Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 512.54

ПРОСТЫЕ ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Х. Ходабандех, М. Шахряри

Аннотация. Дана характеристика простых полиадических групп в терминах обычных групп и их автоморфизмов. Приведены два различных определения простоты для полиадических групп: UAS (универсальная алгебраическая простота) и GTS (теоретико-групповая простота) с точки зрения универсальной алгебры и теории групп соответственно. Получены необходимые и достаточные условия того, чтобы полиадическая группа была UAS или GTS.

Ключевые слова: полиадическая группа, n-арная группа, ретракт n-арной группы, простая полиадическая группа, конгруэнтность.

1. Введение

Пусть G — непустое множество и n — положительное целое число. Если $f : G^n \to G$ является n-арной операцией, то используем обозначение $f\big(x_1^n\big)$ для элементов $f(x_1, \dots, x_n)$. Если $x_i, x_{i+1}, \dots, x_j$ — произвольная последовательность элементов из G, то обозначаем ее через x_i^j. В случае, когда все компоненты в данной последовательности равны x, используем обозначение $\overset{(t)}{x}$, где t — число компонент. Будем говорить, что n-арная операция *ассоциативна*, если для любых $1 \le i < j \le n$ справедливо равенство

$$f\big(x_1^{i-1}, f\big(x_i^{n+i-1}\big), x_{n+i}^{2n-1}\big) = f\big(x_1^{j-1}, f\big(x_j^{n+j-1}\big), x_{n+j}^{2n-1}\big)$$

при всех $x_1, \dots, x_{2n-1} \in G$. n-Арная система (G, f) называется *n-арной группой* или *полиадической группой*, если f ассоциативна и для всех $a_1, \dots, a_n, b \in G$ и $1 \le i \le n$ существует единственный элемент $x \in G$ такой, что

$$f\big(a_1^{i-1}, x, a_{i+1}^n\big) = b.$$

Предположение о единственности решения x может быть опущено [1]. Очевидно, что при $n = 2$ получаем определение обычной группы. В этой статье предполагаем, что $n > 2$.

Сделаем краткий обзор литературы и терминов. Прежде всего отметим классическую статью Поста [2], одну из первых статей по данной теме. В этой статье доказана ставшая впоследствии хорошо известной *теорема о смежных классах* и изучены основные свойства полиадических групп. Статьи [3, 4] относятся к первым работам, посвященным полиадическим группам. В [5] представлено почти полное описание полиадических групп. В частности, некоторые наши результаты доказаны там другими методами. Статьи [6–9] могут быть использованы для изучения как аксиом полиадических групп, так и их многообразий.

Заметим, что n-арная система (G,f) вида $f\big(x_1^n\big) = x_1x_2\dots x_nb$, где $(G,\cdot)$ — группа, а b — фиксированный элемент из центра $(G,\cdot)$, является n-арной группой. Такая n-арная группа называется *b-произведенной* из группы $(G,\cdot)$ и обозначается через $\mathrm{der}_b(G,\cdot)$. В случае, когда b является единицей $(G,\cdot)$, говорим, что такая полиадическая группа *редуцирована* к группе $(G,\cdot)$ или *произведена* из $(G,\cdot)$, и для нее используем обозначение $\mathrm{der}(G,\cdot)$. Но для любого $n>2$ существуют n-арные группы, которые не являются произведенными из какой-либо другой группы. n-Арная группа (G,f) произведена из некоторой группы тогда и только тогда, когда она содержит элемент a (называемый *n-арной единицей*) такой, что

$$f(\overset{(i-1)}{a}, x, \overset{(n-i)}{a}) = x$$

справедливо для всех $x\in G$ и $i=1,\dots,n$ (см. [1]).

Из определения n-арной группы (G,f) мы можем впрямую увидеть, что для любого $x\in G$ существует только один $y\in G$, удовлетворяющий уравнению

$$f(\overset{(n-1)}{x}, y) = x.$$

Этот элемент называется *асимметричным* к x и обозначается через $\bar{x}$. Как доказал Дернте [3], следующие тождества справедливы для всех $x,y\in G$ и $2\le i\le n$:

$$f(\overset{(i-2)}{x}, \bar{x}, \overset{(n-i)}{x}, y) = f(y, \overset{(n-i)}{x}, \bar{x}, \overset{(i-2)}{x}) = y.$$

Пусть (G,f) — полиадическая группа и $a\in G$ — фиксированный элемент. Определим бинарную операцию

$$x*y = f(x, \overset{(n-2)}{a}, y).$$

Тогда $(G,*)$ является обычной группой, называемой *ретрактом* (G,f) над a. Такой ретракт будет обозначаться через $\mathrm{ret}_a(G,f)$. Все ретракты полиадической группы изоморфны [10]. Единицей в $(G,*)$ является $\bar{a}$. Можно проверить, что обратный к x имеет вид

$$y = f(\bar{a}, \overset{(n-3)}{x}, \bar{x}, \bar{a}).$$

Одной из наиболее фундаментальных теорем о полиадических группах является следующая, ныне известная как теорема *Хосцу — Глоскина.* Мы будем часто использовать ее в данной статье, читатель за деталями может обратиться к [11–14].

Теорема 1.1. *Пусть (G,f) — n-арная группа. Тогда существуют обычная группа $(G,\cdot)$, автоморфизм θ группы $(G,\cdot)$ и элемент $b\in G$ такие, что*

1) $\theta(b)=b$,
2) $\theta^{n-1}(x) = bxb^{-1}$ *для любого* $x\in G$,
3) $f(x_1^n) = x_1\theta(x_2)\theta^2(x_3)\dots\theta^{n-1}(x_n)b$ *для всех* $x_1,\dots,x_n\in G$.

В соответствии с этой теоремой будем использовать обозначение $\mathrm{der}_{\theta,b}(G,\cdot)$ для (G,f) и говорить, что (G,f) является *(θ,b)-произведенной из* $(G,\cdot)$. В данной статье будем предполагать, что $(G,f)=\mathrm{der}_{\theta,b}(G,\cdot)$.

Многообразия полиадических групп и структура конгруэнций на полиадических группах изучаются в [6, 7, 15]. Доказано, что все конгруэнции на полиадических группах коммутируют, а потому решетка конгруэнций модулярна.

Мы дадим очень простое доказательство этого факта. Среди других вопросов, относящихся к полиадическим группам, отметим теорию представлений, изучавшуюся в [16]. В [17] даны обобщения результатов теории характеров конечных групп на случай полиадических групп.

В [18] установлены существенные результаты о структуре гомоморфизмов полиадических групп, основной из которых будет эффективно использован в настоящей статье.

