Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 512.542

OD–ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ВСЕХ КОНЕЧНЫХ НЕАБЕЛЕВЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ПОРЯДКОВ, ПРОСТЫЕ ДЕЛИТЕЛИ КОТОРЫХ НЕ ПРЕВОСХОДЯТ 13

П. Носратпур, М. Р. Дарафшех

Аннотация. Для всякой конечной неабелевой простой группы M порядка, простые делители которого не превосходят 13, найдено число классов изоморфных конечных групп тех же порядка и модели степеней, что и M. Полученный результат является аналогом результата А. В. Васильева [1] о распознаваемости таких простых групп по спектру. В силу известного результата мы должны рассмотреть только группы $L_6(3)$, $U_4(5)$, $G_2(4)$, $L_5(3)$, $S_4(8)$, $U_6(2)$ и $O_8^+(3)$.

Ключевые слова: конечная простая группа, OD-характеризация, группа лиева типа.

1. Введение

Пусть G — конечная группа. Символом $\pi(G)$ обозначим множество всех простых делителей порядка группы G. Граф простых чисел $\Gamma(G)$ конечной группы G — это простой граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда в G имеется элемент порядка pq. В данной статье рассмотрены конечные неабелевы простые группы G со свойством $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Множество всех таких групп обозначается символом $\mathfrak{S}_{13}$. Используя классификацию конечных простых групп, нетрудно получить полный список из $\mathfrak{S}_{13}$. Согласно [2] имеется 55 таких групп, которые перечислены в табл. 1.

Определение 1.1. Пусть G — конечная группа и $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Для $p \in \pi(G)$ пусть $\deg(p) = |\{q \in \pi(G) \mid p \sim q\}|$ есть степень вершины p в графе $\Gamma(G)$. Положим $D(G) = (\deg(p_1), \deg(p_2), \dots, \deg(p_k))$, где $p_1 < p_2 < \dots < p_k$; $D(G)$ называется *моделью степеней группы* G.

Для конечной группы G обозначим символом $h_{\mathrm{OD}}(G)$ число классов изоморфных конечных групп S таких, что $|G| = |S|$ и $D(G) = D(S)$. В терминах функции h_{OD} группы G классифицируются следующим образом.

Определение 1.2. Группа G называется *k-кратно* OD-*характеризуемой*, если существуют в точности k неизоморфных групп S таких, что $|G| = |S|$ и $D(G) = D(S)$. Однократно OD-характеризуемая группа называется просто OD-*характеризуемой*.

Основной целью данной статьи является нахождение $h_{\mathrm{OD}}(G)$ для всех элементов $\mathfrak{S}_{13}$. Но в силу табл. 2 достаточно рассмотреть только группы $L_6(3)$, $U_4(5)$, $G_2(4)$, $L_5(3)$, $S_4(8)$, $U_6(2)$ и $O_8^+(3)$.

Таблица 1. Неабелевы простые группы порядков,
простые делители которых не превосходят 13

P	$\|P\|$	$\|\mathrm{Out}(P)\|$	P	$\|P\|$	$\|\mathrm{Out}(P)\|$
A_5	$2^2\cdot3\cdot5$	2	$S_6(2)$	$2^9\cdot3^4\cdot5\cdot7$	1
A_6	$2^3\cdot3^2\cdot5$	4	$O_8^+(2)$	$2^{12}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7$	6
$U_4(2)$	$2^6\cdot3^4\cdot5$	2	$L_2(11)$	$2^2\cdot3\cdot5\cdot11$	2
$L_2(7)$	$2^3\cdot3\cdot7$	2	M_{11}	$2^4\cdot3^2\cdot5\cdot11$	1
$L_2(8)$	$2^3\cdot3^2\cdot7$	3	M_{12}	$2^6\cdot3^3\cdot5\cdot11$	2
$U_3(3)$	$2^5\cdot3^3\cdot7$	2	$U_5(2)$	$2^{10}\cdot3^5\cdot5\cdot11$	2
A_7	$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$	2	M_{22}	$2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11$	2
$L_2(49)$	$2^4\cdot3\cdot5^2\cdot7^2$	4	A_{11}	$2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7\cdot11$	2
$U_3(5)$	$2^4\cdot3^2\cdot5^3\cdot7$	6	M^cL	$2^6\cdot3^6\cdot5^3\cdot7\cdot11$	2
$L_3(4)$	$2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7$	12	HS	$2^9\cdot3^2\cdot5^3\cdot7\cdot11$	2
A_8	$2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7$	2	A_{12}	$2^9\cdot3^5\cdot5^2\cdot7\cdot11$	2
A_9	$2^6\cdot3^4\cdot5\cdot7$	2	$U_6(2)$	$2^{15}\cdot3^6\cdot5\cdot7\cdot11$	6
J_2	$2^7\cdot3^3\cdot5^2\cdot7$	2	$L_3(3)$	$2^4\cdot3^3\cdot13$	2
A_{10}	$2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$	2	$L_2(25)$	$2^3\cdot3\cdot5^2\cdot13$	4
$U_4(3)$	$2^7\cdot3^6\cdot5\cdot7$	8	$U_3(4)$	$2^6\cdot3\cdot5^2\cdot13$	4
$S_4(7)$	$2^8\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^4$	2	$S_4(5)$	$2^6\cdot3^2\cdot5^4\cdot13$	2

P	$\|P\|$	$\|\mathrm{Out}(P)\|$	P	$\|P\|$	$\|\mathrm{Out}(P)\|$
$L_4(3)$	$2^7\cdot3^6\cdot5\cdot13$	4	$S_6(3)$	$2^9\cdot3^9\cdot5\cdot7\cdot13$	2
${}^2F_4(2)'$	$2^{11}\cdot3^3\cdot5^2\cdot13$	2	$O_7(3)$	$2^9\cdot3^9\cdot5\cdot7\cdot13$	2
$L_2(13)$	$2^2\cdot3\cdot7\cdot13$	2	$U_4(5)$	$2^7\cdot3^4\cdot5^6\cdot7\cdot13$	4
$L_2(27)$	$2^2\cdot3^3\cdot7\cdot13$	6	A_{14}	$2^{10}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7^2\cdot11\cdot13$	2
$L_2(64)$	$2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot13$	6	$L_5(3)$	$2^9\cdot3^{10}\cdot5\cdot11^2\cdot13$	2
$Sz(8)$	$2^6\cdot5\cdot7\cdot13$	3	Suz	$2^{13}\cdot3^7\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13$	2
$G_2(3)$	$2^6\cdot3^6\cdot7\cdot13$	2	A_{15}	$2^{10}\cdot3^6\cdot5^3\cdot7^2\cdot11\cdot13$	2
$L_3(9)$	$2^7\cdot3^6\cdot5\cdot7\cdot13$	4	$O_8^+(3)$	$2^{12}\cdot3^{12}\cdot5^2\cdot7\cdot13$	24
${}^3D_4(2)$	$2^{12}\cdot3^4\cdot7^2\cdot13$	3	A_{16}	$2^{14}\cdot3^6\cdot5^3\cdot7^2\cdot11\cdot13$	2
$G_2(4)$	$2^{12}\cdot3^3\cdot5^2\cdot7\cdot13$	2	Fi_{22}	$2^{17}\cdot3^9\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13$	2
$S_4(8)$	$2^{12}\cdot3^4\cdot5\cdot7^2\cdot13$	6	$L_6(3)$	$2^{11}\cdot3^{15}\cdot5\cdot7\cdot11^2\cdot13^2$	4
A_{13}	$2^9\cdot3^5\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13$	2			

