Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5

УДК 517.929.4

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева

Аннотация. Рассматриваются системы дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами. Установлены условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения. Получены новые оценки, характеризующие скорость убывания решений на бесконечности.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, периодические коэффициенты, экспоненциальная устойчивость, функционал Ляпунова — Красовского, оценки решений.

Посвящается Ю. Г. Решетняку

1. Введение

В работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)+Dy(t-\tau)\right)=A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau),\quad t>0, \tag{1.1}$$

где D — постоянная матрица размера $n\times n$, $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n\times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, т. е.

$$A(t+T)\equiv A(t),\quad B(t+T)\equiv B(t),$$

$\tau>0$ — параметр запаздывания. При $D\neq 0$ системы вида (1.1) называются системами *нейтрального типа* [1]. Наша цель — изучение экспоненциальной устойчивости решений и получение оценок решений на полуоси $\{t>0\}$, характеризующих экспоненциальное убывание при $t\to\infty$.

В настоящее время имеется очень большое число работ по теории устойчивости решений автономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (см., например, библиографию в [2–4]). В отличие от автономных уравнений задача об устойчивости решений *неавтономных* уравнений менее изучена. Основные исследования в этом направлении проводятся для линейных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13–01–00329) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 80).

дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с периодическими коэффициентами

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > 0. \tag{1.2}$$

Основы теории устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с периодическими коэффициентами заложены в [5–10]. Основным подходом в этих исследованиях являются развитие теории Флоке и использование оператора монодромии. Этот подход применяется также при изучении устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом нейтрального типа с периодическими коэффициентами (1.1). Дальнейшее развитие теории Флоке для систем уравнений с запаздывающим аргументом изложено, например, в [11–13].

Помимо указанного подхода к проблеме устойчивости решений систем вида (1.1), (1.2) в литературе развиваются: *метод производящих функций* (см., например, [14, 15]), *метод монотонных операторов* (см., например, [16, 17]), *метод функционалов Ляпунова — Красовского* (см., например, [18, 19]). Отметим, что последний метод используется также при изучении асимптотической устойчивости решений некоторых классов неавтономных линейных систем [20–22].

Следует отметить, что на практике зачастую сложно проверить существующие условия асимптотической устойчивости решений неавтономных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Трудности возникают также при получении асимптотических оценок решений при $t \to \infty$ и при разработке алгоритмов для численного исследования асимптотической устойчивости решений систем (1.1), (1.2).

Для того чтобы справиться с этими трудностями, авторы [23, 24] предложили использовать при изучении асимптотической устойчивости решений системы (1.2) модифицированный функционал Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$v(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds, \tag{1.3}$$

где

$$H(t) = H^*(t) \in C^1[0,T], \quad H(t) = H(t+T) > 0, \tag{1.4}$$

$$K(s) = K^*(s) \in C^1[0,\tau], \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau]. \tag{1.5}$$

В случае, когда T-периодическая матрица $A(t)$ такова, что нулевое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}x = A(t)x, \quad t > 0,$$

асимптотически устойчиво, функционал (1.3) нетрудно построить, используя критерий асимптотической устойчивости из работы авторов [25]. Действительно, согласно этому критерию следующая краевая задача для дифференциального уравнения Ляпунова:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -Q(t), \quad t \in [0,T], \\ H(0) = H(T) > 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

однозначно разрешима при любой непрерывной матрице $Q(t)$. При этом если $Q(t) = Q^*(t) > 0$, то $H(t) = H^*(t) > 0$ на всем отрезке $[0,T]$. Продолжим матрицу $H(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t > 0\}$ и будем ее использовать в функционале (1.3), поскольку условия (1.4) выполняются. Тогда в силу [23, 24] решения системы (1.2) асимптотически устойчивы, если существует матрица $K(s)$, удовлетворяющая условиям (1.5) и такая, что положительно определена составная матрица

$$C(t) = -\begin{pmatrix} -Q(t) + K(0) & H(t)B(t) \\ B^*(t)H(t) & -K(\tau) \end{pmatrix} > 0, \quad t \in [0, T]. \tag{1.7}$$

Отметим, что это эквивалентно выполнению неравенства

$$K(0) + H(t)B(t)(K(\tau))^{-1}B^*(t)H(t) < Q(t), \quad t \in [0, T].$$

Очевидно, для широкого класса T-периодических матриц $B(t)$ матрицу $K(s)$ можно искать в виде

$$K(s) = \alpha(s)K_0, \quad K_0 = K_0^* > 0, \quad \text{где } \alpha(s) > 0,\ \alpha'(s) < 0,\ s \in [0, \tau].$$

Можно взять, например, $\alpha(s) = \alpha_1 e^{-\alpha_2 s}$, α_1, $\alpha_2 > 0$.

При выполнении условия (1.7) с использованием функционала (1.3) впервые были получены оценки решений начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > 0, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad \varphi(t) \in C([-\tau, 0]), \quad y(+0) = \varphi(0), \end{cases}$$

следующего вида:

$$\|y(t)\|^2 \le h_{\min}^{-1}(t) \exp\left(-\int_0^t \varepsilon(\xi)d\xi\right) v(0, \varphi), \tag{1.8}$$

где

$$\varepsilon(t) = \min\left\{\frac{c_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k\right\},$$

$h_{\min}(t) > 0$ и $c_{\min}(t) > 0$ — минимальные собственные значения матриц $H(t)$ и $C(t)$ соответственно, $k > 0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0, \tau].$$

Из этой оценки вытекает *экспоненциальная* устойчивость решений системы (1.2).