Теорема 1.2. *Пусть* $(G,f)=\mathrm{der}_{\theta,b}(G,\cdot)$ *и* $(H,h)=\mathrm{der}_{\eta,c}(H,*)$ *— две полиадические группы, а* $\psi:(G,f)\to(H,h)$ *— гомоморфизм. Тогда существуют* $a\in H$ *и обычный гомоморфизм* $\phi:(G,\cdot)\to(H,*)$ *такие, что* $\psi=R_a\phi$, *где* R_a *обозначает отображение* $x\mapsto x*a$. *Кроме того,* a *и* ϕ *удовлетворяют следующим условиям:*

$$h(\overset{(n)}{a})=\phi(b)*a \quad \text{и} \quad \phi\theta=I_a\eta\phi,$$

где I_a *обозначает внутренний автоморфизм* $x\mapsto a*x*a^{-1}$.

Обратно, если a *и* ϕ *удовлетворяют этим двум условиям, то* $\psi=R_a\phi$ *является гомоморфизмом* $(G,f)\to(H,h)$.

Очевидно, что, используя теорему 1.2, можно определить, когда две полиадические группы $(G,f)=\mathrm{der}_{\theta,b}(G,\cdot)$ и $(H,h)=\mathrm{der}_{\eta,c}(H,*)$ изоморфны, а также получить полное описание полиадических представлений (детали см. в [18]). На основе этой теоремы в разд. 4 дана структура полиадических подгрупп.

Прежде чем перейти к объяснению мотивации настоящей работы, мы напомним определение нормальных полиадических подгрупп из [16] (см. также [5, 8]). n-Арная подгруппа H полиадической группы (G,f) называется *нормальной*, если

$$f(\bar{x},\overset{(n-3)}{x},h,x)\in H$$

для всех $h\in H$ и $x\in G$. Если любая нормальная подгруппа в (G,f) единична или равна G, то будем говорить, что (G,f) *проста в теоретико-групповом смысле* или, кратко, (G,f) — GTS. Если $H=G$ является единственной нормальной подгруппой в (G,f), то говорим, что (G,f) является *сильно простой в теоретико-групповом смысле* или, кратко, GTS*. Чтобы понять мотивацию определения полиадических нормальных подгрупп, предположим, что H является нормальной подгруппой n-арной группы (G,f), и определим отношение $\sim_H$ на G правилом

$$x\sim_H y \iff \exists h_1,\dots,h_{n-1}\in H: y=f\big(x,h_1^{n-1}\big).$$

Легко видеть, что это отношение является конгруэнтностью на G. Класс эквивалентности G, содержащий x, обозначается через xH и называется *левым смежным классом* подгруппы H с представителем x. На множестве $G/H=\{xH:x\in G\}$ определяем операцию

$$f_H(x_1H,x_2H,\dots,x_nH)=f\big(x_1^n\big)H.$$

Тогда $(G/H,f_H)$ — n-арная группа, произведенная из группы $\mathrm{ret}_H(G/H,f_H)$ (см. [16]). Одной из основных целей настоящей статьи является классификация всех GTS полиадических групп. Будут даны необходимые и достаточные условия для того, чтобы полиадическая группа $(G,f)=\mathrm{der}_{\theta,b}(G,\cdot)$ являлась GTS в терминах обычной группы $(G,\cdot)$ и автоморфизма θ. Возможно определить другой вид простоты для полиадических групп — универсальную алгебраическую простоту. Отношение эквивалентности R на G называется *конгруэнтностью*, если

1) $\forall i : x_i R y_i \Rightarrow f\big(x_1^n\big) R f\big(y_1^n\big)$,

2. $xRy \Rightarrow \bar{x} R \bar{y}$.

К примеру, если H является нормальной полиадической группой в (G, f), то $R = \sim_H$ является конгруэнтностью (см. [16]). Говорим, что (G, f) *универсально-алгебраически простая* или, кратко, UAS, если ее единственной конгруэнтностью является *равенство* и $G \times G$. Также дадим классификацию UAS полиадических групп и докажем, что UAS $\subseteq$ GTS.

Наша мотивация к изучению простых полиадических групп идет из n-лиевых алгебр (так называемых алгебр Филиппова). Векторное пространство L над полем $\mathbb{F}$ является n-лиевой алгеброй, если оно наделено кососимметрическим n-линейным отображением $[-, \dots, -] : L^n \to L$ таким, что выполняется следующее *тождество Якоби*:

$$\sum_{i=1}^{n} [x_1, \dots, x_{i-1}, [x_i, y_1, \dots, y_{n-1}], x_{i+1}, \dots, x_n] = 0.$$

Случай $n = 2$ дает обычную алгебру Ли. Такие понятия, как подалгебра и идеал, определяются обычным образом [19]. Доказано, что при $n > 2$ существует только одна простая n-лиева алгебра и ее размерность равна $n + 1$ (см. подробнее в [20]). Этот факт показывает большую разницу между алгебрами Ли и n-лиевыми алгебрами, поскольку существует много простых алгебр Ли. По аналогии со случаем n-лиевых алгебр можно предположить, что существует мало простых полиадических групп при $n > 2$. Как увидим позже, это не так, и существует много простых n-арных групп (как UAS, так и GTS), даже более, чем обычных простых групп. Этот факт побуждает нас предположить, что должно существовать более общее определение n-арных алгебр Ли, которое до сих пор не предложено. По нашему мнению, определение Филиппова n-лиевых алгебр является только малой частью некоторой неизвестной алгебраической структуры. Логический подход в направлении обнаружения этих более общих понятий *настоящих* n-лиевых алгебр может быть обнаружен при изучении *полиадических групп Ли*.

2. Элементарные понятия

Будем предполагать, что рассматриваемая полиадическая группа имеет вид $(G, f) = \mathrm{der}_{\theta,b}(G, \cdot)$. Единичный элемент $(G, \cdot)$ будем обозначать через e. В первую очередь выразим асимметричный элемент $\bar{x}$ через x и θ.

Лемма 2.1. *Справедливо равенство*

$$\bar{x} = b^{-1}\theta^{n-2}(x^{-1}) \dots \theta^2(x^{-1})\theta(x^{-1}).$$

Доказательство. Предположим, что $y = b^{-1}\theta^{n-2}(x^{-1}) \dots \theta^2(x^{-1})\theta(x^{-1})$. Тогда

$$f(y, \overset{(n-1)}{x}) = y\theta(x)\theta^2(x) \dots \theta^{n-1}(x)b = b^{-1}\theta^{n-1}(x)b = b^{-1}bxb^{-1}b = x.$$

Тождества Дернта показывают, что $y = \bar{x}$. $\square$

Определение 2.2. Пусть $H \leq (G, f)$ и

$$f(\bar{x}, \overset{(n-3)}{x}, h, x) \in H$$

для всех $x \in G$ и $h \in H$. Тогда H называется *нормальной полиадической подгруппой* в G, что обозначается через $H \trianglelefteq (G, f)$.

