G индуцируют степенные автоморфизмы в L.*

Заметим, что если H — подгруппа в G, порядок которой есть степень простого числа, то H является $\mathscr{H}$-подгруппой тогда и только тогда, когда H — сильно замкнутая подгруппа (см. лемму 2.9 ниже).

Сказанное выше вдохновило нас на исследование структуры $\mathscr{T}$-групп с помощью сильно замкнутых подгрупп.

В свете разрешимости групп нечетного порядка в настоящей статье мы рассматриваем только подгруппы четного порядка и изучаем структуру не $\mathscr{T}$-

групп, максимальные подгруппы четного порядка которых являются $\mathscr{T}$-группами, с помощью сильно замкнутых подгрупп.

2. Предварительные сведения

Лемма 2.1 [12]. *Подгруппа H порядка степени простого числа группы G нормальна тогда и только тогда, когда H субнормальна и сильно замкнута в G.*

Лемма 2.2 [12]. *Пусть G — группа. Предположим, что H — сильно замкнутая p-подгруппа в G, $K \leq G$ и $N \trianglelefteq G$, где p — простое число, делящее порядок G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $H \leq K$, то H — сильно замкнутая подгруппа в K.*

(2) *Пусть $N \leq K$. Если K — p-подгруппа группы G, то K/N — сильно замкнутая подгруппа в G/N тогда и только тогда, когда K — сильно замкнутая подгруппа в G.*

(3) *Если K — p-подгруппа группы G такая, что $(|K|, |N|) = 1$, то K — сильно замкнутая подгруппа группы G тогда и только тогда, когда KN/N — сильно замкнутая подгруппа группы G/N.*

Лемма 2.3 [17]. *Пусть G — группа и p — простое число, делящее порядок группы G. Предположим, что*

$$G = AB, \quad A \leq G, \quad B \leq G.$$

Если H — сильно замкнутая p-подгруппа группы B и H нормализуется подгруппой A, то H — сильно замкнутая подгруппа в G.

Лемма 2.4. *Пусть G — разрешимая $\mathscr{T}$-группа и q — наибольший простой делитель порядка G. Если X — q-подгруппа в G, то $X \trianglelefteq G$.*

Доказательство следует из леммы 2.1 и теоремы 1.1.

Лемма 2.5 [24, теорема 10.1.4]. *Если группа G допускает автоморфизм порядка 2 без неподвижных точек, то G абелева.*

Лемма 2.6. *Предположим, что все циклические подгруппы группы G порядка p нормальны в G для фиксированного простого числа p. Если $|Z(G)|_p \neq 1$, то все элементы порядка p в G лежат в $Z(G)$.*

Доказательство. Пусть x — элемент порядка p в $Z(G)$ и $Y = \langle y \rangle$ — подгруппа порядка p в G. В силу предположений подгруппа Y нормальна в G. Для всех $a \in G$ имеем $(xy)^a x^a y^a = xy^a$. С другой стороны, $\langle xy \rangle$ также является подгруппой порядка p и потому нормальна в G в силу предположений. Таким образом,

$$(xy)^a = (xy)^i = x^i y^i.$$

Следовательно,

$$xy^a = x^i y^i$$

и

$$x = x^i \quad y^a = y^i.$$

Так как x имеет порядок p, то $i \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$. Кроме того, y также имеет порядок p, стало быть, $y^a = y$. Значит, $y \in Z(G)$. $\square$

Лемма 2.7. *Пусть $G = TQP$, где T — подгруппа порядка 2 и P, Q — силовские p- и q-подгруппы в G соответственно. Предположим, что TQ — $\mathscr{T}$-группа и $P \leq N_G(T)$. Тогда T — NE-подгруппа* (это понятие введено Ли в [25]). *В частности, $T^G = T[N]$ — фробениусова группа с фробениусовым ядром N.*

Доказательство следует из теоремы в [26].

Лемма 2.8. *Пусть G — разрешимая группа четного порядка с максимальной подгруппой M четного порядка. Справедливы следующие утверждения.*

(1) $O_{2'}(G) \leq M$.