Отметим, что оценка (1.8) является аналогом неравенства Крейна [26] для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Использование функционала (1.3) позволило также изучить асимптотическую устойчивость нулевого решения систем нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0.$$

В частности, были получены оценки, характеризующие экспоненциальную скорость стабилизации решений на бесконечности, описаны множества притяжения нулевого решения (см., например, [23, 24, 27]).

Для изучения устойчивости решений линейных систем нейтрального типа с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dt}\left(y(t) + Dy(t-\tau)\right) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t > 0, \tag{1.9}$$

в работе первого автора [28] предложено использовать обобщение функционала Ляпунова — Красовского в следующем виде:

$$\langle H(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds, \qquad (1.10)$$

где $H = H^* > 0$, $K(s) = K^*(s) > 0$. С использованием этого функционала в случае $\|D\| < 1$ получены условия асимптотической устойчивости и оценки решений системы (1.9), являющиеся аналогами оценки Крейна [26]. Из этих оценок следует, что все решения убывают с экспоненциальной скоростью, при этом скорость убывания существенным образом зависит от матрицы D. Отметим, что оценки получены без информации о корнях квазимногочлена

$$\det(A + e^{-\lambda\tau}B - \lambda I - \lambda e^{-\lambda\tau}D) = 0.$$

В [29] получен некоторый аналог таких оценок для решений системы (1.9) в случае, когда спектр матрицы D лежит в единичном круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Несколько иного типа оценки решений систем нейтрального типа (1.9) содержатся в [30, 31].

Использование модифицированных функционалов Ляпунова — Красовского вида (1.3) и (1.10) при получении аналогов неравенства Крейна приводит к идее применения функционала

$$V(t,y) = \langle H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds \qquad (1.11)$$

для исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами (1.1). В настоящей работе, опираясь на предыдущие результаты и используя функционал (1.11), мы исследуем экспоненциальную устойчивость решений системы (1.1). Основные результаты сформулированы в § 2. В теореме 1 указываем условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения (1.1). В теоремах 2–4 устанавливаем оценки, характеризующие скорость экспоненциального убывания решений при $t \to \infty$.

2. Основные результаты

Будем предполагать, что все собственные значения матрицы D принадлежат единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

Теорема 1. *Предположим, что существуют матрицы*

$$H(t) = H^*(t) \in C^1[0,T], \quad K(s) = K^*(s) \in C^1[0,\tau]$$

такие, что

$$H(0) = H(T) > 0, \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Если матрица

$$C(t) = \begin{pmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) \\ C_{12}^*(t) & C_{22}(t) \end{pmatrix},$$

где

$$C_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0),$$

$$C_{12}(t) = -\frac{d}{dt}H(t)D - H(t)B(t) - A^*(t)H(t)D,$$

$$C_{22}(t) = -D^*\frac{d}{dt}H(t)D - D^*H(t)B(t) - B^*(t)H(t)D + K(\tau),$$

положительно определена при $t \in [0, T]$, *то нулевое решение системы* (1.1) *экспоненциально устойчиво.*

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.1):

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > 0,\\ y(t) = \varphi(t),\ t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0),\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\varphi(t) \in C^1[-\tau, 0]$ — заданная вектор-функция. Решение будем искать в классе функций $y(t) \in C[-\tau, \infty)$ таких, что $y(t) \in C^1[(k-1)\tau, k\tau]$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Хорошо известно, что решение начальной задачи (2.1) в этом классе функций существует и единственно.

В предположении, что выполнены условия теоремы 1, ниже устанавливаем оценки решений начальной задачи (2.1), характеризующие скорость экспоненциального убывания при $t \to \infty$.

Для формулировки результатов введем ряд обозначений. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) < -K(0),$$

т. е. $H(t)$ является решением краевой задачи вида (1.6). Тогда, как отмечалось во введении, из результатов работы авторов [25] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим эту матрицу T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицу $K(s)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1, рассмотрим функционал (1.11) и определим

$$V(0, \varphi) = \langle H(0)(\varphi(0) + D\varphi(-\tau)), (\varphi(0) + D\varphi(-\tau))\rangle + \int_{-\tau}^{0} \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds. \tag{2.2}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}P(t) = -\frac{d}{dt}H(t) &- H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0)\\ &- (H(t)A(t)D + K(0)D - H(t)B(t))[K(\tau) - D^*K(0)D]^{-1}\\ &\qquad \times (H(t)A(t)D + K(0)D - H(t)B(t))^*.\end{aligned}$$

Как будет показано в § 3, T-периодическая матрица $P(t)$ положительно определена. Обозначим минимальное собственное значение матрицы $P(t)$ через $p_{\min}(t) > 0$, минимальное собственное значение матрицы $H(t)$ — через $h_{\min}(t) > 0$. Пусть $k > 0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad s \in [0, \tau]. \tag{2.3}$$

Обозначим

$$\gamma(t) = \min\{p_{\min}(t),\ k\|H(t)\|\}, \tag{2.4}$$

$$\Phi = \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\|, \quad \alpha = \max_{t\in[0,T]} \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}}, \tag{2.5}$$

$$\beta(t) = \frac{\gamma(t)}{2\|H(t)\|}, \quad \beta^+ = \max_{t\in[0,T]} \beta(t), \quad \beta^- = \min_{t\in[0,T]} \beta(t). \tag{2.6}$$

Перейдем к формулировке утверждений. По аналогии с рассуждениями, проведенными в [28], выделяем три случая. Поскольку спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, то $\|D^j\| \to 0$ при $j \to \infty$. Пусть l — минимальное натуральное число такое, что $\|D^l\| < 1$. В зависимости от величины $\|D^l\|$ ниже в теоремах 2–4 устанавливаем оценки решений, если

$$\|D^l\| < e^{-l\beta^+\tau}, \quad e^{-l\beta^+\tau} \le \|D^l\| \le e^{-l\beta^-\tau}, \quad e^{-l\beta^-\tau} < \|D^l\| < 1$$

соответственно, где β^+ и β^- определены в (2.6).