2. Предварительные сведения

Для произвольной группы G пусть $\omega(G)$ — множество порядков элементов группы G, где каждый возможный порядок встречается в $\omega(G)$ один раз независимо от того, сколько элементов этого порядка имеется в G. Это множество замкнуто и частично упорядочено делимостью, поскольку оно однозначно определяется своими максимальными элементами. Множество максимальных элементов в $\omega(G)$ обозначается символом $\mu(G)$. Число связных компонент в $\Gamma(G)$ обозначается через $t(G)$. Пусть $\pi_i = \pi_i(G)$, $1 \le i \le t(G)$, — i-е связные компоненты графа $\Gamma(G)$. Для группы четного порядка полагаем $2 \in \pi_1(G)$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей натурального числа n. Тогда $|G|$

можно представить в виде произведения $m_1, m_2, \dots, m_{t(G)}$, где m_i — положительные целые числа со свойством $\pi(m_i) = \pi_i$. Эти числа называются *порядковыми компонентами группы* G. Будем писать $OC(G) = \{m_1, m_2, \dots, m_{t(G)}\}$ и называть $OC(G)$ *множеством порядковых компонент группы* G. Множество компонент графа простых чисел группы G обозначается символом $T(G) = \{\pi_i(G) \mid i = 1, 2, \dots, t(G)\}$.

В табл. 2 выписаны конечные простые группы, про которые в настоящее время известно, что они OD-характеризуемы или двукратно OD-характеризуемы.

Таблица 2. k-Кратно OD-характеризуемые группы, $k = 1, 2$

M	Условия на M	$h_{OD}(M)$	Ссылки
A_n	$n = p, p+1, p+2$ (p простое)	1	[3, 4]
	$n = p+3$, $p \in \pi(100!) - \{7\}$	1	[5–8]
	$n = 10$	2	[9]
$L_2(q)$	$q \neq 2, 3$	1	[3, 4, 10, 11]
$L_3(q)$	$\left\|\pi\left(\frac{q^2+q+1}{d}\right)\right\| = 1$, $d = (3, q-1)$	1	[3]
$U_3(q)$	$\left\|\pi\left(\frac{q^2-q+1}{d}\right)\right\| = 1$, $d = (3, q+1)$, $q > 5$	1	[3]
$L_4(q)$	$q = 5, 7$	1	[12]
$L_3(9)$		1	[13]
$U_3(5)$		1	[14]
$U_4(7)$		1	[12]
$L_n(2)$	$n = p$ или $p+1$, где $2^p - 1$ простое	1	[12]
$R(q)$	$\|\pi(q \pm \sqrt{3q} + 1)\| = 1$, $q = 3^{2m+1}$, $m \geq 1$	1	[3]
$Sz(q)$	$q = 2^{2n+1} \geq 8$	1	[3, 4]
$B_3(3) \cong O_7(3)$		2	[3]
$C_3(3) \cong S_6(3)$		2	[3]
M	Спорадическая простая группа	1	[3]
M	$\|\pi(M)\| = 4$, $M \neq A_{10}$	1	[15]
M	$\|M\| \leq 10^8$, $M \neq A_{10}$, $U_4(2)$	1	[16]
$C_r(3)$, $B_r(3)$	r нечетное простое, $\left\|\pi\left(\frac{3^r-1}{2}\right)\right\| = 1$	2	[17]
$C_n(q)$, $B_n(q)$	$n = 2^m \geq 4$, q нечетное, $\left\|\pi\left(\frac{q^n+1}{2}\right)\right\| = 1$	2	[17]
$C_2(q) \cong B_2(q)$	q нечетное, $q \neq 3$, $\|\pi(q^2+1)\| = 1$	1	[17]
$C_n(q)$,$B_n(q)$	$n = 2^m \geq 2$, q четное, $(n, q) \neq (2, 2)$, $\|\pi(q^n+1)\| = 1$	1	[17]

3. Элементарные результаты

Лемма 3.1 [18]. *Пусть G — конечная группа и $|\pi(G)| \geq 3$. Если существуют простые числа $r, s, t \in \pi(G)$ такие, что $\{tr, ts, rs\} \cap \omega(G) = \varnothing$, то G неразрешима.*

Определение 3.1. Группа G называется 2-*фробениусовой*, если существует нормальный ряд $1 \lhd H \lhd K \lhd G$ такой, что K и $\frac{G}{H}$ — фробениусовы группы с ядрами H и $\frac{K}{H}$ соответственно.

Лемма 3.2 [19]. *Пусть G — 2-фробениусова группа четного порядка, имеющая нормальный ряд $1 \lhd H \lhd K \lhd G$ такой, что K и $\frac{G}{H}$ — фробениусовы группы с ядрами H и $\frac{K}{H}$ соответственно. Тогда*

(a) $t(G) = 2$ *и* $T(G) = \left\{\pi_1(G) = \pi(H) \cup \pi\left(\frac{G}{K}\right),\ \pi_2(G) = \pi\left(\frac{K}{H}\right)\right\}$;

(b) $\frac{G}{K}$ *и* $\frac{K}{H}$ *— циклические группы,* $\left|\frac{G}{K}\right| \mid \left|\operatorname{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)\right|$ *и* $\left(\left|\frac{G}{K}\right|, \left|\frac{K}{H}\right|\right) = 1$;

(c) H *— нильпотентная группа и* G *— разрешимая группа.*

Следующие леммы полезны при работе с фробениусовыми группами.

Лемма 3.3 [20, 21]. *Пусть G — фробениусова группа с дополнением H и ядром K. Справедливы следующие утверждения.*

(a) K *— нильпотентная группа.*

(b) $|K| \equiv 1(\operatorname{mod} |H|)$.

(c) *Всякая подгруппа группы H порядка pq, где p, q — (не обязательно различные) простые числа, циклическая. В частности, всякая силовская подгруппа нечетного порядка в H циклическая, и силовская 2-подгруппа в H либо циклическая, либо является обобщенной группой кватернионов. Если H — неразрешимая группа, то в H имеется подгруппа индекса не больше 2, изоморфная $Z \times SL(2,5)$, где Z имеет циклические силовские подгруппы и $\pi(Z) \cap \{2,3,5\} = \varnothing$. В частности, $15, 20 \notin \omega(H)$. Если H разрешима и $O(H) = 1$, то либо H — 2-группа, либо H имеет подгруппу индекса не больше 2, изоморфную $SL(2,3)$.*

Лемма 3.4 [19]. *Пусть G — фробениусова группа четного порядка, где H и K — фробениусово дополнение и фробениусово ядро группы G соответственно. Тогда $t(G) = 2$ и $T(G) = \{\pi(H), \pi(K)\}$.*

Строение конечной группы с несвязным графом простых чисел описывается следующей леммой.