(2) *Если $\overline{G} = G/O_{2'}(G)$, то силовская 2-подгруппа E группы G элементарно абелева, $\overline{E} \trianglelefteq \overline{G}$ и $\overline{G}$ действует неприводимо на $\overline{E}$ (и действует тривиально, когда $\overline{G} = \overline{E} \cong Z_2$);*

(3) *$G = N_G(E)O_{2'}(G)$, и если $N_G(E)$ — $\mathscr{T}$-группа, то $|E| = 2$ и $M = O_{2'}(G)$.*

Доказательство. Докажем только (3). Пусть $E_0 \leq E$ — подгруппа порядка 2. Тогда E_0 сильно замкнута и субнормальна в $N_G(E)$. Подгруппа E_0 нормальна в $N_G(E)$ по лемме 2.1. Пусть K — холлова $2'$-подгруппа в $N_G(E)$. Тогда E_0K является подгруппой. Поскольку

$$G = N_G(E)O_{2'}(G) = (EK)O_{2'}(G) = E(KO_{2'}(G)),$$

то $KO_{2'}(G) = M$. Более того,

$$(E_0K)O_{2'}(G) = E_0(KO_{2'}(G)) = E_0M > M.$$

Максимальность подгруппы M влечет, что $E_0M = G$. Следовательно, $E_0 = E$. $\square$

Лемма 2.9. *Пусть $H \leq S$ и $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Тогда H является сильно замкнутой подгруппой тогда и только тогда, когда H — $\mathscr{H}$-подгруппа.*

Доказательство. Если H — $\mathscr{H}$-подгруппа, то по определению H является сильно замкнутой подгруппой.

Предположим, что H — сильно замкнутая подгруппа. По лемме 2.1 $S \leq N_G(H)$. Поэтому существует $y \in N_G(H)$, поскольку $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $N_G(H) \cap H^g \leq S^y$. Так как H — сильно замкнутая подгруппа, $S \cap H^{gy^{-1}} \leq H$. Следовательно, $S^y \cap H^g \leq H^y = H$, и, значит,

$$N_G(H) \cap H^g \leq S^y \cap H^g \leq H.$$

Таким образом, H — $\mathscr{H}$-подгруппа. $\square$

3. Основная теорема

В [22] Робинсон установил следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Если G минимальная не $\mathscr{T}$-группа, то $|\pi(G)| \leq 2$.*

Замечание 3.2. Структура минимальных не $\mathscr{T}$-групп исследована Робинсоном в [11].

Теорема 3.3. *Если G не $\mathscr{T}$-группа четного порядка, все собственные подгруппы которой четного порядка — разрешимые $\mathscr{T}$-группы, то G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что G неразрешима. Тогда G не может быть минимальной не $\mathscr{T}$-группой в силу теоремы 3.1. Таким образом, существует максимальная подгруппа M нечетного порядка, и M является не $\mathscr{T}$-группой.

Значит, $2 \notin \pi(\Phi(G))$, где $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G. По теореме Фейта — Томпсона о разрешимости группы нечетного порядка группа M разрешима. Следовательно, все собственные подгруппы в G разрешимы, и потому $G/\Phi(G)$ — минимальная простая группа. Пусть C — нормальное 2-дополнение группы $\Phi(G)$.

(1) $C \leq Z(G)$.

Пусть M — максимальная подгруппа группы G, содержащая силовскую 2-подгруппу группы G. Тогда $\Phi(G) \leq M$ и $\langle M, M^g : g \in G\rangle = G$. Пусть $P \in \mathrm{Syl}_p(\Phi(G))$, где p — простое число, делящееся на $|\Phi(G)|$. Тогда $P \trianglelefteq G$. По предположению всякая собственная подгруппа четного порядка в G является разрешимой $\mathscr{T}$-группой. Пусть H — подгруппа порядка p в P. Тогда подгруппа H нормальна в M^g для всех $g \in G$ в силу леммы 2.1. Значит, H нормальна в G. Пусть $P_1 \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Тогда $H \leq Z(P_1)$, т. е. $P_1 \leq C_G(H) \leq N_G(H) = G$. В силу простоты группы $G/\Phi(G)$ заключаем, что H лежит в центре $Z(G)$. Рассмотрим подгруппу $K = TP$, где $T \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Применяя лемму Ито [3, IV, 5.5], получаем, что группа K p-нильпотентна и потому нильпотентна. Тогда $T \leq C_G(P) \trianglelefteq G$. Снова используя простоту группы $G/\Phi(G)$, имеем $P \leq Z(G)$ и потому $\Phi(G) \leq Z(G)$. С другой стороны, $Z(G) \leq \Phi(G)$. Следовательно, $\Phi(G) = Z(G)$. Это доказывает (1).