Теорема 2. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Пусть*

$$\|D^l\| < e^{-l\beta^+\tau}. \tag{2.7}$$

Тогда для решения начальной задачи (2.1) имеет место оценка

$$\|y(t)\| \le \Bigg[\alpha(1 - \|D^l\|e^{l\beta^+\tau})^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{j\beta^+\tau} + \max\{\|D\|e^{\beta^+\tau}, \dots, \|D^l\|e^{l\beta^+\tau}\}\Phi\Bigg] e^{-\int_0^t \beta(\xi)\,d\xi}, \quad t > 0, \tag{2.8}$$

где α, $\beta(t)$, β^+, Φ определены в (2.5), (2.6).

Теорема 3. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Пусть*

$$e^{-l\beta^+\tau} \le \|D^l\| \le e^{-l\beta^-\tau}.$$

Тогда для решения начальной задачи (2.1) имеет место оценка

$$\|y(t)\| \le \Bigg[\alpha\left(1 + \frac{t}{l\tau}\right) \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{j\beta^+\tau} + \max\{1, \|D\|e^{\beta^+\tau}, \dots, \|D^{l-1}\|e^{(l-1)\beta^+\tau}\}\Phi\Bigg] e^{-\int_0^t \tilde\beta(\xi)\,d\xi}, \quad t > 0, \tag{2.9}$$

где α, $\beta(t)$, β^+, β^-, Φ определены в (2.5), (2.6),

$$\tilde\beta(t) = \min\left\{\beta(t),\ -\frac{1}{l\tau}\ln\|D^l\|\right\}. \tag{2.10}$$

Теорема 4. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Пусть*

$$e^{-l\beta^-\tau} < \|D^l\| < 1. \tag{2.11}$$

Тогда для решения начальной задачи (2.1) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \Bigg[\alpha\|D^l\|e^{l\beta^-\tau}(\|D^l\|e^{l\beta^-\tau}-1)^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^-\tau}$$
$$+\|D^l\|^{\frac{1}{l}-1}\max\{1,\|D\|,\dots,\|D^{l-1}\|\}\Phi\Bigg]\exp\left(\frac{t}{l\tau}\ln\|D^l\|\right), \quad t>0, \tag{2.12}$$

где α, β^-, Φ *определены в* (2.5), (2.6).

В § 3 вначале докажем теоремы 2–4. Из них непосредственно вытекает утверждение теоремы 1.

3. Доказательство основных результатов

Вначале докажем несколько вспомогательных лемм, которые будем использовать при доказательстве основных утверждений.

Лемма 1. *Пусть*

$$Q(t)=\begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t)\\ Q_{21}(t) & Q_{22}(t)\end{pmatrix}$$

— эрмитова матрица размера $2n\times 2n$ с непрерывными элементами, положительно определенная при $t\in[0,T]$. Тогда имеет место тождество

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}\right\rangle \equiv \big\langle \big[S_{11}(t)-S_{12}(t)S_{22}^{-1}(t)S_{21}(t)\big]\,(z_1+Dz_2),(z_1+Dz_2)\big\rangle$$
$$+\big\langle S_{22}(t)\big(S_{22}^{-1}(t)S_{21}(t)(z_1+Dz_2)+z_2\big),\big(S_{22}^{-1}(t)S_{21}(t)(z_1+Dz_2)+z_2\big)\big\rangle,\ z_1,z_2\in\mathbb{C}^n, \tag{3.1}$$

где D — произвольная постоянная матрица размера $n\times n$,

$$S_{11}(t)=Q_{11}(t),\quad S_{12}(t)=Q_{12}(t)-Q_{11}(t)D,$$

$$S_{21}(t)=Q_{21}(t)-D^*Q_{11}(t),\quad S_{22}(t)=Q_{22}(t)+D^*Q_{11}(t)D-Q_{21}(t)D-D^*Q_{12}(t),$$

причем матрицы $S_{11}(t)-S_{12}(t)S_{22}^{-1}(t)S_{21}(t)$, $S_{22}(t)$ положительно определены при $t\in[0,T]$.

Доказательство. Очевидно,

$$\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & D\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}\right\rangle \equiv \left\langle \begin{pmatrix} I & 0\\ -D^* & I\end{pmatrix}Q(t)\begin{pmatrix} I & -D\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$\equiv\left\langle S(t)\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\end{pmatrix}\right\rangle, \tag{3.2}$$

где

$$S(t)=\begin{pmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t)\\ S_{21}(t) & S_{22}(t)\end{pmatrix},\quad S_{11}(t)=Q_{11}(t),\quad S_{12}(t)=Q_{12}(t)-Q_{11}(t)D,$$

$$S_{21}(t)=Q_{21}(t)-D^*Q_{11}(t),\quad S_{22}(t)=Q_{22}(t)+D^*Q_{11}(t)D-Q_{21}(t)D-D^*Q_{12}(t).$$