Во введении дана мотивация определения нормальной полиадической подгруппы. Следующая лемма также объясняет, почему используется это определение нормальности полиадических подгрупп.

Лемма 2.3. *Пусть $H \leq (G, f)$. Тогда H нормальна тогда и только тогда, когда $\theta^{-1}(x^{-1}h)x \in H$ для всех $x \in G$ и $h \in H$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \overset{(n-3)}{x}, h, x) &= b^{-1}\theta^{n-2}(x^{-1}) \dots \theta(x^{-1})\theta(x) \dots \theta^{n-3}(x)\theta^{n-2}(h)bx \\ &= b^{-1}\theta^{n-2}(x^{-1})\theta^{n-2}(h)bx = b^{-1}\theta^{n-2}(x^{-1}h)bx = b^{-1}\theta^{n-1}(\theta^{-1}(x^{-1}h))bx \\ &= b^{-1}b\theta^{-1}(x^{-1}h)b^{-1}bx = \theta^{-1}(x^{-1}h)x, \end{aligned}$$

и лемма доказана. $\square$

Пусть $(G, f) = (G, \cdot)$, т. е. полиадическая группа является обычной группой. Тогда очевидно, что $\theta = \mathrm{id}$ и $b = 1$. Следовательно, условие $\theta^{-1}(x^{-1}h)x \in H$ эквивалентно $x^{-1}hx \in H$, а это показывает, что нормальность, которую ввели, является обобщением нормальности обычных подгрупп.

Определение 2.4. Отношение эквивалентности R на G называется *конгруэнтностью*, если
1) $\forall i : x_i R y_i \Rightarrow f(x_1^n) R f(y_1^n)$,
2) $xRy \Rightarrow \bar{x} R \bar{y}$.

Обозначим множество всех конгруэнтностей на (G, f) через $\mathrm{Cong}(G, f)$. Следующая теорема доказана в [16].

Теорема 2.5. *Пусть $H \trianglelefteq (G, f)$. Определим $R = \sim_H$ правилом*

$$x \sim_H y \Leftrightarrow \exists h_1, \dots, h_{n-1} \in H : y = f(x, h_1^{n-1}).$$

Тогда R является конгруэнтностью, и если положим $xH = [x]_R$ (класс эквивалентности для x), то множество $G/H = \{xH : x \in G\}$ является n-арной группой с операцией

$$f_H(x_1 H, \dots, x_n H) = f(x_1^n)H.$$

Кроме того,

$$(G/H, f_H) = \mathrm{der}(\mathrm{ret}_H(G/H, f_H)),$$

т. е. группа редуцированная.

Определение 2.6. Полиадическая группа (G, f) является *простой в теоретико-групповом смысле*, или GTS, если

$$H \trianglelefteq (G, f) \Rightarrow |H| = 1 \quad \text{или} \quad H = G.$$

Будем говорить, что (G, f) *универсально-алгебраически простая*, или UAS, если

$$R \in \mathrm{Cong}(G, f) \Rightarrow R = \Delta \quad \text{или} \quad R = G \times G,$$

где Δ означает равенство.

Предложение 2.7. *Каждая* UAS *является также* GTS.

Доказательство. Предположим, что (G, f) является UAS и $H \trianglelefteq (G, f)$. Пусть $R = \sim_H$. По теореме 2.5 R — конгруэнтность, а потому $R = \Delta$ или $G \times G$. Однако поскольку H является классом $\sim_H$, имеем $H = \{e\}$ или $H = G$, тем самым доказывая, что (G, f) — GTS. $\square$

Полиадическая группа (G, f) является *сильно* GTS, если $H = G$ является ее единственной нормальной полиадической подгруппой. Класс таких полиадических групп будем обозначать через GTS*. Следующее предложение показывает, что GTS* является наиболее важной частью GTS.

Предложение 2.8. *Если* (G, f) *имеет единственную нормальную полиадическую подгруппу, то* (G, f) *редуцированная.*

Доказательство. Пусть $H = \{u\}$ — полиадическая нормальная подгруппа в (G, f). Для любого $x \in G$ смежный класс xH также одноэлементный, т. е. $xH = \{x\}$. Значит, отображение $\delta : G \to G/H$, определенное правилом $\delta(x) = \{x\}$, является изоморфизмом, а потому

$$(G, f) \cong (G/H, f_H) = \mathrm{der}(\mathrm{ret}_H(G/H, f_H)),$$

что влечет редуцированность (G, f). $\square$

По предложению 2.8 если (G, f) является GTS, но не сильно GTS, то $(G, f) = \mathrm{der}(G, \cdot)$, где $(G, \cdot)$ — обычная простая группа. Это так, поскольку полиадические нормальные подгруппы в (G, f) находятся в соответствии с нормальными подгруппами из $(G, \cdot)$ по лемме 2.3. Следовательно, остается определить полиадические группы, которые являются GTS*. Это будет сделано в разд. 4.

3. UAS и решетка конгруэнтностей

В данном разделе определим структуру конгруэнтностей полиадических групп и дадим необходимые и достаточные условия, при которых полиадическая группа является UAS. Заметим, что бинарная группа $(G, \cdot) \times (G, \cdot)$ обладает автоморфизмом $(x, y) \mapsto (\theta(x), \theta(y))$, который обозначаем тем же символом θ. Как и в разд. 2, $\mathrm{Cong}(G, f)$ — множество всех конгруэнтностей на (G, f). Оно является решеткой относительно обычных операций объединения и пересечения конгруэнтностей. Множество всех отношений эквивалентности на G обозначаем через $\mathrm{Eq}(G)$.

Теорема 3.1. *Конгруэнтность* R *принадлежит* $\mathrm{Cong}(G, f)$ *тогда и только тогда, когда* $R \in \mathrm{Eq}(G)$ *и* R *является* θ*-инвариантной подгруппой в* $(G, \cdot) \times (G, \cdot)$.