Все минимальные простые группы были классифицированы Томсоном [27]. Такими группами являются следующие:

(i) $PSL(3,3)$;

(ii) группа Судзуки $Sz(2^f)$, где f — нечетное простое число;

(iii) $PSL(2,p)$, где p — простое число такое, что $p > 3$ и $p^2 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$;

(iv) $PSL(2,2^f)$, где f простое;

(v) $PSL(2,3^f)$, где f нечетное простое.

Пусть R — силовская 2-подгруппа в $\Phi(G)$.

(2) $C = 1$.

В силу (1) $(G/R)/Z(G/R) \cong G/\Phi(G)$, поэтому G — квазипростая группа с центром нечетного порядка. Согласно таблице множителей Шура известных простых групп получаем, что множитель Шура каждой минимальной простой группы есть 2-группа. Поэтому $C = 1$.

(3) Всякая подгруппа L/R порядка $2^n p$ (p — нечетное простое число) группы G/R 2-нильпотентна.

Предполагая противное, можно считать, что J — минимальная не 2-нильпотентная подгруппа порядка $2^n p$ группы L. По теореме Ито [3, IV.5.4], $J = [T_0]P$, где T_0 — нормальная силовская 2-подгруппа и $|P| = p$. Так как G — неразрешимая группа, $J < G$. По условию J — разрешимая $\mathscr{T}$-группа. Получаем противоречие, поскольку разрешимая $\mathscr{T}$-группа является сверхразрешимой группой.

(4) Итоговое противоречие.

Так как каждая из групп $PSL(2,p)$, $PSL(2,3^f)$ и $PSL(3,3)$ содержит подгруппу, изоморфную группе A_4, знакопеременной группе степени 4, в силу (3) заключаем, что G/R не может быть группой $PSL(2,p)$, $PSL(2,3^f)$ или $PSL(3,3)$. Предположим, что $G \cong PSL(2,2^f)$ или $G/R \cong Sz(2^f)$. Тогда G/R — группа Цассенхауса нечетного порядка и стабилизатор точки есть фробениусова группа, ядром которой является 2-группа. Поэтому G/R не может быть одной из групп $PSL(2,2^f)$, $Sz(2^f)$. $\square$

Теорема 3.4. *Если G не $\mathscr{T}$-группа четного порядка, у которой все собственные подгруппы четного порядка являются $\mathscr{T}$-группами, то $|\pi(G)| \leq 3$.*

Доказательство. Пусть $\pi(G) = \{p_1 = 2, p_2, \dots, p_r\}$, где $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ и $r \geq 4$. По теореме 3.3 группа G неразрешима и потому обладает силовской системой $P_1, P_2, \dots, P_r$ такой, что $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$, $i = 1, 2, \dots, r$. Группа G не является минимальной не $\mathscr{T}$-группой. Значит, существует максимальная подгруппа M в G, не являющаяся $\mathscr{T}$-группой. В силу предположений M — неабелева группа нечетного порядка. По теореме 3.3 M — холлова $2'$-подгруппа. Без ограничения общности можем предполагать, что $M = P_2P_3\dots P_r$. Так как M не является $\mathscr{T}$-группой, она должна иметь подгруппу X простого порядка такую, что X не является сильно замкнутой подгруппой группы M. Пусть $X \leq P_r$. Для каждого $i \in \{2, 3, \dots, r-1\}$ $P_1P_iP_r$ является собственной подгруппой четного порядка в G. Таким образом, в силу наших предположений, $P_1P_iP_r$ — $\mathscr{T}$-группа. Следовательно, подгруппа X нормальна в $P_1P_iP_r$ и потому нормальна в M по лемме 2.4; противоречие. Значит, можно предполагать, что $X \leq P_k$ для фиксированного $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$.

Покажем, что $k = 2$, т. е. $X \leq P_2$.