Очевидно, матрица $S(t)$ положительно определена при $t\in[0,T]$ тогда и только тогда, когда матрица $Q(t)$ положительно определена при $t\in[0,T]$. Нетрудно проверить, что

$$S(t)\equiv\begin{pmatrix} I & S_{12}(t)S_{22}^{-1}(t)\\ 0 & I\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} S_{11}(t)-S_{12}(t)S_{22}^{-1}(t)S_{21}(t) & 0\\ 0 & S_{22}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0\\ S_{22}^{-1}(t)S_{21}(t) & I\end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица $S(t)$ положительно определена при $t\in[0,T]$ тогда и только тогда, когда матрицы $S_{11}(t)-S_{12}(t)S_{22}^{-1}(t)S_{21}(t)$, $S_{22}(t)$ положительно определены при $t\in[0,T]$. В силу преобразований, выполненных выше, имеем

$$\left\langle S(t)\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\equiv\left\langle\left[S_{11}(t)-S_{12}(t)S_{22}^{-1}(t)S_{21}(t)\right](z_1+Dz_2),(z_1+Dz_2)\right\rangle$$

$$+\left\langle S_{22}(t)\left(S_{22}^{-1}(t)S_{21}(t)(z_1+Dz_2)+z_2\right),\left(S_{22}^{-1}(t)S_{21}(t)(z_1+Dz_2)+z_2\right)\right\rangle.$$

Отсюда в силу (3.2) получаем (3.1).

Лемма 1 доказана.

В следующей лемме выведем оценку для решения начальной задачи (2.1), которая имеет предварительный характер и будет существенно использоваться при получении основных результатов.

Лемма 2. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы* 1. *Тогда для решения начальной задачи* (2.1) *имеет место оценка*

$$\langle H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle+\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds$$

$$\le V(0,\varphi)\exp\left(-\int\limits_0^t\frac{\gamma(\xi)}{\|H(\xi)\|}d\xi\right),\quad t>0,\tag{3.3}$$

где $V(0,\varphi)$, $\gamma(t)$ определены в (2.2), (2.4) *соответственно.*

Доказательство. При доказательстве будем следовать схеме из [23, 24, 28]. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.1). Используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$, указанные выше, рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского (1.11) на решении. Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\equiv\left\langle\frac{d}{dt}H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\right\rangle$$

$$+\langle H(t)(A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle$$

$$+\langle H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),(A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau))\rangle$$

$$+\langle K(0)y(t),y(t)\rangle-\langle K(\tau)y(t-\tau),y(t-\tau)\rangle+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds.$$

Используя матрицу $C(t)$, определенную в теореме 1, имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\equiv-\left\langle C(t)\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds. \tag{3.4}$$

В силу доказанной леммы 1 можно записать

$$\left\langle C(t)\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$\equiv\left\langle\left[S_{11}(t)-S_{12}(t)S_{22}^{-1}S_{21}(t)\right](y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\right\rangle+\langle S_{22}z(t),z(t)\rangle,$$

где

$$S_{11}(t)=-\frac{d}{dt}H(t)-H(t)A(t)-A^*(t)H(t)-K(0),$$
$$S_{12}(t)=H(t)A(t)D+K(0)D(t)-H(t)B(t),\quad S_{21}(t)=S_{12}^*(t),$$
$$S_{22}=K(\tau)-D^*K(0)D,\quad z(t)=S_{22}^{-1}S_{21}(t)(y(t)+Dy(t-\tau))+y(t-\tau).$$

Отсюда получаем

$$\left\langle C(t)\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$\equiv\langle P(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle+\langle Rz(t),z(t)\rangle,$$

где

$$P(t)=-\frac{d}{dt}H(t)-H(t)A(t)-A^*(t)H(t)-K(0)$$
$$-(H(t)A(t)D+K(0)D-H(t)B(t))[K(\tau)-D^*K(0)D]^{-1}$$
$$\times(H(t)A(t)D+K(0)D-H(t)B(t))^*,$$

$$R=K(\tau)-D^*K(0)D$$

— положительно определенные матрицы,

$$z(t)=R^{-1}(H(t)A(t)D+K(0)D-H(t)B(t))^*(y(t)+Dy(t-\tau))+y(t-\tau).$$

Следовательно,

$$\left\langle C(t)\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle\geq\langle P(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle$$
$$\geq p_{\min}(t)\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^2,$$

где $p_{\min}(t)>0$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Используя матрицу $H(t)$, имеем

$$\left\langle C(t)\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle\geq\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle.$$

В силу (3.4) отсюда получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\left\langle H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\right\rangle + \int_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds.$$

Используя условие (2.3), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle - k\int_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\, ds.$$

Тогда в силу определения функционала (1.11)

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\frac{\gamma(t)}{\|H(t)\|}V(t,y),$$

где $\gamma(t)=\min\{p_{\min}(t),k\|H(t)\|\}$. Из этого дифференциального неравенства следует оценка

$$V(t,y) \le V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \frac{\gamma(\xi)}{\|H(\xi)\|}d\xi\right),$$

которая с учетом определения функционала (1.11) дает (3.3).

Лемма 2 доказана.

Непосредственно из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для решения начальной задачи* (2.1) *имеет место оценка*

$$\|y(t)+Dy(t-\tau)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}}\exp\left(-\int_0^t \frac{\gamma(\xi)}{2\|H(\xi)\|}d\xi\right), \quad t>0, \tag{3.5}$$

где $V(0,\varphi)$, $\gamma(t)$ *определены в* (2.2), (2.4) *соответственно,* $h_{\min}(t)>0$ — *минимальное собственное значение матрицы* $H(t)$.

Опираясь на полученный результат, ниже получаем оценки решений начальной задачи (2.1) на промежутках $t\in[k\tau,(k+1)\tau)$, $k=0,1,\dots$.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для решения начальной задачи* (2.1) *на каждом промежутке* $t\in[k\tau,(k+1)\tau)$, $k=0,1,\dots$, *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \alpha\sum_{j=0}^{k}\|D^j\|e^{-\int_0^{t-j\tau}\beta(\xi)\,d\xi} + \|D^{k+1}\|\Phi, \tag{3.6}$$

где α, $\beta(t)$, Φ *определены в* (2.5), (2.6).