Доказательство. Пусть $R \in \mathrm{Con}(G, f)$. Докажем, что R — θ-инвариантная подгруппа в $(G, \cdot) \times (G, \cdot)$. Предположим, что xRy и

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad x_2 = y_2 = e, \ \ldots, \ x_n = y_n = e.$$

Поскольку $f\big(x_1^n\big) R f\big(y_1^n\big)$, то $xbRyb$. Аналогичные рассуждения при

$$x_1 = b^{-2}, \quad y_1 = b^{-2}, \quad x_2 = y_2 = \cdots = x_{n-1} = y_{n-1} = e, \quad x_n = x, \quad y_n = y$$

показывают, что $b^{-1}xRb^{-1}y$. Далее, пусть xRy и

$$x_1 = y_1 = e, \quad x_2 = x, \quad y_2 = y, \quad x_3 = y_3 = e, \ \ldots, \ x_{n-1} = y_{n-1} = e,$$
$$x_n = y_n = b^{-1}.$$

Тогда $f\big(x_1^n\big)Rf\big(y_1^n\big)$ влечет $\theta(x)R\theta(y)$. Это показывает, что $\theta(R) \subseteq R$. Заметим, что обращение также верно, т. е. если $\theta(x)R\theta(y)$, то xRy, поскольку $\theta(x)R\theta(y)$ влечет $\theta^{n-1}(x)R\theta^{n-1}(y)$. Значит, $bxb^{-1}Rbyb^{-1}$, а потому xRy, как установлено выше. Суммируя доказанное ранее, получаем

$$xRy \Leftrightarrow \theta(x)R\theta(y).$$

Предположим, что xRy и uRv. Пусть $u' = \theta^{-1}(u)$ и $v' = \theta^{-1}(v)$. Тогда $u'Rv'$ и аналогичное рассуждение снова показывает, что $x\theta(u')Ry\theta(v')$, откуда $xuRyv$. Следовательно, R замкнуто относительно бинарной операции $(G, \cdot) \times (G, \cdot)$. В заключение заметим, что xRy влечет $x^{-1}Ry^{-1}$. По определению конгруэнтности из xRy следует $\bar{x}R\bar{y}$. Однако по лемме 2.1

$$\bar{x} = b^{-1}\theta^{n-2}(x^{-1})\dots\theta^2(x^{-1})\theta(x^{-1}),$$

$$\bar{y} = b^{-1}\theta^{n-2}(y^{-1})\dots\theta^2(y^{-1})\theta(y^{-1}).$$

Значит,

$$b^{-1}\theta^{n-2}(x^{-1})\dots\theta^2(x^{-1})\theta(x^{-1})Rb^{-1}\theta^{n-2}(y^{-1})\dots\theta^2(y^{-1})\theta(y^{-1}),$$

а потому

$$\theta(\theta^{n-3}(x^{-1})\dots\theta(x^{-1})x^{-1})R\theta(\theta^{n-3}(y^{-1})\dots\theta(y^{-1})y^{-1}).$$

Итак,

$$\theta^{n-3}(x^{-1})\dots\theta(x^{-1})x^{-1}R\theta^{n-3}(y^{-1})\dots\theta(y^{-1})y^{-1}.$$

Продолжая далее, окончательно получаем $x^{-1}Ry^{-1}$. Таким образом, R является θ-инвариантной подгруппой в $(G, \cdot)\times(G, \cdot)$. Заметим, что обратное, очевидно, также верно, и тем самым утверждение доказано. □

Предложение 3.2. *Пусть $H_R = \{x \in G : xRe\} = [e]_R$. Тогда H_R является θ-инвариантной нормальной подгруппой в $(G, \cdot)$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in H_R$. Тогда xRe и yRe, а потому $xy^{-1}Re$. Также если $x \in H_R$ и $a \in G$, то $axa^{-1}Re$ и, следовательно, H_R — нормальная подгруппа в $(G, \cdot)$. Более того, если xRe, то $\theta(x)Re$, а это означает, что H_R θ-инвариантна. □

Дадим необходимые и достаточные условия, при которых полиадическая группа является UAS.

Теорема 3.3. (G, f) *является* UAS *тогда и только тогда, когда единственные нормальные θ-инвариантные подгруппы в $(G, \cdot)$ — это тривиальные подгруппы.*

Доказательство. Пусть $(G, \cdot)$ — θ-простая группа (т. е. без нетривиальных нормальных θ-инвариантных подгрупп) и $R \in \mathrm{Cong}(G, f)$. Поскольку по предложению 3.2 H_R является θ-инвариантной нормальной подгруппой в $(G, \cdot)$, то H_R равно $\{e\}$ или G. Это показывает, что R равно Δ или $G \times G$. Значит, (G, f) является UAS. Обратно, предположим, что (G, f) является UAS, и пусть H — θ-инвариантная нормальная подгруппа в $(G, \cdot)$. Положим

$$R = \{(x, y) : x^{-1}y \in H\}.$$

Применяя теорему 3.1, видим, что $R \in \mathrm{Cong}(G, f)$, а потому R равно Δ или $G \times G$, откуда H равно $\{e\}$ или G. □

В разд. 2 показано, что $H \trianglelefteq (G, f)$ влечет редуцированность $(G/H, f_H)$, но это неверно для G/R, когда R является произвольной конгруэнтностью. Чтобы определить эту структуру, заметим, что так как H_R θ-инвариантна, можно определить новый автоморфизм

$$\theta_R : \frac{G}{H_R} \to \frac{G}{H_R}$$

правилом $\theta_R([x]) = [\theta(x)]$, где $[-]$ означает $[-]_R$. Пусть $b_R = [b]$. Тогда

$$f_R([x_1], \ldots, [x_n]) = \left[f\left(x_1^n\right)\right] = [x_1\theta(x_2)\ldots\theta^{n-1}(x_n)b]{=}[x_1]\theta_R([x_2])\ldots\theta_R^{n-1}([x_n])b_R.$$

Это показывает, что

$$\frac{G}{R} = \mathrm{der}_{\theta_R, b_R}\left(\frac{G}{H_R}, \cdot\right).$$

Лемма 3.4. *Пусть $R \leq (G, \cdot) \times (G, \cdot)$. Справедливо $R \in \mathrm{Eq}(G)$ тогда и только тогда, когда $\Delta \subseteq R$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение тривиально. Поэтому предположим, что $\Delta \subseteq R$. Пусть $(x, y) \in R$. Покажем включение $(y, x) \in R$. Заметим, что

$$(y, x) = (x, x)(x^{-1}, y^{-1})(y, y) \in R,$$

т. е. R симметрично. Пусть $(x, y), (y, z) \in R$. Тогда

$$(x, z) = (x, y)(y^{-1}, y^{-1})(y, z) \in R,$$

что заканчивает доказательство. $\square$

Следствие 3.5. *Справедливо* $\mathrm{Cong}(G, f) = \{R \leq_\theta (G, \cdot) \times (G, \cdot) : \Delta \subseteq R\}$.