Предположим, что $k > 2$. Рассмотрим подгруппы

$$A = \prod_{i=2}^{k} P_i, \quad B = \prod_{i=k}^{r} P_i.$$

Имеем $M = AB$, где $X \leq B < M$. Очевидно, что P_1A и P_1B — собственные подгруппы группы G, поэтому в силу предположений являются $\mathscr{T}$-группами. Тем самым X — сильно замкнутая подгруппа в B и A нормализует X по лемме 2.4. Из леммы 2.3 вытекает, что X — сильно замкнутая подгруппа группы G. Получили противоречие.

Таким образом, $X \leq P_2$.

Ясно, что $P_1P_2P_i$ для каждого $i \in \{3, \dots, r\}$ являются собственными подгруппами четного порядка группы G, поэтому $P_1P_2P_i$ в силу предположений являются $\mathscr{T}$-группами. По лемме 2.4 подгруппа X нормализует P_i, $i = 3, \dots, r$. Если $X < P_2$, то группа $D = X \prod\limits_{i=3}^{r} P_i$ является собственной подгруппой в M и $M = P_2D$. Кроме того, X — силовская p_2-подгруппа в D и потому X — сильно замкнутая подгруппа в D. Так как P_1P_2 — собственная подгруппа четного порядка группы G, в силу предположений P_1P_2 является $\mathscr{T}$-группой. По лемме 2.1 P_2 нормализует X. Поэтому $M = P_2D = N_M(X)D$ и получаем, что X — сильно замкнутая подгруппа группы M в силу леммы 2.3; противоречие.

Итак, $X = P_2$. Следовательно, X — силовская p_2-подгруппа группы G, и, стало быть, X является сильно замкнутой подгруппой в G; противоречие. Значит, $|\pi(G)| \leq 3$. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть G — группа четного порядка и $|\pi(G)| \geq 4$. Если все собственные подгруппы четного порядка в G являются разрешимыми $\mathscr{T}$-группами, то G — разрешимая $\mathscr{T}$-группа.*

Теорема 3.5. *Если G не $\mathscr{T}$-группа четного порядка и все ее собственные подгруппы четного порядка являются разрешимыми $\mathscr{T}$-группами, то верно одно из следующих утверждений:*

(1) *G минимальная не $\mathscr{T}$-группа;*

(2) *$G = TO_{2'}(G)$, где T — силовская 2-подгруппа порядка 2 в G.*

Доказательство. Предположим, что G не является минимальной не $\mathscr{T}$-группой. Тогда существует максимальная подгруппа M в G, не являющаяся $\mathscr{T}$-группой. В силу наших предположений M должна иметь нечетный порядок и быть неабелевой. Более того, так как по теореме 3.3 группа G разрешима, M — холлова $2'$-подгруппа группы G. По лемме 2.8 имеем (2), что и требовалось. □

Теорема 3.6. *Пусть $G = TP$, где T — подгруппа порядка 2 и P — подгруппа порядка p^n (p — нечетное простое число). Предположим, что всякая собственная подгруппа четного порядка в G является разрешимой $\mathscr{T}$-группой. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

(a) *$G = T \times P$;*

(b) *P — нормальная абелева подгруппа группы G.*

Доказательство. Так как $T \cong Z_2$ действует на P и на $\overline{P} = P/\Phi(P)$, по лемме Фиттинга (см. [24, теорема 5.2.3]) имеем $\overline{P} = [\overline{P}, T] \times C_{\overline{P}}(T)$, где T обращает $[\overline{P}, T]$ и $C_{\overline{P}}(T) = \overline{C_P(T)}$. Тогда (в предположении, что T действует на P нетривиальным образом) существует T-стабильная максимальная подгруппа M в P, содержащая $C_P(T)$. Применяя индукцию к TM, получаем, что либо $TM = T \times M$, либо M абелева (причем T действует нетривиально на M). В первом случае $M = C_P(T)$ и $P = [P, T] \times M$; противоречие с леммой 2.6. Во втором случае, применяя разложение Фиттинга к M и лемму 2.6, заключаем, что $C_M(T) = 1$. Отсюда $C_P(T) = 1$, т. е. T действует на P без неподвижных точек, поэтому группа P абелева по лемме Бернсайда (лемма 2.5). Теорема 3.6 доказана. □