Доказательство. Очевидно, в силу (3.5) при $t\in[0,\tau)$ с учетом обозначений (2.5), (2.6) имеем

$$\|y(t)\| \le \alpha e^{-\int_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \|Dy(t-\tau)\| \le \alpha e^{-\int_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \|D\|\Phi,$$

что дает требуемое неравенство (3.6) при $k=0$.

Пусть $t \in [\tau, 2\tau)$. В силу (3.5) с учетом обозначений (2.5), (2.6) имеем

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &\le \alpha e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \|Dy(t-\tau)\| \\
&\le \alpha e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \|Dy(t-\tau) + D^2 y(t-2\tau)\| + \|D^2 y(t-2\tau)\| \\
&\le \alpha e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \|D\|\,\|y(t-\tau) + Dy(t-2\tau)\| + \|D^2\|\,\|y(t-2\tau)\| \\
&\le \alpha e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\|D\| e^{-\int\limits_0^{t-\tau} \beta(\xi)\,d\xi} + \|D^2\|\Phi,
\end{aligned}$$

что дает требуемое неравенство (3.6) при $k=1$.

Пусть $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$. Нетрудно выписать цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &\le \alpha e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \|Dy(t-\tau)\| \\
&\le \alpha e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \|Dy(t-\tau) + D^2 y(t-2\tau)\| + \|D^2 y(t-2\tau) + D^3 y(t-3\tau)\| + \dots \\
&\quad + \|D^k y(t-k\tau) + D^{k+1} y(t-(k+1)\tau)\| + \|D^{k+1} y(t-(k+1)\tau)\| \\
&\le \alpha e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \|D\|\,\|y(t-\tau) + Dy(t-2\tau)\| + \|D^2\|\,\|y(t-2\tau) + Dy(t-3\tau)\| + \dots \\
&\quad + \|D^k\|\,\|y(t-k\tau) + Dy(t-(k+1)\tau)\| + \|D^{k+1}\|\,\|y(t-(k+1)\tau)\|.
\end{aligned}$$

В силу (3.5) получаем

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| \le \alpha e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\|D\| e^{-\int\limits_0^{t-\tau} \beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\|D^2\| e^{-\int\limits_0^{t-2\tau} \beta(\xi)\,d\xi} + \dots \\
+ \alpha\|D^k\| e^{-\int\limits_0^{t-k\tau} \beta(\xi)\,d\xi} + \|D^{k+1}\|\Phi,
\end{aligned}$$

что дает требуемое неравенство (3.6).

Лемма 4 доказана.

Перейдем непосредственно к получению оценок для решений начальной задачи (2.1) на всей полупрямой $\{t>0\}$.

Доказательство теоремы 2. Используя (3.6), для решения начальной задачи (2.1) на каждом промежутке $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, \dots$, можно выписать неравенства

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &\le \left[\alpha \sum_{j=0}^{k} \|D^j\| e^{\int\limits_{t-j\tau}^{t} \beta(\xi)\,d\xi} + \|D^{k+1}\| e^{\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi}\Phi\right] e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} \\
&\le \left[\alpha \sum_{j=0}^{k} \|D^j\| e^{j\beta^+\tau} + \|D^{k+1}\| e^{(k+1)\beta^+\tau}\Phi\right] e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi},
\end{aligned}$$

где β^+ определено в (2.6). Отсюда, учитывая условие (2.7) на $\|D^l\|$, для решения начальной задачи (2.1) на всей полупрямой $\{t>0\}$ получаем оценку

$$\|y(t)\| \le \left[\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \|D^j\| e^{j\beta^+\tau} + \max\{\|D\| e^{\beta^+\tau}, \dots, \|D^l\| e^{l\beta^+\tau}\}\Phi\right] e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}$. Очевидно,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}=\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}+\sum_{j=l}^{2l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}+\sum_{j=2l}^{3l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}+\dots.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}\le\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}+\|D^l\|e^{l\beta^+\tau}\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}$$
$$+(\|D^l\|e^{l\beta^+\tau})^2\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}+\dots$$
$$=(1+\|D^l\|e^{l\beta^+\tau}+(\|D^l\|e^{l\beta^+\tau})^2+\dots)\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}.$$

Отсюда, поскольку согласно условию (2.7) $\|D^l\|e^{l\beta^+\tau}<1$, имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}\le(1-\|D^l\|e^{l\beta^+\tau})^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}.$$

Используя это неравенство, из (3.7) получаем требуемую оценку (2.8).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Вначале проведем доказательство в случае $l=1$. Из оценки (3.6) для решения начальной задачи (2.1) на каждом промежутке $t\in[k\tau,(k+1)\tau)$, $k=0,1,\dots$, имеем

$$\|y(t)\|\le\alpha\sum_{j=0}^{k}e^{\int\limits_{t-j\tau}^{t}\frac{1}{\tau}\ln\|D\|\,d\xi-\int\limits_{0}^{t-j\tau}\beta(\xi)\,d\xi}+\|D^{k+1}\|\Phi. \tag{3.8}$$

В силу определения функции $\tilde\beta(t)$ в (2.10) для функций, стоящих в показателе экспонент, справедливы неравенства

$$\int\limits_{t-j\tau}^{t}\frac{1}{\tau}\ln\|D\|\,d\xi-\int\limits_{0}^{t-j\tau}\beta(\xi)\,d\xi\le-\int\limits_{0}^{t}\tilde\beta(\xi)\,d\xi.$$

Следовательно, из (3.8) получаем

$$\|y(t)\|\le\alpha(k+1)e^{-\int\limits_0^t\tilde\beta(\xi)\,d\xi}+\|D^{k+1}\|\Phi.$$