Лемма 3.5 [22, 23]. *Пусть G — конечная группа и $t(G) \geq 2$. Тогда G является одной из следующих групп:*

(a) G *— фробениусова или 2-фробениусова группа;*

(b) *G имеет нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \lhd K \trianglelefteq G$ такой, что H и $\frac{G}{K}$ — π_1-группы и $\frac{K}{H}$ — неабелева простая группа, где π_1 — компонента графа простых чисел, содержащая 2, H — нильпотентная группа и $\left|\frac{G}{H}\right| \mid \left|\operatorname{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)\right|$. Кроме того, всякая компонента нечетного порядка G также является компонентой нечетного порядка в $\frac{K}{H}$.*

Следующая лемма заимствована из [24].

Лемма 3.6. *Пусть $S = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_r$, где P_i — изоморфные неабелевы простые группы. Тогда $\operatorname{Aut}(S) \cong (\operatorname{Aut}(P_1) \times \operatorname{Aut}(P_2) \times \cdots \times \operatorname{Aut}(P_r)) \cdot S_r$.*

Используя результаты, собранные в табл. 1, получаем следующую лемму.

Лемма 3.7. *Если $S \in \mathfrak{S}_{13}$ и $S \ncong Sz(8)$, то $\{2,3\} \subseteq \pi(S)$, а если $\operatorname{Out}(S) \neq 1$, то $\pi(\operatorname{Out}(S)) \subseteq \{2,3\}$.*

4. Основные результаты

В этом разделе мы рассмотрим OD-характеризуемость простых групп $L_6(3)$, $U_4(5)$, $G_2(4)$, $L_5(3)$, $S_4(8)$, $U_6(2)$ и $O_8^+(3)$.

Согласно [25] имеем $\mu(L_6(3))=\{36, 78, 80, 104, 120, 121, 182\}$, откуда выводим, что $D(L_6(3)) = (4, 3, 2, 2, 0, 3)$.

Теорема 4.1. *Пусть G — конечная группа такая, что $D(G) = D(L_6(3)) = (4,3,2,2,0,3)$ и $|G| = |L_6(3)|$. Тогда $G \cong L_6(3)$.*

Доказательство. Имеем $|L_6(3)| = 2^{11} \cdot 3^{15} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13^2$. Учитывая, что $D(G) = (4,3,2,2,0,3)$, рассмотрим различные возможности для множества ребер графа $\Gamma(G)$ и получим следующие случаи для $\Gamma(G)$: $\{2 \sim 3, 2 \sim 5, 2 \sim 7, 2 \sim 13, 3 \sim 5, 3 \sim 13, 7 \sim 13; 11\}$ или $\{2 \sim 3, 2 \sim 5, 2 \sim 7, 2 \sim 13, 3 \sim 7, 3 \sim 13, 5 \sim 13; 11\}$.

Случай (1). Если $\Gamma(G) = \{2 \sim 3, 2 \sim 5, 2 \sim 7, 2 \sim 13, 3 \sim 5, 3 \sim 13, 7 \sim 13; 11\}$, то $\{11{\cdot}7, 11{\cdot}5, 7{\cdot}5\} \cap \omega(G) = \varnothing$, Поэтому в силу леммы 3.1 G неразрешима, откуда следует, что G не является 2-фробениусовой группой по лемме 3.2(c).

Предположим, что G — неразрешимая фробениусова группа с фробениусовым дополнением H и фробениусовым ядром K соответственно. Используя обозначения леммы 3.3(c), получаем $13 \in \pi(Z)$, откуда следует, что в H_0 имеется элемент порядка $13 \cdot 5$; противоречие. Значит, G не является ни фробениусовой, ни 2-фробениусовой группой.

В силу леммы 3.5(b) G имеет нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \triangleleft K \trianglelefteq G$ такой, что H — нильпотентная π_1-группа, $\frac{K}{H}$ — неабелева простая группа и $\frac{G}{K}$ — разрешимая π_1-группа. Поэтому $\frac{K}{H} \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Так как $11 \notin \pi_1(G)$, имеем $11 \in \pi\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $\frac{K}{H} \in \mathfrak{S}_{13}$ и $11 \mid \left|\frac{K}{H}\right|$. В силу табл. 1 группа $\frac{K}{H}$ изоморфна $L_6(3)$, $L_5(3)$, $U_5(2)$, $L_2(11)$, M_{11}, M_{12} или M_{22}.

Если $\frac{K}{H} \cong M_{11}$, то $M_{11} \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}(M_{11})$, так как $\frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2^7 \cdot 3^{13} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2$. Поскольку H нильпотентна, $13 \sim 11$ в $\Gamma(G)$; противоречие.

Аналогично можно показать, что $\frac{K}{H} \ncong U_5(2), L_2(11), M_{12}, M_{22}$.

Если $\frac{K}{H} \cong L_5(3)$, то $L_5(3) \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}(L_5(3)$, так как $\frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 13$ или $|H| = 2 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 13$. Пусть $H_7 \in \mathrm{Syl}_7(H)$ и $G_{11} \in \mathrm{Syl}_{11}(G)$. Тогда H_7 char $H \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности H, откуда $H_7 \trianglelefteq G$. Таким образом, $A = H_7 \cdot G_{11}$ является подгруппой в G. Имеем $H_7 \trianglelefteq A$, и по теореме Силова $G_{11} \trianglelefteq A$, откуда $A = H_7 \times G_{11}$, что дает $7 \sim 11$; противоречие. Поэтому $\frac{K}{H} \cong L_6(3)$ и тогда из $|G| = |L_6(3)|$ следует, что $|H| = 1$. Значит, $G \cong L_6(3)$.

Случай (2). $\Gamma(G) = \{2 \sim 3, 2 \sim 5, 2 \sim 7, 2 \sim 13, 3 \sim 7, 3 \sim 13, 5 \sim 13; 11\}$, тогда $\{11 \cdot 7, 11 \cdot 5, 7 \cdot 5\} \cap \omega(G) = \varnothing$. Поэтому в силу леммы 3.1 G неразрешима, откуда вытекает, что G не является 2-фробениусовой группой по лемме 3.2(c).

Пусть G — неразрешимая фробениусова группа с фробениусовым дополнением H и фробениусовым ядром K. Используя те же обозначения, что в лемме 3.3(c), получаем $13 \in \pi(Z)$, и потому в H_0 имеется элемент порядка $13 \cdot 7$; противоречие. Значит, G не является ни фробениусовой, ни 2-фробениусовой группой.