Теорема 3.7. *Пусть $G = TM$ не $\mathscr{T}$-группа четного порядка, $M = PQ$, где T — подгруппа порядка 2 и P, Q — силовская p-подгруппа и силовская q-подгруппа группы G соответственно. Предположим, что всякая собственная подгруппа четного порядка в G — разрешимая $\mathscr{T}$-группа. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *G минимальная не $\mathscr{T}$-группа;*

(2) *M минимальная не $\mathscr{T}$-группа и $G = T \times M$;*

(3) *M минимальная не $\mathscr{T}$-группа и (3-1) P — циклическая p-подгруппа такая, что $[T, P] = 1$; (3-2) Q — нормальная абелева подгруппа группы G и $C_Q(T) = 1$.*

Доказательство. Так как T — силовская 2-подгруппа порядка 2 в G, то G 2-нильпотентна, так что M нормальна в G. Поскольку G разрешима, можно выбрать T, P, Q в качестве системы Силова. Сначала рассмотрим случай $C_M(T) = 1$. В этом случае T, будучи автоморфизмом порядка 2 группы M, не имеет неподвижной точки. По лемме 2.5 группа M абелева, поэтому M — $\mathscr{T}$-подгруппа. Следовательно, все максимальные подгруппы группы G являются $\mathscr{T}$-подгруппами. Стало быть, G минимальная не $\mathscr{T}$-группа. Таким образом, из $C_M(T) \neq 1$ следует заключение (1).

Предположим, что $C_M(T) \neq 1$. Если p делит $|C_M(T)|$, то $C_P(T) = P$ в силу леммы 2.6. Если q тоже делитель $|C_M(T)|$, то $G = T \times M$. Таким образом, для всякой собственной подгруппы H в M группа TH является собственной подгруппой четного порядка в G и потому $\mathscr{T}$-подгруппой, откуда следует, что M минимальная не $\mathscr{T}$-группа, откуда вытекает (2).

Не умаляя общности, предположим, что $C_P(T) = P$ и $C_Q(T) = 1$. В силу леммы 2.5 группа Q абелева. Утверждается, что Q нормальна в G. Так как TQ — собственная подгруппа четного порядка, TQ — $\mathscr{T}$-группа по предположению. Группа TP нормализует T. По лемме 2.7 $T^G = T[N]$ является фробениусовой группой с фробениусовым ядром N, $N \cap (TP) \leq N \cap N_G(T) = 1$, и, значит, N — q-подгруппа. Поэтому $N \leq Q$. Если $N < Q$, то согласно аргументу Фраттини $G = N_G(T)N$; тем самым, q делит $|N_G(T)|$. Поскольку T имеет порядок 2, $C_G(T) = N_G(T)$. Следовательно, $C_Q(T) \neq 1$; противоречие. Поэтому $N = Q$. В частности, Q — нормальная подгруппа в G.

Утверждается, что группа P циклическая. Предположим, что P нециклическая. Тогда P содержит не меньше двух различных максимальных подгрупп P_1 и P_2. Имеем две собственные подгруппы $H_i = TP_iQ$, $i = 1, 2$. По предположению H_1 и H_2 — $\mathscr{T}$-группы, поэтому все подгруппы группы Q, порядок которых есть степень простого числа, нормальны в H_i для $i = 1, 2$ и потому нормальны в G. Далее, для каждой собственной подгруппы X в P имеем собственную подгруппу TXQ в G. Тогда TXQ — $\mathscr{T}$-группа. Так как $G = (TXQ)P$ и $X \trianglelefteq P$, из леммы 2.3 следует, что X — сильно замкнутая подгруппа в G. Наконец, T и P тоже являются сильно замкнутыми подгруппами группы G. Следовательно, G — $\mathscr{T}$-группа; противоречие.