Отсюда на каждом промежутке $t\in[k\tau,(k+1)\tau)$, $k=0,1,\dots$, имеем

$$\|y(t)\|\le\alpha\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-\int\limits_0^t\tilde\beta(\xi)\,d\xi}+\|D\|^{k+1}\Phi=\alpha\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-\int\limits_0^t\tilde\beta(\xi)\,d\xi}+e^{(k+1)\ln\|D\|}\Phi$$
$$\le\alpha\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-\int\limits_0^t\tilde\beta(\xi)\,d\xi}+e^{\frac{t}{\tau}\ln\|D\|}\Phi.$$

В силу определения функции $\tilde\beta(t)$ получаем

$$\|y(t)\| \le \alpha\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-\int\limits_0^t \tilde\beta(\xi)\,d\xi} + e^{-\int\limits_0^t \tilde\beta(\xi)\,d\xi}\Phi,$$

что дает требуемое неравенство (2.9) в случае $l=1$.

Пусть $l\ge 2$. Как доказано в лемме 4, для решения начальной задачи (2.1) на каждом промежутке $t\in[k\tau,(k+1)\tau)$, $k=0,1,\dots$, справедлива оценка (3.6).

Вначале рассмотрим случай, когда $l\le k\le 2l-1$. Обозначим первое слагаемое в (3.6) через $I_1(t)$ и перепишем его следующим образом:

$$I_1(t) = \alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{-\int\limits_0^{t-j\tau}\beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\sum_{j=l}^{k}\|D^j\|e^{-\int\limits_0^{t-j\tau}\beta(\xi)\,d\xi}$$
$$= \alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\int\limits_{t-j\tau}^{t}\beta(\xi)\,d\xi}\, e^{-\int\limits_0^{t}\beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\sum_{j=l}^{k}\|D^j\|e^{-\int\limits_0^{t-j\tau}\beta(\xi)\,d\xi}.$$

С учетом определения числа β^+ в (2.6) имеем

$$I_1(t) \le \alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}e^{-\int\limits_0^{t}\beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\sum_{j=l}^{k}\|D^j\|e^{-\int\limits_0^{t-j\tau}\beta(\xi)\,d\xi}$$
$$\le \alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}e^{-\int\limits_0^{t}\beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\sum_{j=0}^{k-l}\|D^l\|\|D^j\|e^{-\int\limits_0^{t-(l+j)\tau}\beta(\xi)\,d\xi}$$
$$= \alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}e^{-\int\limits_0^{t}\beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\sum_{j=0}^{k-l}\|D^j\|e^{\int\limits_{t-(l+j)\tau}^{t-l\tau}\beta(\xi)\,d\xi}\,\|D^l\|e^{-\int\limits_0^{t-l\tau}\beta(\xi)\,d\xi}$$
$$\le \alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}e^{-\int\limits_0^{t}\beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\sum_{j=0}^{k-l}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}\,\|D^l\|e^{-\int\limits_0^{t-l\tau}\beta(\xi)\,d\xi}.$$

Используя определение функции $\tilde\beta(t)$ в (2.10), получаем

$$\|D^l\|e^{-\int\limits_0^{t-l\tau}\beta(\xi)\,d\xi} = e^{\int\limits_{t-l\tau}^{t}\frac{1}{l\tau}\ln\|D^l\|\,d\xi-\int\limits_0^{t-l\tau}\beta(\xi)\,d\xi} \le e^{-\int\limits_0^{t}\tilde\beta(\xi)\,d\xi}.$$

Следовательно,

$$I_1(t) \le \alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}e^{-\int\limits_0^{t}\beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\sum_{j=0}^{k-l}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}\,e^{-\int\limits_0^{t}\tilde\beta(\xi)\,d\xi}.$$

Поскольку $l\le k\le 2l-1$, имеем $1\le\frac{t}{l\tau}<2$. Тогда

$$I_1(t) \le \alpha\left(1+\frac{t}{l\tau}\right)\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}\,e^{-\int\limits_0^{t}\tilde\beta(\xi)\,d\xi}. \tag{3.9}$$

Рассмотрим второе слагаемое в оценке (3.6) при $t\in[k\tau,(k+1)\tau)$:

$$I_2(t) = \|D^{k+1}\|\Phi.$$

Если $l \le k \le 2l-2$, то

$$I_2(t) \le \|D^l\|\,\|D^{k+1-l}\|\Phi = e^{\int\limits_{t-l\tau}^{t} \frac{1}{l\tau}\ln\|D^l\|\,d\xi}\|D^{k+1-l}\|\Phi$$
$$= e^{\int\limits_{t-l\tau}^{t} \frac{1}{l\tau}\ln\|D^l\|\,d\xi - \int\limits_0^{t-l\tau}\beta(\xi)\,d\xi} e^{\int\limits_0^{t-l\tau}\beta(\xi)\,d\xi}\|D^{k+1-l}\|\Phi.$$

Отсюда в силу определений β^+ в (2.6) и $\tilde\beta(t)$ в (2.10) получаем

$$I_2(t) \le e^{-\int\limits_0^t \tilde\beta(\xi)\,d\xi} e^{(t-l\tau)\beta^+}\|D^{k+1-l}\|\Phi \le e^{-\int\limits_0^t \tilde\beta(\xi)\,d\xi} e^{(k+1-l)\beta^+\tau}\|D^{k+1-l}\|\Phi.$$

Следовательно,

$$I_2(t) \le \max\{\|D\|e^{\beta^+\tau},\dots,\|D^{l-1}\|e^{(l-1)\beta^+\tau}\}e^{-\int\limits_0^t \tilde\beta(\xi)\,d\xi}\Phi. \tag{3.10}$$