Предложение 3.6. *Пусть $R, Q \in \mathrm{Cong}(G, f)$. Тогда верны следующие утверждения.*

(1) *$RQ = QR$ как для подгрупп в $(G, \cdot) \times (G, \cdot)$;*
(2) *$R \circ Q = RQ$;*
(3) *$R \circ Q = Q \circ R$, т. е. $\mathrm{Cong}(G, f)$ — модулярная решетка;*
(4) *$H_{RQ} = H_R H_Q$ и $H_{R\cap Q} = H_R \cap H_Q$.*

Доказательство. Известно, что $H_Q \trianglelefteq G$, откуда $1 \times H_Q \trianglelefteq (G, \cdot) \times (G, \cdot)$. Пусть $(x, y) \in R$ и $(u, v) \in Q$. Так как R является конгруэнтностью, $(xu, yu) \in R$, а также

$$(x, y)(u, v) = (x, y)(u, u)(u^{-1}, u^{-1})(u, v) = (xu, yu)(e, u^{-1}v).$$

Далее, $(e, u^{-1}v) \in Q$, откуда $u^{-1}v \in H_Q$ и, следовательно, $(e, u^{-1}v) \in 1 \times H_Q$. Однако $R(1 \times H_Q) = (1 \times H_Q)R$, т. е.

$$(x, y)(u, v) = (e, w)(x', y')$$

для некоторых $(e, w) \in Q$ и $(x', y') \in R$. Это показывает, что $RQ = QR$. Для доказательства (2) заметим, что

$$R \circ Q = \{(x, y) \in G \times G : \exists u,\ (x, u) \in Q \text{ и } (u, y) \in R\}.$$

Поэтому если $(x, y) \in R \circ Q$, то $(x, y) = (x, u)(u^{-1}, u^{-1})(u, y) \in RQ$. Следовательно, $R \circ Q \subseteq RQ$. Обратное также верно. Теперь доказательства пп. (3) и (4) ясны. $\square$

Конгруэнтность $R \in \mathrm{Cong}(G, f)$ называется *нормальной*, если существует нормальная полиадическая группа $H \trianglelefteq (G, f)$ такая, что $R = \sim_H$. В дальнейшем определим нормальные элементы в $\mathrm{Cong}(G, f)$.

Предложение 3.7. *Пусть R — нормальная конгруэнтность и H — нормальная полиадическая группа, соответствующая R. Тогда существует $a \in G$ такой, что $H = aH_R$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in H$ и $h_1, \dots, h_{n-2} \in H$ — произвольные элементы. Известно, что существует $h_{n-1} \in H$ такой, что $y = f\big(x, h_1^{n-1}\big)$. Стало быть, $x \sim_H y$, и существует $a \in G$ такой, что $x, y \in [a]_R$. Значит, $H \subseteq aH_R$. Предположим, что $u \in aH_R$. Тогда существует $x \in H$ такой, что $u \sim_H x$, а потому существуют $h_1, \dots, h_{n-1} \in H$ такие, что $u = f\big(x, h_1^{n-1}\big) \in H$. Следовательно, $aH_R \subseteq H$. $\square$

Теорема 3.8. *Пусть R — конгруэнтность. Тогда R нормальна тогда и только тогда, когда существует $a \in G$ такой, что*

(1) $aR\bar{a}$,

(2) $f(\bar{x}, \overset{(n-3)}{x}, a, x)Ra$ *для всех* $x \in G$.

Доказательство. Пусть R удовлетворяет условиям (1) и (2). Сначала покажем, что $H = aH_R$ является нормальной полиадической подгруппой. Возьмем $x_i \in H$ при $1 \le i \le n$. Тогда для всех i имеем x_iRa, и поскольку $aR\bar{a}$, то $f\big(x_1^n\big)Rf(\bar{a}, \overset{(n-1)}{a})$. Это показывает, что $f\big(x_1^n\big)Ra$, а потому $f\big(x_1^n\big) \in H$. Кроме того, если $x \in H$, то xRa и $\bar{x}R\bar{a}$. Далее, так как $aR\bar{a}$, то $\bar{x}Ra$, что доказывает включение $\bar{x} \in H$. Следовательно, H является полиадической подгруппой. Пусть $x \in G$ и $h \in H$. Тогда hRa и потому $f(\bar{x}, \overset{(n-3)}{x}, h, x)Rf(\bar{x}, \overset{(n-3)}{x}, a, x)$. Но по условию (2) $f(\bar{x}, \overset{(n-3)}{x}, a, x)Ra$, откуда $f(\bar{x}, \overset{(n-3)}{x}, h, x) \in H$, тем самым нормальность H доказана.

Покажем, что $R = \sim_H$. Пусть $x \sim_H y$. Тогда существуют $h_1, \dots, h_{n-1} \in H$ такие, что $y = f(x, h_1^{n-1})$. Стало быть, любой h_i имеет вид ah'_i, где $h'_i \in H_R$. По предложению 3.2 H_R является θ-инвариантной нормальной подгруппой в $(G, \cdot)$. Значит, $y = f(x, ah'_1, \dots, ah'_{n-1}) = f(x, \overset{(n-1)}{a})h'$ для некоторого $h' \in H_R$. Заметим, что $f(x, \overset{(n-1)}{a}) = x(\bar{a})^{-1}a$ по лемме 2.1. Однако $(\bar{a})^{-1}a \in H_R$ по условию (1). Следовательно,

$$y = f(x, \overset{(n-1)}{a})h' \in xH_R,$$

откуда вытекает xRy. Значит, $x \sim_H y$ влечет xRy. Обратное также верно, что показывает $R = \sim_H$. Тем самым R — нормальная конгруэнция.

Далее предположим, что R нормальна. Тогда $R = \sim_H$ для некоторой нормальной полиадической подгруппы H. По предложению 3.7 существует $a \in G$ такой, что $H = aH_R$. Покажем, что a удовлетворяет условиям (1) и (2). Пусть $x_1, \dots, x_n \in H$. Тогда для всех i имеем x_iRa, откуда $f\big(x_1^n\big)Rf(\overset{(n)}{a})$. Так как H — полиадическая подгруппа, $f\big(x_1^n\big)Ra$, а потому $aRf(\overset{(n)}{a})$. Используя лемму 2.1, легко видеть, что $f(\overset{(n)}{a}) = a(\bar{a})^{-1}a$. Следовательно, $f(\overset{(n)}{a})a^{-1} \in H_R$ влечет $a(\bar{a})^{-1}aa^{-1} \in H_R$. Это показывает, что $a(\bar{a})^{-1} \in H_R$. Значит, $aR\bar{a}$, и условие (1) доказано. Доказательство условия (2) аналогично. $\square$

Из теоремы можно сделать вывод, что если $R, Q \in \mathrm{Cong}(G, f)$, где R нормальна и $R \subseteq Q$, то Q также нормальна. Можно переформулировать теорему в следующем виде.