Наконец, покажем, что $M = PQ$ минимальная не $\mathscr{T}$-группа. В самом деле, для каждой максимальной подгруппы K в M если $|M : K|$ — степень p, то $Q \leq K$, поэтому $K \trianglelefteq G$. Если $|M : K|$ — степень q, то, так как TQ по предположению является $\mathscr{T}$-группой, T нормализует K. Таким образом, TK — собственная подгруппа четного порядка в G и является $\mathscr{T}$-группой по предположению. Следовательно, K — $\mathscr{T}$-группа, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Благодарности

Авторы благодарят рецензента за ценные предложения и полезные комментарии, а также исправление неточностей в леммах 2.1–2.4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aschbacher M.* Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
2. *Doerk K., Hawkes T. O.* Finite soluble groups. Berlin: de Gruyter, 1992.
3. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1968.
4. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. New York: Springer-Verl., 1982.
5. *Goldschmidt D.* Strongly closed 2-subgroups of finite groups // Proc. Conf. on finite groups. Univ. Utah, Park City, Utah, 1975. P. 109–110.
6. *Goldschmidt D.* 2-Fusion in finite groups // Ann. Math. 1974. V. 99. P. 70–117.
7. *Goldschmidt D.* Strongly closed 2-subgroups of finite groups // Ann. Math. 1975. V. 102. P. 475–489.
8. *Flores R. J., Foote R. M.* Strongly closed subgroups of finite groups // Adv. Math. 2009. V. 222. P. 453–484.
9. *Robinson D. J. S.* A note on finite groups in which normality is transitive // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. V. 19. P. 933–937.
10. *Robinson D. J. S.* Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1964. V. 60. P. 21–38.
11. *Robinson D. J. S.* Groups which are minimal with respect to normality being transitive // Pac. J. Math. 1969. V. 31. P. 777–785.
12. *Bianchi M., Mauri A. G. B., Herzog M., Verardi L.* On finite solvable groups in which normality is a transitive relation // J. Group Theory. 2000. V. 3. P. 147–156.
13. *Asaad M.* On p-nilpotence and supersolvability of finite groups // Commun. Algebra. 2006. V. 34. P. 189–195.
14. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.* Products of finite groups. Berlin: De Gruyter, 2010.

15. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R.* On finite $\mathscr{T}$-groups // J. Aust. Math. Soc. 2003. V. 75. P. 181–191.
16. *Beidleman J. C., Heineken H.* Finite minimal non-$\mathscr{T}_1$-groups // J. Algebra. 2008. V. 319. P. 1685–1695.
17. *Csörgo P., Herzog M.* On supersolvable groups and the nilpotator // Commun. Algebra. 2004. V. 32, N 2. P. 609–620.
18. *Ramadan M.* The influence of certain Abelian subgroups on the structure of finite groups // Algebra Colloq. 2008. V. 3. P. 479–484.
19. *Guo X. Y., Wei X. B.* The influence of $\mathscr{H}$-subgroups on the structure of finite groups // J. Group Theory. 2009. V. 13. P. 267–276.
20. *Shen Z. C., Li S. R.* Finite groups with $\mathscr{H}$-subgroups or strongly colsed subgroups // J. Group Theory. 2012. V. 15. P. 85–100.
21. *Shen Z. C., Du N.* Finite groups with $\mathscr{H}$-subgroups // Algebra Colloq. 2013. V. 20, N 3. P. 421–426.
22. *Shen Z. C., Shi W. J.* Finite groups with some pronormal subgroups // Acta Math. Sin. 2011. V. 27. P. 715–724.
23. *Shen Z. C., Liu W., Kong X. H.* Finite groups with self-conjugate-permutable subgroups // Commun. Algebra. 2012. V. 38. P. 1715–1724.
24. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Chelsea Publ. Comp., 1968.
25. *Li S. R.* On minimal non-PE-groups // J. Pure Appl. Algebra. 1998. V. 132. P. 149–158.
26. *Li Y. M.* Finite groups with NE-subgroups // J. Group Theory. 2006. V. 9. P. 49–58.
27. *Thompson J. G.* Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. I // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V. 74. P. 383–437.

Статья поступила 2 июня 2013 г.

Zhencai Shen (Шэнь Чженцай)
Department of Mathematics of College of Science, China Agricultural University,
Beijing 100083, China
`zhencai688@sina.com`

Wujie Shi (Ши Уцзе) — corresponding author
Department of Mathematics, Chongqing University of Arts and Sciences,
Chongqing 402160, China
`shiwujie@gmail.com`

Rulin Shen (Шэнь Жулинь)
Department of Mathematics, Central China Normal University,
Wuhan 430079, China
`rulinshen@gmail.com`