В силу леммы 3.5(b) G имеет нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \triangleleft K \trianglelefteq G$ такой, что H — нильпотентная π_1-группа, $\frac{K}{H}$ — неабелева простая группа и $\frac{G}{K}$ — разрешимая π_1-группа. Следовательно, $\frac{K}{H} \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Так как $11 \notin \pi_1(G)$, имеем $11 \in \pi\left(\frac{K}{H}\right)$. Поэтому $\frac{K}{H} \in \mathfrak{S}_{13}$ и $11 \mid \left|\frac{K}{H}\right|$. Из табл. 1 получаем, что $\frac{K}{H}$ изоморфна $L_6(3)$, $L_5(3)$, $U_5(2)$, $L_2(11)$, M_{11}, M_{12} или M_{22}. Если $\frac{K}{H} \cong M_{11}$, то $M_{11} \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}(M_{11})$, так как $\frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2^7 \cdot 3^{13} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2$. В силу нильпотентности H имеем $13 \sim 11$ в $\Gamma(G)$; противоречие.

Аналогично доказывается, что $\frac{K}{H} \ncong U_5(2), L_2(11), M_{12}, M_{22}$.

Если $\frac{K}{H} \cong L_5(3)$, то $L_5(3) \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}(L_5(3))$, так как $\frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 13$ или $|H| = 2 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 13$. В силу нильпотентности H $13 \sim 7$ в $\Gamma(G)$; противоречие.

Поэтому $\frac{K}{H} \cong L_6(3)$, тогда из $|G| = |L_6(3)|$ следует, что $|H| = 1$. Значит, $G \cong L_6(3)$. Получаем противоречие, так как $\Gamma(G) \neq \Gamma(L_6(3))$. Тем самым вторая возможность приводит к противоречию, откуда следует, что группа $L_6(3)$ OD-характеризуема. □

Согласно [1] имеем $\mu(U_4(5)) = \{63, 60, 52, 24\}$, так что $D(U_4(5)) = (3, 3, 2, 1, 1)$.

Теорема 4.2. *Пусть G — конечная группа такая, что $D(G) = D(U_4(5)) = (3, 3, 2, 1, 1)$ и $|G| = |U_4(5)|$. Тогда $G \cong U_4(5)$.*

Доказательство. Имеем $|U_4(5)| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 13$ и $D(U_4(5)) = (3, 3, 2, 1, 1)$. Так как $D(G) = D(U_4(5)) = (3, 3, 2, 1, 1)$ и $\Gamma(U_4(5))$ — связный граф, легко видеть, что $\Gamma(G) = \Gamma(U_4(5))$ и $\{2, 3, 5, 7, 13, 6, 10, 26, 15, 21\} \subseteq \omega(G)$. Поэтому $\{5, 7, 13\}$ — независимое множество в $\Gamma(G)$ и $\{2, 7\}$ — 2-независимое множество. Разобьем доказательство на серию лемм.

Лемма 4.1. *Пусть K — максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G. Тогда K — $\{2, 3\}$-группа. В частности, G неразрешима.*

Доказательство. Пусть p — простой делитель порядка группы K и K_p — силовская p-подгруппа в K. Так как $K \trianglelefteq G$, в силу аргумента Фраттини имеем $G = KN_G(K_p)$. Далее рассмотрим несколько случаев.

Случай (1): $p = 13$. В этом случае K_{13} — циклическая групп порядка 13, поэтому $\overline{N} = \frac{N_G(K_{13})}{C_G(K_{13})} \leq \mathrm{Aut}(K_{13}) \cong Z_{12}$. Следовательно, $|\overline{N}|$ — делитель числа 12. Но $\deg(13) = 1$ в $\Gamma(G)$ и 13 соединяется только с 2, а значит, $C_G(K_{13})$ — $\{2, 13\}$-группа. Тем самым $N_G(K_{13})$ — $\{2, 3, 13\}$-группа; тогда $\{5, 7, 13\} \subseteq \pi(K)$ и из $G = KN_G(K_{13})$ получаем, что $7 \mid |K|$. Так как группа K предполагается разрешимой, можно рассмотреть $\{7, 13\}$-холлову подгруппу в K, которая имеет порядок $7 \cdot 13$ и должна быть циклической. Из этого вытекает, что $7 \sim 13$; противоречие.

Случай (2): $p \in \{5, 7\}$, $K_p \in \mathrm{Syl}_p(K)$. Снова используя аргумент Фраттини, получаем, что $G = KN_G(K_p)$ и $13 \mid |N_G(K_p)|$. Пусть L — подгруппа порядка 13 группы $N_G(K_p)$. Поскольку L нормализует K_p, группа G содержит подгруппу порядка $13 \cdot p$ и это приводит к противоречию так же, как и выше, потому что $p \nmid (13 - 1)$.

Случай (3): K — $\{2, 3\}$-группа. Кроме того, так как $K \neq G$, то G неразрешима. Это завершает доказательство. □

Лемма 4.2. *Фактор-группа $\frac{G}{K}$ является почти простой группой. Более того, $S \leq \frac{G}{K} \leq \mathrm{Aut}(S)$, где $S \cong U_4(5)$.*

Доказательство. Пусть $H := \frac{G}{K}$, $S := \mathrm{Soc}(H)$, где $\mathrm{Soc}(H)$ означает цоколь группы H, т. е. подгруппу в H, порожденную множеством всех минимальных нормальных подгрупп в H. Тогда $S \cong P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_r$, где все P_i — неабелевы простые группы и $S \leq H \leq \mathrm{Aut}(S)$. Ниже покажем, что $r = 1$ и $P_1 \cong U_4(5)$.

Предположим, что $r \geq 2$. В этом случае легко видеть, что $13 \nmid |S|$, поскольку иначе порядок только одной группы P_i делится на 13. Предположим, что $13 \mid |P_1|$. Так как только $13 \sim 2$ выполняется в графе простых чисел группы G, то группа P_i, $i \geq 2$, должна быть 2-группой, что противоречит простоте группы P_i. Значит, $13 \nmid |S|$, и для каждого i имеем $P_i \in \mathfrak{S}_7$. С другой стороны, используя лемму 4.1, заметим, что $13 \in \pi(H) \subseteq \pi(\mathrm{Aut}(S))$. Таким образом, можно предполагать, что $13 \mid |\mathrm{Out}(S)|$, поскольку $|\mathrm{Aut}(S)| = |S||\mathrm{Out}(S)|$. Но $\mathrm{Out}(S) = \mathrm{Out}(S_1) \times \mathrm{Out}(S_2) \times \dots \times \mathrm{Out}(S_k)$, где группы S_j являются прямыми произведениями изоморфных групп P_i такими, что $S \cong S_1 \times S_2 \times \dots \times S_k$. Поэтому для некоторого j число 13 делит порядок группы внешних автоморфизмов прямого произведения S_j t изоморфных простых групп P_i. Так как $P_i \in \mathfrak{S}_7$, то $|\mathrm{Out}(P_i)|$ не делится на 13 (см табл. 1). По лемме 3.6 получаем, что $|\mathrm{Aut}(S_j)| = |\mathrm{Aut}(P_i)|^t \cdot t!$. Следовательно, $t \geq 13$, и потому число $(13!)_2 \times 2^{13} = 2^{23}$ должно делить порядок группы G; противоречие. Поэтому $r = 1$ и $S = P_1$.