Следствие 3.9. *Конгруэнтность R нормальна тогда и только тогда, когда существует $a \in G$ такой, что*

(1) $aR\bar{a}$,

(2) $\theta^{-1}(x^{-1}a)xRa$ *для всех* $x \in G$.

4. GTS и нормальные полиадические подгруппы

Этот раздел посвящен GTS полиадическим группам. Мы снова предполагаем, что $(G,f) = \mathrm{der}_{\theta,b}(G,\cdot)$ является n-арной группой. Для $u \in G$ определим новую бинарную операцию на G правилом $x * y = xu^{-1}y$. Тогда $(G,*)$ является изоморфной копией $(G,\cdot)$, а изоморфизм устанавливает отображение $x \mapsto xu$. Обозначим эту новую группу через G_u. Ее единица — это u, а обратный к x — это $ux^{-1}u$, который мы обозначим через x^{-u}. Определим автоморфизм на G_u при помощи $\psi_u(x) = u\theta(x)\theta(u^{-1})$. Можно легко проверить, что это действительно автоморфизм на G_u.

Теорема 4.1. *Имеем $H \trianglelefteq (G,f)$ тогда и только тогда, когда существует $u \in H$ такой, что*

(1) *H является ψ_u-инвариантной нормальной подгруппой в G_u,*

(2) $\theta^{-1}(x^{-1}u)x \in H$ *для всех* $x \in G$.

Доказательство. Сначала определим структуру полиадических подгрупп, используя теорему 1.2. Пусть $H \le (G,f)$. Обозначим ограничение f на H через f. Тогда существуют бинарная операция на H, скажем $*$, автоморфизм ψ и элемент $c \in H$ такие, что

$$(H,f) = \mathrm{der}_{\psi,c}(H,*).$$

Отображение включения $j : H \to G$ является полиадическим гомоморфизмом, а потому по теореме 1.2 существуют $u \in G$ и обычный гомоморфизм $\phi : (H,f) \to (G,f)$ со свойствами

(i) $j = R_u\phi$,

(ii) $f(\overset{(n)}{u}) = \phi(c)u$,

(iii) $\phi\psi = I_u\theta\phi$.

Из п. (i) следует, что $\phi(x) = xu^{-1}$ для любого $x \in H$, а потому по п. (ii) $f(\overset{(n)}{u}) = c$. Более того, так как ϕ является обычным гомоморфизмом, используя $\phi(x*y) = \phi(x)\phi(y)$ и $\phi(x) = xu^{-1}$, получаем $x * y = xu^{-1}y$. В итоге по п. (iii) $\psi(x) = u\theta(x)\theta(u^{-1})$, а потому $(H,*) \le G_u$. Далее, H инвариантна при ψ_u, а значит, $\psi = \psi_u|_H$. Таким образом, H является полиадической подгруппой в (G,f) тогда и только тогда, когда существует элемент u такой, что H является ψ_u-инвариантной подгруппой в G_u. Предположим, что такая H нормальна в (G,f). Покажем, что $H \trianglelefteq G_u$ эквивалентно

$$x^{-u} * h * x \in H$$

для всех $x \in G_u$ и $h \in H$. Заметим, что последнее утверждение эквивалентно $ux^{-1}hu^{-1}x \in H$. Так как H — нормальная полиадическая подгруппа, по лемме 2.3

$$\theta^{-1}(x^{-1}h)x, \quad \theta^{-1}(x^{-1}u)x \in H.$$

Но H ψ_u-инвариантная, поэтому

$$\psi_u(\theta^{-1}(x^{-1}h)x), \quad \psi_u(\theta^{-1}(x^{-1}u)x) \in H.$$

Значит, следующий элемент также лежит в H:

$$\psi_u(\theta^{-1}(x^{-1}h)x) * \psi_u(\theta^{-1}(x^{-1}u)x)^{-u} = ux^{-1}h\theta(x)\theta(u^{-1})u^{-1}u(ux^{-1}u\theta(x)\theta(u^{-1}))^{-1}u = ux^{-1}hu^{-1}x.$$

Это показывает, что $H \trianglelefteq G_u$. Заметим, что следующее включение также выполняется автоматически:

$$\forall x \in G : \theta^{-1}(x^{-1}u)x \in H.$$

Обратно, пусть существует $u \in G$ такой, что H является ψ_u-инвариантной нормальной подгруппой в G_u и

$$\forall x \in G : \theta^{-1}(x^{-1}u)x \in H.$$

Покажем, что H является нормальной полиадической подгруппой. Равенство

$$\psi_u(\theta^{-1}(x^{-1}h)x) * \psi_u(\theta^{-1}(x^{-1}u)x)^{-u} = x^{-u} * h * x$$

показывает, что $\psi_u(\theta^{-1}(x^{-1}h)x) \in H$, и поскольку H инвариантна при ψ_u, то $\theta^{-1}(x^{-1}h)x \in H$. Следовательно, H — нормальная полиадическая подгруппа по лемме 2.3. $\square$

Лемма 4.2. *Пусть $u \in G$ — произвольный элемент. Тогда H является θ-инвариантной нормальной подгруппой в $(G, \cdot)$ тогда и только тогда, когда Hu является ψ_u-инвариантной нормальной подгруппой в G_u.*

Доказательство. Пусть $H \trianglelefteq_\theta G$. Тогда можно проверить, что Hu — подгруппа в G_u. Для любых $x \in G$ и $h \in H$ имеем

$$x^{-u} * hu * x = (ux^{-1}u)u^{-1}(hu)u^{-1}x = ux^{-1}hx,$$

что, очевидно, лежит в Hu. Значит, $Hu \trianglelefteq G_u$. Также

$$\psi_u(hu) = u\theta(hu)\theta(u^{-1}) = u\theta(u),$$

что говорит о ψ_u-инвариантности Hu. Обратно, пусть H — это ψ_u-инвариантная нормальная подгруппа в G_u. Покажем, что Hu^{-1} является θ-инвариантной нормальной подгруппой в G. Имеем

$$xhu^{-1}x^{-1} = (xu) * h * (xu)^{-u}u^{-1},$$

что лежит в Hu^{-1}. Следовательно, $Hu^{-1} \trianglelefteq G$. Аналогично $\theta(hu^{-1}) = u^{-1}\psi_u(h)$ лежит в $u^{-1}H = e * H = H * e = Hu^{-1}$. Значит, Hu^{-1} является θ-инвариантной подгруппой. $\square$

Пусть K — это θ-инвариантная нормальная подгруппа в $(G, \cdot)$. Тогда θ индуцирует автоморфизм G/K, который далее обозначим через θ_K.