Если $k = 2l-1$, то $(2l-1)\tau \le t < 2l\tau$. Тогда, очевидно,

$$I_2(t) \le \|D^l\|^2\Phi = e^{2\ln\|D^l\|}\Phi \le e^{\frac{t}{l\tau}\ln\|D^l\|}\Phi = e^{\int\limits_0^t \frac{1}{l\tau}\ln\|D^l\|\,d\xi}\Phi \le e^{-\int\limits_0^t \tilde\beta(\xi)\,d\xi}\Phi.$$

С учетом оценки (3.10) при $l \le k \le 2l-1$ для второго слагаемого в (3.6) имеем неравенство

$$I_2(t) \le \max\{1,\|D\|e^{\beta^+\tau},\dots,\|D\|^{l-1}e^{(l-1)\beta^+\tau}\}e^{-\int\limits_0^t \tilde\beta(\xi)\,d\xi}\Phi. \tag{3.11}$$

Оценки (3.9) и (3.11) дают требуемое неравенство (2.9) в случае $l \ge 2$ при $t \in [k\tau,(k+1)\tau)$, $l \le k \le 2l-1$. Отметим, что получение оценки (2.9) при $0 \le k \le l-1$ не вызывает затруднений.

Перейдем к случаю $ml \le k \le (m+1)l-1$, $m = 2,3,\dots$. Вначале рассмотрим первое слагаемое $I_1(t)$ в (3.6) и перепишем его следующим образом:

$$I_1(t) = \alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\int\limits_{t-j\tau}^{t}\beta(\xi)\,d\xi} e^{-\int\limits_0^t\beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\sum_{j=l}^{2l-1}\|D^j\|e^{-\int\limits_0^{t-j\tau}\beta(\xi)\,d\xi} + \dots$$
$$+ \alpha\sum_{j=(m-1)l}^{ml-1}\|D^j\|e^{-\int\limits_0^{t-j\tau}\beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\sum_{j=ml}^{k}\|D^j\|e^{-\int\limits_0^{t-j\tau}\beta(\xi)\,d\xi}.$$

С учетом определения числа β^+ в (2.6) имеем

$$I_1(t) \le \alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}e^{-\int\limits_0^t\beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^l\|\,\|D^j\|e^{-\int\limits_0^{t-(l+j)\tau}\beta(\xi)\,d\xi} + \dots$$
$$+ \alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^l\|^{m-1}\|D^j\|e^{-\int\limits_0^{t-((m-1)l+j)\tau}\beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\sum_{j=0}^{k-ml}\|D^l\|^m\|D^j\|e^{-\int\limits_0^{t-(ml+j)\tau}\beta(\xi)\,d\xi}.$$
$$= \alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}e^{-\int\limits_0^t\beta(\xi)\,d\xi} + \alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\int\limits_{t-(l+j)\tau}^{t-l\tau}\beta(\xi)\,d\xi}\|D^l\|e^{-\int\limits_0^{t-l\tau}\beta(\xi)\,d\xi} + \dots$$

$$+\alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\int\limits_{t-((m-1)l+j)\tau}^{t-(m-1)l\tau}\beta(\xi)\,d\xi}\|D^l\|^{m-1}e^{-\int\limits_0^{t-(m-1)l\tau}\beta(\xi)\,d\xi}$$

$$+\alpha\sum_{j=0}^{k-ml}\|D^j\|e^{\int\limits_{t-(ml+j)\tau}^{t-ml\tau}\beta(\xi)\,d\xi}\|D^l\|^m e^{-\int\limits_0^{t-ml\tau}\beta(\xi)\,d\xi}$$

$$\le\alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}e^{-\int\limits_0^t\beta(\xi)\,d\xi}+\alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}\|D^l\|e^{-\int\limits_0^{t-l\tau}\beta(\xi)\,d\xi}+\dots$$

$$+\alpha\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}\|D^l\|^{m-1}e^{-\int\limits_0^{t-(m-1)l\tau}\beta(\xi)\,d\xi}$$

$$+\alpha\sum_{j=0}^{k-ml}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}\|D^l\|^m e^{-\int\limits_0^{t-ml\tau}\beta(\xi)\,d\xi}.$$

Как выше, используя определение функции $\tilde\beta(t)$ в (2.10), при $i=1,\dots,m$ получаем

$$\|D^l\|^i e^{-\int\limits_0^{t-il\tau}\beta(\xi)\,d\xi}=e^{\int\limits_{t-il\tau}^{t}\frac{1}{l\tau}\ln\|D^l\|\,d\xi-\int\limits_0^{t-il\tau}\beta(\xi)\,d\xi}\le e^{-\int\limits_0^t\tilde\beta(\xi)\,d\xi}.$$

Следовательно,

$$I_1(t)\le\alpha(1+m)\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}e^{-\int\limits_0^t\tilde\beta(\xi)\,d\xi}.$$

Поскольку $ml\le k\le(m+1)l-1$, то $m\le\frac{t}{l\tau}<m+1$. Тогда

$$I_1(t)\le\alpha\left(1+\frac{t}{l\tau}\right)\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{j\beta^+\tau}\ e^{-\int\limits_0^t\tilde\beta(\xi)\,d\xi}.\tag{3.12}$$