Ввиду лемм 3.7 и 4.1 очевидно, что $|S| = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 13$, где $2 \leq a \leq 7$ и $1 \leq b \leq 4$. Используя результаты, собранные в табл. 1, получаем, что $S \cong U_4(5)$, и лемма доказана. □

Лемма 4.3. *Группа G изоморфна группе $U_4(5)$.*

Доказательство. По лемме 4.2 $U_4(5) \leq \frac{G}{K} \leq \mathrm{Aut}(U_4(5))$, откуда $\frac{G}{K} \cong U_4(5)$ или $U_4(5):2$, или $U_4(5):2^2$, поскольку $|\mathrm{Out}(U_4(5))| = 4$. В случае $\frac{G}{K} \cong U_4(5)$, рассматривая порядки, выводим, что $|K| = 1$ и $G \cong U_4(5)$, так как $|G| = |U_4(5)|$. В случае $\frac{G}{K} \cong U_4(5):2$, рассматривая порядки, получаем $2|K| = 1$, что невозможно. В последнем случае $4|K| = 1$, что также невозможно. □

Согласно [26] имеем $\mu(G_2(4)) = \{8, 10, 12, 13, 15, 21\}$, откуда выводим, что $D(G_2(4)) = (2, 3, 2, 1, 0)$.

Теорема 4.3. *Пусть G — конечная группа такая, что $D(G) = D(G_2(4)) = (2, 3, 2, 1, 0)$ и $|G| = |G_2(4)|$. Тогда $G \cong G_2(4)$.*

Доказательство. Имеем $|G_2(4)| = 2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$ и $D(G_2(4)) = (2, 3, 2, 1, 0)$. Также имеем $\Gamma(G) = \{2 \sim 3, 2 \sim 5, 3 \sim 5, 3 \sim 7; 13\}$; тогда $\{13 \cdot 5, 13 \cdot 7, 5 \cdot 7\} \cap \omega(G) = \varnothing$ и по лемме 3.1 G неразрешима, откуда следует, что G не является 2-фробениусовой группой в силу леммы 3.2(c).

Предположим, что G — неразрешимая фробениусова группа с фробениусовым дополнением H и фробениусовым ядром K. Используя те же обозначения, что в лемме 3.3(c), получаем, что $7 \in \pi(Z)$. Следовательно, в H_0 имеется элемент порядка $7 \cdot 5$; противоречие. Значит, G не является ни фробениусовой, ни 2-фробениусовой группой.

По лемме 3.5(b) G имеет нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \triangleleft K \trianglelefteq G$ такой, что H — нильпотентная π_1-группа, $\frac{K}{H}$ — неабелева простая группа и $\frac{G}{K}$ — разрешимая π_1-группа. Следовательно, $\frac{K}{H} \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Так как $13 \notin \pi_1(G)$, имеем $13 \in \pi\left(\frac{K}{H}\right)$. Поэтому $\frac{K}{H} \in \mathfrak{S}_{13}$ и $13 \mid \left|\frac{K}{H}\right|$. В силу табл. 1 и того факта, что $11 \nmid |G|$, получаем, что $\frac{K}{H}$ изоморфна $L_2(13)$, $L_2(25)$, $L_2(27)$, $Sz(8)$, $U_3(4)$, $L_2(64)$, ${}^2F_4(2)'$, $L_3(3)$ или $G_2(4)$.

Если $\frac{K}{H} \cong L_2(13)$, то $L_2(13) \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}(L_2(13))$, поскольку $\frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^2$ или $|H| = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Пусть $H_5 \in \mathrm{Syl}_5(H)$ и $G_{13} \in \mathrm{Syl}_{13}(G)$. Тогда H_5 char $H \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности группы H, откуда следует, что $H_5 \trianglelefteq G$. Таким образом, $A = H_5 \cdot G_{13}$ есть подгруппа в G. Имеем $H_5 \trianglelefteq A$, и по теореме Силова $G_{13} \trianglelefteq A$. Значит, $A = H_5 \times G_{13}$, что влечет $5 \sim 13$; противоречие.

Аналогично доказывается, что $\frac{K}{H} \ncong L_2(27)$, $L_3(3)$, $Sz(8)$ и $L_2(64)$.

Если $\frac{K}{H} \cong L_2(25)$, то $L_2(25) \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}(L_2(25))$, поскольку $\frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 7$ или $|H| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7$. В силу нильпотентности группы H будет $2 \sim 7$ в $\Gamma(G)$; противоречие.

Если $\frac{K}{H} \cong {}^2F_4(2)'$, то ${}^2F_4(2)' \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}({}^2F_4(2)')$, поскольку $\frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2 \cdot 7$ или $|H| = 7$. Пусть $H_7 \in \mathrm{Syl}_7(H)$ и $G_{13} \in \mathrm{Syl}_{13}(G)$. Тогда H_7 char $H \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности H, откуда следует, что $H_7 \trianglelefteq G$. Таким образом, $A = H_7 \cdot G_{13}$ — подгруппа в G. Имеем $H_7 \trianglelefteq A$, и по теореме Силова $G_{13} \trianglelefteq A$, а значит, $A = H_7 \times G_{13}$, что влечет $7 \sim 13$; противоречие.

Если $\frac{K}{H} \cong G_2(4)$, то из $|G| = |G_2(4)|$ вытекает, что $|H| = 1$. Поэтому $G \cong G_2(4)$. $\square$

Согласно [26] имеем $\mu(U_6(2)) = \{7, 8, 10, 11, 12, 15, 18\}$, откуда $D(U_6(2)) = (2, 2, 2, 0, 0)$.

Теорема 4.4. *Пусть G — конечная группа такая, что $D(G) = D(U_6(2)) = (2, 2, 2, 0, 0)$ и $|G| = |U_6(2)|$. Тогда $G \cong U_6(2)$.*

Доказательство. Имеем $|U_6(2)| = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ и $D(U_6(2)) = (2, 2, 2, 0, 0)$. Также $\Gamma(G) = \{2 \sim 3, 2 \sim 5, 3 \sim 5; 7; 11\}$; значит, $\{2 \cdot 7, 2 \cdot 11, 7 \cdot 11\} \cap \omega(G) = \varnothing$, Поэтому в силу леммы 3.1 группа G неразрешима.

Так как $t(G) = 3$, то G не является ни фробениусовой, ни 2-фробениусовой группой.

Ввиду леммы 3.5(b) G имеет нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \triangleleft K \trianglelefteq G$ такой, что H — нильпотентная π_1-группа, $\frac{K}{H}$ — неабелева простая группа и $\frac{G}{K}$ — разрешимая π_1-группа. Поэтому $\frac{K}{H} \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Поскольку $7, 11 \notin \pi_1(G)$, имеем $\{11, 7\} \in \pi\left(\frac{K}{H}\right)$. Тем самым $\frac{K}{H} \in \mathfrak{S}_{11}$ и $7, 11 \mid \left|\frac{K}{H}\right|$. Из табл. 1 получаем, что группа $\frac{K}{H}$ изоморфна M_{22} или $U_6(2)$.