Следствие 4.3. *Пусть $H \trianglelefteq (G, f)$. Тогда существует элемент u такой, что $K = H \cdot u^{-1}$ является θ-инвариантной нормальной подгруппой в G, а θ_K — внутренний автоморфизм. Также верно и обратное.*

Доказательство. Заметим, что $H \cdot u^{-1}$ не является полиадическим смежным классом, но таковым является множество $\{hu^{-1} : h \in H\}$. Пусть $H \trianglelefteq (G, f)$. По теореме 4.1 существует $u \in H$ такой, что H — ψ_u-инвариантная нормальная подгруппа в G_u и $\theta^{-1}(x^{-1}u)x \in H$ для любого $x \in G$. Пусть $K = H \cdot u^{-1}$. По лемме 4.2 K — θ-инвариантная нормальная подгруппа в G.

Далее, $\theta^{-1}(x^{-1}u)x \in H$ и H является ψ_u-инвариантной подгруппой, поэтому $x^{-u} * \psi_u(x) \in H$. Следовательно, $\psi_u(x) * H = x * H$. Так как H нормальна в G_u, то $H * \psi_u(x) = H * x$, а это эквивалентно тому, что $K\psi_u(x) = Kx$. Подгруппа K нормальна в G, а потому $\psi_u(x)K = xK$. Таким образом, $\theta(xu^{-1})K = u^{-1}xK$. Если положим $y = xu^{-1}$, то $\theta(y)K = u^{-1}yuK$, а это доказывает, что θ_K — внутренний автоморфизм.

Обратно, пусть K — θ-инвариантная нормальная подгруппа в G и $\theta_K = I_{uK}$. Тогда стандартными рассуждениями можно доказать, что $H = Ku^{-1} \trianglelefteq (G, f)$. $\square$

Как видели ранее, если (G, f) является не строго GTS, то она редуцирована. Поэтому определим, когда полиадическая группа принадлежит классу GTS*.

Теорема 4.4. *Полиадическая группа (G, f) является* GTS* *тогда и только тогда, когда из того, что K — это θ-инвариантная нормальная подгруппа в $(G, \cdot)$ и θ_K внутренний, следует $K = G$.*

Доказательство. Пусть (G, f) является GTS* и K — это θ-инвариантная нормальная подгруппа в G, а θ_K внутренний. Тогда по предыдущему следствию существует u такой, что $H = Ku^{-1} \trianglelefteq (G, f)$. Следовательно, $Ku^{-1} = G$, а потому $K = G$. Чтобы доказать обратное, предположим, что $H \trianglelefteq (G, f)$. По теореме 4.3 существует u такой, что $K = H \cdot u^{-1}$ удовлетворяет нашим предположениям. Значит, $K = G$, откуда $H = G$, а это доказывает то, что (G, f) является GTS*. $\square$

Заметим, что бинарные группы G_u, которые использованы в данном разделе, в действительности являются ретрактами (G, f) в случае, когда u асимметричен к некоторому другому элементу. Пусть $u = \bar{a}$. В группе $\mathrm{ret}_a(G, f)$, как упомянуто во введении, единицей является $\bar{a}$, и если положить $c = f(\overset{(n)}{\bar{a}})$ и $\phi(x) = f(\bar{a}, x, \overset{(n-2)}{a})$, то по [14] имеем

$$(G, f) = \mathrm{der}_{\phi,c}(\mathrm{ret}_a(G, f), *).$$

Легко видеть, что $x * y = x(\bar{a})^{-1}y$, и потому $G_u = \mathrm{ret}_a(G, f)$. В общем случае неверно, что каждый u асимметричен к некоторому a; существуют полиадические группы, в которых асимметричные элементы к любым x и y совпадают. Поэтому, вообще говоря, G_u не совпадает с некоторым ретрактом.

5. Примеры

В этом разделе приведем некоторые замечания и примеры, касающиеся простых полиадических групп. Пусть

$$(G, f) = \mathrm{der}_{\theta,b}(G, \cdot)$$

является UAS n-арной группой. Тогда по теореме 3.3 обычная группа $(G, \cdot)$ характеристически проста, поэтому если хотим построить универсальную алгебраически простую группу, то стартовой точкой должна быть характеристически простая группа. Наиболее тривиальный случай — это случай, когда $(G, \cdot)$ является обычной простой группой.

Пример 5.1. Пусть $(G, \cdot)$ — неабелева простая группа и θ — автоморфизм порядка $n-1$. Тогда $\mathrm{der}_\theta(G, \cdot)$ является UAS n-арной группой. Покажем, что для любых двух автоморфизмов θ и η одного порядка $n-1$ полиадические группы $\mathrm{der}_\theta(G,\cdot)$ и $\mathrm{der}_\eta(G,\cdot)$ изоморфны тогда и только тогда, когда θ и η сопряжены по модулю группы внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(G)$ группы $(G,\cdot)$. Сначала предположим, что $\mathrm{der}_\theta(G,\cdot) \cong \mathrm{der}_\eta(G,\cdot)$. Тогда по теореме 3.5 из [18] существуют автоморфизм ϕ и элемент $a \in G$ такие, что

(i) $\eta(a)\eta^2(a)\dots\eta^{n-1}(a) = 1$,

(ii) $\phi\theta\phi^{-1} = I_a\eta$, где I_a — внутренний автоморфизм $I_a(x) = axa^{-1}$.

В результате получаем, что θ и η сопряжены по модулю $\mathrm{Inn}(G)$. Обратно, пусть $\phi\theta\phi^{-1} = I_a\eta$ для некоторых ϕ и a. Заметим, что для любого положительного целого i и любого $x \in G$ имеем

$$(I_a\eta)^i(x) = (a\eta(a)\dots\eta^{i-1}(a))\eta^i(x)(a\eta(a)\dots\eta^{i-1}(a))^{-1},$$

поэтому если положим $i = n-1$, то для всех x из

$$(\phi\theta\phi^{-1})^{n-1}(x) = (I_a\eta)^{n-1}(x)$$

получим

$$x = (a\eta(a)\dots\eta^{n-2}(a))x(a\eta(a)\dots\eta^{n-2}(a))^{-1}.$$

Так как $(G,\cdot)$ — неабелева простая группа, имеем $a\eta(a)\dots\eta^{n-2}(a) = 1$, а потому снова по теореме 3.5 из [18] эти полиадические группы изоморфны. Мы только что доказали, что число неизоморфных полиадических групп вида $\mathrm{der}_\theta(G,\cdot)$ совпадает с числом классов сопряженности у $\mathrm{Out}(G)$ — группы внешних автоморфизмов группы $(G,\cdot)$. Вспомним, что для неабелевой конечной простой группы $(G,\cdot)$ группа $\mathrm{Out}(G)$ всегда очень мала. Поэтому, стартуя с неабелевой простой группы, в добавление к редуцированным полиадическим группам можно получить некоторые дополнительные примеры простых полиадических групп, в зависимости от числа классов сопряженности группы $\mathrm{Out}(G)$.