Если $\frac{K}{H} \cong M_{22}$, то $M_{22} \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}(M_{22})$ с учетом того, что $\frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2^8 \cdot 3^4$ или $|H| = 2^7 \cdot 3^4$. Поэтому $\frac{G}{H} \cong M_{22}$ или $M_{22} \cdot 2$. Пусть $H_3 \in \mathrm{Syl}_3(H)$ и $G_{11} \in \mathrm{Syl}_{11}(G)$. Тогда H_3 char $H \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности H, откуда следует, что $H_3 \trianglelefteq G$. Таким образом, $A = H_3 \cdot G_{11}$ является подгруппой в G. Имеем $H_3 \trianglelefteq A$, и по теореме Силова $G_{11} \trianglelefteq A$, а значит, $A = H_3 \times G_{11}$, откуда следует, что $3 \sim 11$; противоречие.

Если $\frac{K}{H} \cong U_6(2)$, то $|G| = |U_6(2)|$ влечет $|H| = 1$. Из $\Gamma(G) = \Gamma(U_6(2))$ получаем, что $G \cong U_6(2)$. Значит, группа $U_6(2)$ OD-характеризуема. $\square$

Из [25] $\mu(L_5(3)) = \{16, 18, 24, 78, 80, 104, 121\}$, откуда $D(L_5(3)) = (3, 2, 2, 1, 0)$.

Теорема 4.5. *Пусть G — конечная группа такая, что $D(G) = D(L_5(3)) = (3, 2, 2, 1, 0)$ и $|G| = |L_5(3)|$. Тогда $G \cong L_5(3)$.*

Доказательство. Имеем $|L_5(3)| = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 13$ и $D(L_5(3)) = (3, 2, 2, 1, 0)$. Также $\Gamma(G) = \{2 \sim 3, 2 \sim 5, 2 \sim 13, 3 \sim 13; 11\}$. Тогда $\{13 \cdot 5, 13 \cdot 11, 5 \cdot 11\} \cap \omega(G) = \varnothing$, Поэтому в силу леммы 3.1 G неразрешима, откуда следует, что G не является 2-фробениусовой группой по лемме 3.2(c).

Предположим, что G — неразрешимая фробениусова группа с фробениусовым дополнением H и фробениусовым ядром K. Используя те же обозначения. что в лемме 3.3(c), получаем, что $13 \in \pi(Z)$, откуда следует, что в H_0 имеется элемент порядка $13 \cdot 5$; противоречие. Значит, G не является ни фробениусовой, ни 2-фробениусовой группой.

В силу леммы 3.5(b) G имеет нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \triangleleft K \trianglelefteq G$ такой, что H — нильпотентная π_1-группа, $\frac{K}{H}$ — неабелева простая группа и $\frac{G}{K}$ — разрешимая π_1-группа. Следовательно, $\frac{K}{H} \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Поскольку $11 \notin \pi_1(G)$, имеем $11 \in \pi\left(\frac{K}{H}\right)$. Поэтому $\frac{K}{H} \in \mathfrak{S}_{13}$ и $11 \mid \left|\frac{K}{H}\right|$. Из табл. 1 и того факта, что $7 \nmid |G|$, получаем, что группа $\frac{K}{H}$ изоморфна $L_2(11)$, $L_3(3)$, $L_5(3)$, $L_4(3)$, M_{11} или M_{12}.

Если $\frac{K}{H} \cong L_2(11)$, то $L_2(11) \le \frac{G}{H} \le \mathrm{Aut}(L_2(11))$, поскольку $\frac{G}{H} \le \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2^7 \cdot 3^9 \cdot 11 \cdot 13$ или $|H| = 2^6 \cdot 3^9 \cdot 11 \cdot 13$. В силу нильпотентности H имеем $13 \sim 11$ в $\Gamma(G)$; противоречие.

Аналогично доказывается, что $\frac{K}{H} \ncong M_{11}, M_{12}$.

Если $\frac{K}{H} \cong L_3(3)$, то $L_3(3) \le \frac{G}{H} \le \mathrm{Aut}(L_3(3))$, так как $\frac{G}{H} \le \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 11^2$ или $|H| = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 11^2$. В силу нильпотентности H имеем $5 \sim 11$ в $\Gamma(G)$; противоречие.

Если $\frac{K}{H} \cong L_4(3)$, то $L_4(3) \le \frac{G}{H} \le \mathrm{Aut}(L_4(3))$, поскольку $\frac{G}{H} \le \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11^2$ или $|H| = 3^4 \cdot 11^2$. Ввиду нильпотентности H будет $3 \sim 11$ в $\Gamma(G)$; противоречие.

Поэтому $\frac{K}{H} \cong L_5(3)$ и тогда из $|G| = |L_5(3)|$ вытекает, что $|H| = 1$. Значит, $G \cong L_5(3)$. Следовательно, группа $L_5(3)$ OD-характеризуема. $\square$

Согласно [26] имеем $\mu(O_8^+(3)) = \{8, 12, 13, 14, 15, 18, 20\}$, откуда $D(O_8^+(3)) = (3, 2, 2, 1, 0)$.

Теорема 4.6. *Пусть G — конечная группа такая, что $D(G) = D(O_8^+(3)) = (3, 2, 2, 1, 0)$ и $|G| = |O_8^+(3)|$. Тогда $G \cong O_8^+(3)$.*

Доказательство. Имеем $|O_8^+(3)| = 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$ и $D(O_8^+(3)) = (3, 2, 2, 1, 0)$. Кроме того, $\Gamma(G) = \{2 \sim 3, 2 \sim 5, 2 \sim 7, 3 \sim 5; 13\}$, тогда $\{13 \cdot 5, 13 \cdot 7, 5 \cdot 7\} \cap \omega(G) = \varnothing$. Поэтому по лемме 3.1 G неразрешима, откуда следует, что G не является 2-фробениусовой группой в силу леммы 3.2(c).

Предположим, что G — неразрешимая фробениусова группа с фробениусовым дополнением H и фробениусовым ядром K. Используя обозначения леммы 3.3(c), получаем, что $7 \in \pi(Z)$. Следовательно, в H_0 есть элемент порядка $7 \cdot 5$; противоречие. Значит, G не является ни фробениусовой, ни 2-фробениусовой группой.

В силу леммы 3.5(b) G имеет нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \triangleleft K \trianglelefteq G$ такой, что H — нильпотентная π_1-группа, $\frac{K}{H}$ — неабелева простая группа и $\frac{G}{K}$ — разрешимая π_1-группа. Поэтому $\frac{K}{H} \le \frac{G}{H} \le \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Поскольку $13 \notin \pi_1(G)$, имеем $13 \in \pi\left(\frac{K}{H}\right)$. Поэтому $\frac{K}{H} \in \mathfrak{S}_{13}$ и $13 \mid \left|\frac{K}{H}\right|$. Из табл. 1 и того факта, что $11 \notin \pi(G)$, получаем, что группа $\frac{K}{H}$ изоморфна $L_2(13)$, $L_2(25)$, $L_2(27)$, $Sz(8)$, $L_3(3)$, $U_3(4)$, $L_4(3)$, $L_2(64)$, ${}^2F_4(2)'$, $L_3(9)$, $G_2(3)$, $S_6(3)$, $O_8^+(3)$, $O_7(3)$ или $G_2(4)$.