Пример 5.2. Пусть p — простое число, а $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Пусть $q(t) = t^2 + at + b$ — неприводимый многочлен над полем $\mathbb{Z}_p$. Выберем матрицу $A \in GL_2(p)$ с характеристическим многочленом $q(t)$. Положим $A^{n-1} = I$ и определим автоморфизм $\theta : G \to G$ правилом $\theta(X) = AX$. Очевидно, θ не имеет нетривиальных инвариантных подгрупп, так как $q(t)$ неприводим. Следовательно, $\mathrm{der}_\theta(G,\cdot)$ является UAS n-арной группой. Заметим, что

$$f\big(X_1^n\big) = X_1 + AX_2 + \dots + A^{n-2}X_{n-1} + X_n.$$

В качестве примера пусть $p = 3$ и $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда характеристический многочлен матрицы A есть $t^2 + 2t + 1$, который неприводим. Заметим, что $A^6 = I$, а потому $(G,f) = \mathrm{der}_\theta(G,\cdot)$ — 7-арная простая группа, где $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ и

$$\begin{aligned} f((x_1,y_1),\dots,(x_7,y_7)) = (&x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_6 + x_7 + 2y_2 + 2y_3 + y_5 + y_6, \\ &x_2 + x_3 + 2x_5 + 2x_6 + y_1 + y_2 + 2y_4 + 2y_5 + y_7). \end{aligned}$$

Очевидно, можно обобщить идею этой конструкции на группу $G = \mathbb{Z}_p^m$.

Пример 5.3. Пусть H — неабелева простая группа, а $G = H \times H$. Положим $\theta(x,y) = (y,x)$. Заметим, что G имеет только две нетривиальные нормальные подгруппы, ни одна из которых не θ-инвариантна. Значит, тернарная группа $\mathrm{der}_\theta(G,\cdot)$ является UAS. Имеем

$$f((x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)) = (x_1y_2x_3, y_1x_2y_3).$$

Как и ранее, можно обобщить идею этой конструкции на группу $G = H^{n-1}$ и автоморфизм

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Пример 5.4. Пусть H — неабелева простая группа с внешним автоморфизмом θ. Пусть $\theta^{n-1} = \mathrm{id}$ и $G = H \times H$. Тогда θ продолжается на G при помощи $\theta(x, y) = (\theta(x), \theta(y))$. Подгруппы $K_1 = H \times 1$ и $K_2 = 1 \times H$ являются единственными θ-инвариантными нормальными подгруппами в G. Очевидно, $\theta_{K_i} : G/K_i \to G/K_i$ не внутренний, так как мы предположили θ внешним. Следовательно, $\mathrm{der}_\theta(G, \cdot)$ — GTS полиадическая группа по теореме 4.4, но она не UAS.

Авторы благодарны профессору А. Ю. Ольшанскому за его неоценимые комментарии и предложения по заключительному разделу статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dudek W. A.* Remarks on n-groups // Demonstr. Math. 1980. V. 13. P. 165–181.
2. *Post E. L.* Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. V. 48. P. 208–350.
3. *Dörnte W.* Unterschungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff // Math. Z. 1929. Bd 29. S. 1–19.
4. *Kasner E.* An extension of the group concept // Bull. Amer. Math. Soc. 1904. V. 10. P. 290–291.
5. *Galmak A. M.* N-ary groups. Gomel: Gomel Univ. Press, 2003.
6. *Артамонов В. А.*. О шрейеровых многообразиях n-групп и n-полугруппах // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1979. Т. 5. С. 193–203.
7. *Dudek W. A.* Varieties of polyadic groups // Filomat. 1995. V. 9. P. 657–674.
8. *Galmak A. M.* Remarks on polyadic groups // Quasigroups Relat. Syst. 2000. V. 7. P. 67–70.
9. *Gleichgewicht B., Glazek K.* Remarks on n-groups as abstract algebras // Colloq. Math. 1967. V. 17. P. 209–219.
10. *Dudek W. A., Michalski J.* On retract of polyadic groups // Demonstr. Math. 1984. V. 17. P. 281–301.
11. *Dudek W. A., Glazek K.* Around the Hosszú–Gluskin theorem for n-ary groups // Discrete Math. 2008. V. 308. P. 4861–4876.
12. *Dudek W. A., Michalski J.* On a generalization of Hosszú theorem // Demonstr. Math. 1982. V. 15. P. 437–441.
13. *Hosszú M.* On the explicit form of n-groups // Publ. Math. 1963. V. 10. P. 88–92.
14. *Соколов Е. И.* О теореме Глускина — Хоссу для n-групп Дёрнте // Мат. исследования. Вып. 39. Сети и квазигруппы. Кишинев: Штиинца, 1976. С. 187–189.
14 это мат. исследования, на русском. Надо постараться найти.
15. *Ušan J.* Congruences of n-group and of associated Hosszú–Gluskin algebras // Novi Sad. J. Math. 1998. V. 28. P. 91–108.
16. *Dudek W. A., Shahryari M.* Representation theory of polyadic groups // Algebr. Represent. Theory. 2012. V. 15. P. 29–51.
17. *Shahryari M.* Representations of finite polyadic groups // Commun. Algebra. 2012. V. 40. P. 1625–1631.
18. *Khodabandeh H., Shahryari M.* On the representations and automorphisms of polyadic groups // Commun. Algebra. 2012. V. 40. P. 2199–2212.
19. *Филиппов В. Т.* n–Лиевы алгебры // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 126–140.
20. *Bai R., Meng D.* The simple n-ary Lie algebras // Hadronic J. 2002. V. 25. P. 713–723.

Статья поступила 4 сентября 2013 г.

Hamid Khodabandeh, Mahammad Shahryari
(Ходабандех Хамид, Шахряри Мохаммад)
Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences,
University of Tabriz, Tabriz, Iran
`mshahryari@tabrizu.ac.ir`, `h.khodabandeh@tabrizu.ac.ir`