Если $\frac{K}{H} \cong L_2(25)$, то $L_2(25) \le \frac{G}{H} \le \mathrm{Aut}(L_2(25))$, так как $\frac{G}{H} \le \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 7$, $|H| = 2^8 \cdot 3^{11} \cdot 7$ или $|H| = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 7$. В силу нильпотентности H, $3 \sim 7$ в $\Gamma(G)$; противоречие.

Аналогично доказывается, что $\frac{K}{H} \ncong L_3(3)$, $U_3(4)$, $L_4(3)$, ${}^2F_4(2)'$.

Если $\frac{K}{H} \cong G_2(3)$, то $G_2(3) \le \frac{G}{H} \le \mathrm{Aut}(G_2(3))$, поскольку $\frac{G}{H} \le \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^2$ или $|H| = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^2$. Поэтому $\frac{G}{H} \cong G_2(3)$ или $\frac{G}{H} \cong G_2(3) \cdot 2$, где $\pi(H) \subseteq \{2, 3, 5\}$. Пусть $H_5 \in \mathrm{Syl}_5(H)$ и $G_{13} \in \mathrm{Syl}_{13}(G)$. Тогда H_5 char $H \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности H, откуда следует, что $H_5 \trianglelefteq G$. Таким образом, $A = H_5 \cdot G_{13}$ есть подгруппа в G. Имеем $H_5 \trianglelefteq A$, и по теореме Силова $G_{13} \trianglelefteq A$, откуда $A = H_5 \times G_{13}$, что влечет $5 \sim 13$; противоречие.

Аналогично доказывается, что $\frac{K}{H} \ncong L_2(13)$, $L_2(27)$, $L_2(64)$, $L_3(9)$,$Sz(8)$ или $S_6(3)$.

Если $\frac{K}{H} \cong G_2(4)$, то $G_2(4) \le \frac{G}{H} \le \mathrm{Aut}(G_2(4))$, поскольку $\frac{G}{H} \le \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 3^9$. Поэтому $\frac{G}{H} \ncong G_2(4) \cdot 2$. Пусть $H_3 \in \mathrm{Syl}_3(H)$ и $G_7 \in \mathrm{Syl}_7(G)$. Тогда H_3 char $H \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности H, откуда следует, что $H_3 \trianglelefteq G$. С другой стороны, силовская 7-подгруппа группы G действует на

H_3 без неподвижных точек, потому что $3 \nsim 7$. Таким образом, должно быть $7 \mid (3^9 - 1)$; противоречие.

Наконец, $\frac{K}{H} \cong O_8^+(3)$, и из $|G| = |O_8^+(3)|$ следует, что $|H| = 1$. Значит, $G \cong O_8^+(3)$. Поэтому группа $O_8^+(3)$ OD-характеризуема. $\square$

Согласно [9] $\mu(S_4(8)) = \{4, 18, 14, 63, 65\}$, откуда $D(S_4(8)) = (2, 2, 1, 2, 1)$.

Теорема 4.7. *Пусть G — конечная группа такая, что $D(G) = D(S_4(8)) = (2, 2, 1, 2, 1)$ и $|G| = |S_4(8)|$. Тогда $G \cong S_4(8)$.*

Доказательство. Имеем $|S_4(8)| = 2^{12}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7^2\cdot 13$ и $D(S_4(8)) = (2, 2, 1, 2, 1)$. Также имеем $\Gamma(G) = \{2 \sim 3, 2 \sim 7, 3 \sim 7; 5 \sim 13\}$. Таким образом, G имеет несвязный граф простых чисел такой, что $s(G) = 2$. Покажем, что G не является ни фробениусовой, ни 2-фробениусовой группой. Если G — фробениусова группа, то по лемме 3.4 $G = KC$ с фробениусовым ядром K и фробениусовым дополнением C со связными компонентами $\Gamma(K)$ и $\Gamma(C)$. $\Gamma(K)$ — граф с вершиной $\{5, 13\}$, а $\Gamma(C)$ — граф с вершинами $\{2, 3, 7\}$. В силу леммы 3.3(b) $|K| \mid (|C|-1)$. Так как $|K| = 5\cdot 13$ и $|C| = 2^{12}\cdot 3^4\cdot 7^2$, то $(5\cdot 13) \nmid (2^{10}\cdot 3^2\cdot 5^2-1)$; противоречие. Если G — 2-фробениусова группа, то существует нормальный ряд $1 \lhd H \lhd K \lhd G$ такой, что K и G/H — фробениусовы группы с ядрами H и K/H соответственно. По лемме 3.2(a) имеем $T(G) = \{\pi_1(G) = \pi(H) \cup \pi(G/K), \pi_2(G) = \pi(K/H)\}$. Поэтому $|K/H| = 5 \cdot 13$. Далее, по лемме 3.2(b) и лемме 3.6 имеем $G/K \leq \mathrm{Aut}(K/H) \cong (Z_{12} \times Z_4) \cdot 2!$, а значит, $|G/K| \mid 2^5 \cdot 3$, откуда следует, что $\{5, 7, 13\} \subseteq \pi(K)$. Отсюда $7 \in \pi(H)$. Пусть $H_7 \in \mathrm{Syl}_7(H)$ и $G_{13} \in \mathrm{Syl}_{13}(G)$. Тогда $H_7 \operatorname{char} H \trianglelefteq G$. В силу нильпотентности H получаем, что $H_7 \lhd G$ и H_7 действует на G_{13} без неподвижных точек, поскольку $7 \nsim 13$ в $\Gamma(G)$. Тем самым должно быть $|G_{13}| \mid (|H_7| - 1)$, т. е. $13 \mid (7^i - 1)$, $i = 1, 2$; противоречие.

Согласно лемме 3.5(b) G имеет нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \lhd K \trianglelefteq G$ такой, что H — нильпотентная π_1-группа, $\frac{K}{H}$ — неабелева простая группа и $\frac{G}{K}$ — разрешимая π_1-группа. Следовательно, $\frac{K}{H} \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Так как $5, 13 \notin \pi_1(G)$, то $\{13, 5\} \subseteq \pi\left(\frac{K}{H}\right)$. Поэтому $\frac{K}{H} \in \mathfrak{S}_{13}$ и $5, 13 \mid \left|\frac{K}{H}\right|$. Из табл. 1 и того факта, что $11 \notin \pi(G)$, получаем, что группа $\frac{K}{H}$ изоморфна $L_2(13)$, $L_2(27)$, $L_2(64)$, $Sz(8)$, ${}^3D_4(2)$ или $S_4(8)$.

Если $\frac{K}{H} \cong L_2(13)$, то $L_2(13) \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}(L_2(13))$, поскольку $\frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ или $|H| = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$. В силу нильпотентности H имеем $5 \sim 7$ в $\Gamma(G)$; противоречие.

Аналогично доказывается, что $\frac{K}{H} \ncong L_2(27)$.

Если $\frac{K}{H} \cong L_2(64)$, то $L_2(64) \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}(L_2(64))$, поскольку $\frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$, $|H| = 2^6 \cdot 3 \cdot 7$, $|H| = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ или $|H| = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$. Поэтому $\frac{G}{H} \cong L_2(64)$ или $\frac{G}{H} \cong L_2(64)\cdot 6$, где $\pi(H) \subseteq \{2, 3, 7\}$. Пусть $H_7 \in \mathrm{Syl}_7(H)$ и $G_{13} \in \mathrm{Syl}_{13}(G)$. Тогда H_7 char $H \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности H, откуда следует, что $H_7 \trianglelefteq G$. Таким образом, $A = H_7 \cdot G_{13}$ есть подгруппа в G. Имеем $H_7 \trianglelefteq A$, и по теореме Силова $G_{13} \trianglelefteq A$, откуда $A = H_7 \times G_{13}$, что влечет $7 \sim 13$; противоречие.

Аналогично доказывается, что $\frac{K}{H} \ncong Sz(8)$.

Если $\frac{K}{H} \cong {}^3D_4(2)$, то ${}^3D_4(2) \leq \frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}({}^3D_4(2))$, поскольку $\frac{G}{H} \leq \mathrm{Aut}\left(\frac{K}{H}\right)$. Следовательно, $|H| = 5$. Поэтому $\frac{G}{H} \cong {}^3D_4(2)$. Пусть $H_5 \in \mathrm{Syl}_5(H)$ и $G_7 \in \mathrm{Syl}_7(G)$. Тогда H_5 char $H \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности H, откуда следует, что $H_5 \trianglelefteq G$. Тем самым $A = H_5 \cdot G_7$ является подгруппой в G. Имеем $H_5 \trianglelefteq A$, и по теореме Силова $G_7 \trianglelefteq A$, откуда $A = H_5 \times G_7$, что влечет $5 \sim 7$; противоречие.

Наконец, $\frac{K}{H} \cong S_4(8)$, а значит, $|G| = |S_4(8)|$. Следовательно, $|H| = 1$. Поэтому так как $\Gamma(G) = \Gamma(S_4(8))$, то $G \cong S_4(8)$. Значит, группа $S_4(8)$ OD-характеризуема. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев А. В.* О распознаваемости всех конечных неабелевых простых групп, простые делители порядков которых не превосходят 13 // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 315–324.
2. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. Electron. Math. Rep. 2009. V. 6. P. 1–12.
3. *Moghaddamfar A. R., Zokayi A. R., Darafsheh M. R.* A characterization of finite simple groups by degrees of vertices of their prime graphs // Algebra Colloq. 2005. V. 12, N 3. P. 431–442.
4. *Moghaddamfar A. R., Zokayi A. R.* Recognizing finite groups through order and degree pattern // Algebra Colloq. 2008. V. 15, N 3. P. 449–456.
5. *Hoseini A. A., Moghaddamfar A. R.* Recognizing alternating groups A_{p+3} for certain primes p by their orders and degree patterns // Front. Math. China. 2010. V. 5, N 3. P. 541–553.
6. *Moghaddamfar A. R., Zokayi A. R.* OD-characterization of alternating and symmetric groups of degrees 16 and 22 // Front. Math. China. 2009. V. 4, N 4. P. 669–680.
7. *Moghaddamfar A. R., Rahbariyan S.* More on the OD-characterizability of finite group // Algebra Colloq. 2011. V. 18, N 4. P. 663–674.
8. *Zhang L. C., Shi W. J., Wang L. L., Shao C. G.* OD-characterization of A_{16} // J. Suzhou Univ., Nat. Sci. 2008. V. 24, N 2. P. 7–10.
9. *Moghaddamfar A. R., Zokayi A. R.* OD-characterization of certain finite groups having connected prime graphs // Algebra Colloq. 2010. V. 17, N 1. P. 121–130.
10. *Zhang L. C., Shi W. J.* OD-characterization of almost simple groups related to $L_2(49)$ // Arch. Math. (Brno). 2008. V. 44, N 3. P. 191–199.
11. *Zhang L. C., Shi W. J.* OD-characterization of the projective special linear groups $L_2(q)$ // Algebra Colloq. 2008. V. 44, N 3. P. 191–199.
12. *Akbari M., Moghaddamfar A. R., Rahbariyan S.* A characterization of some finite simple groups through their orders and degree patterns // Algebra Colloq. 2012. V. 19, N 3. P. 473–482.
13. *Zhang L. C., Shi W. J.* OD-characterization of the simple group $L_3(9)$ // J. Guangxi Univ., Nat. Sci. 2009. V. 34, N 1. P. 120–122.
14. *Zhang L. C., Shi W. J.* OD-characterization of almost simple groups related to $U_3(5)$ // Acta Math. Sin., Engl. Ser. 2010. V. 26, N 1. P. 161–168.
15. *Zhang L. C., Shi W. J.* OD-characterization of simple K_4-groups // Algebra Colloq. 2009. V. 16, N 2. P. 275–282.
16. *Zhang L. C., Shi W. J.* OD-characterization of all simple groups whose orders are less than 10^8 // Front. Math. China. 2008. V. 3, N 3. P. 461–474.
17. *Akbari M., Moghaddamfar A. R.* Simple groups which are 2-fold OD-characterizable // Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. 2012. V. 35, N 1. P. 65–77.
18. *Lucido M. S., Moghaddamfar A. R.* Groups in which all the connected components of their prime graphs are complete // J. Group Theory. 2004. V. 7, N 3. P. 373–384.
19. *Chen G. Y.* On structure of Frobenius and 2-Frobenius group // J. Southwest China Norm. Univ. 1995. V. 20, N 5. P. 485–487.
20. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper and Row, 1980.
21. *Passman D. S.* Permutation groups. New York: Benjamin Inc., 1968.
22. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
23. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
24. *Заварницин А. В.* Распознавание по множеству порядков элементов знакопеременных групп степени $r+1$ и $r+2$ для простого r и группы степени 16 // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 6. С. 648–661.
25. *Darafsheh M. R., Farjami Y.* Calculating the set of elements in the finite linear groups // J. Discrete Math. Sci. 2007. V. 10, N 5. P. 637–653.

26. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

Статья поступила 19 октября 2012 г.

Parivas Nosratpour (Носратпур Паривас)
Department of Mathematics, Ilam Branch,
Islamic Azad University, Ilam, Iran.
p.nosratpour@ilam-iau.ac.ir

Mohammad Reza Darafsheh (Дарафшех Мохаммед Реза)
School of Mathematics, Statistics and Computer Science,
College of Science, University of Tehran, Tehran, Iran
darafsheh@ut.ac.ir