Рассмотрим второе слагаемое $I_2(t)$ в оценке (3.6) при $t\in[k\tau,(k+1)\tau)$. Если $ml\le k\le(m+1)l-2$, то

$$I_2(t)\le\|D^l\|^m\,\|D^{k+1-ml}\|\Phi=e^{\int\limits_{t-ml\tau}^{t}\frac{1}{l\tau}\ln\|D^l\|\,d\xi-\int\limits_0^{t-ml\tau}\beta(\xi)\,d\xi}e^{\int\limits_0^{t-ml\tau}\beta(\xi)\,d\xi}\|D^{k+1-ml}\|\Phi$$

$$\le e^{-\int\limits_0^t\tilde\beta(\xi)\,d\xi}e^{(t-ml\tau)\beta^+}\|D^{k+1-ml}\|\Phi\le e^{-\int\limits_0^t\tilde\beta(\xi)\,d\xi}e^{(k+1-ml)\beta^+\tau}\|D^{k+1-ml}\|\Phi.$$

Следовательно,

$$I_2(t)\le\max\{\|D\|e^{\beta^+\tau},\dots,\|D^{l-1}\|e^{(l-1)\beta^+\tau}\}e^{-\int\limits_0^t\tilde\beta(\xi)\,d\xi}\Phi.\tag{3.13}$$

Если $k=(m+1)l-1$, то $((m+1)l-1)\tau\le t<(m+1)l\tau$. Тогда, очевидно,

$$I_2(t)\le\|D^l\|^{m+1}\Phi=e^{(m+1)\ln\|D^l\|}\Phi\le e^{\frac{t}{l\tau}\ln\|D^l\|}\Phi\le e^{-\int\limits_0^t\tilde\beta(\xi)\,d\xi}\Phi.$$

С учетом оценки (3.13) при $ml \le k \le (m+1)l-1$ для второго слагаемого в (3.6) имеем неравенство

$$I_2(t) \le \max\{1, \|D\|e^{\beta^+\tau}, \dots, \|D^{l-1}\|e^{(l-1)\beta^+\tau}\}e^{-\int\limits_0^t \tilde\beta(\xi)\,d\xi}\Phi. \tag{3.14}$$

В силу произвольности m оценки (3.12) и (3.14) дают требуемое неравенство (2.9) в случае $l \ge 2$ при всех $t > 0$.

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Используя неравенство (3.6), доказанное в лемме 4, для решения начальной задачи (2.1) на каждом промежутке $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, \dots$, можно выписать оценку

$$\|y(t)\| \le \alpha \sum_{j=0}^{k} \|D^j\|e^{-\beta^-(t-j\tau)} + \|D^{k+1}\|\Phi, \tag{3.15}$$

где β^- определено в (2.6).

Вначале рассмотрим первое слагаемое в (3.15). Очевидно, при $0 \le k \le l-1$

$$\sum_{j=0}^{k} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau} \le \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau}.$$

Пусть $l \le k \le 2l-1$. Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau} &= \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau} + \sum_{j=l}^{k} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau} \\ &\le \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau} + \|D^l\|e^{l\beta^-\tau}\sum_{j=0}^{k-l} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau} \\ &\le \|D^l\|e^{l\beta^-\tau}[1 + (\|D^l\|e^{l\beta^-\tau})^{-1}]\sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau}.\end{aligned}$$

Пусть $ml \le k \le (m+1)l-1$, $m = 2, 3, \dots$. Очевидно,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau} &\le \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau} \\ &+ \|D^l\|e^{l\beta^-\tau}\sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau} + \dots + \|D^{ml}\|e^{ml\beta^-\tau}\sum_{j=0}^{k-ml} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau} \\ &\le [1 + \|D^l\|e^{l\beta^-\tau} + \dots + \|D^l\|^m e^{ml\beta^-\tau}]\sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau} &\le \|D^l\|^m e^{ml\beta^-\tau} \\ &\times [1 + (\|D^l\|e^{l\beta^-\tau})^{-1} + \dots + (\|D^l\|e^{l\beta^-\tau})^{-m}]\sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{j\beta^-\tau}\end{aligned}$$

$$\leq \|D^l\|^m e^{ml\beta^-\tau}[1 + (\|D^l\|e^{l\beta^-\tau})^{-1} + \dots + (\|D^l\|e^{l\beta^-\tau})^{-m} + \dots] \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{j\beta^-\tau}.$$

Поскольку $\|D^l\|e^{l\beta^-\tau} > 1$ согласно условию (2.11), имеем

$$\sum_{j=0}^{k} \|D^j\| e^{j\beta^-\tau} \leq \|D^l\|^m e^{ml\beta^-\tau}[1 - (\|D^l\|e^{l\beta^-\tau})^{-1}]^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{j\beta^-\tau}.$$

Учитывая, что $ml\tau \leq t < (m+1)l\tau$, получаем

$$\sum_{j=0}^{k} \|D^j\| e^{-\beta^-(t-j\tau)} \leq \|D^l\|^m e^{-\beta^-(t-ml\tau)}[1 - (\|D^l\|e^{l\beta^-\tau})^{-1}]^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{j\beta^-\tau}$$

$$\leq \|D^l\|^{\frac{t}{l\tau}}[1 - (\|D^l\|e^{l\beta^-\tau})^{-1}]^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{j\beta^-\tau}.$$

Таким образом, для первого слагаемого в (3.15) при любом k приходим к оценке

$$\alpha \sum_{j=0}^{k} \|D^j\| e^{-\beta^-(t-j\tau)} \leq \alpha[1 - (\|D^l\|e^{l\beta^-\tau})^{-1}]^{-1}$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{j\beta^-\tau} \right) \exp\left(\frac{t}{l\tau} \ln \|D^l\| \right). \quad (3.16)$$

Рассмотрим второе слагаемое в (3.15). Очевидно, при $0 \leq k \leq l-2$

$$\|D^{k+1}\| \leq \max\{\|D\|, \dots, \|D^{l-1}\|\}.$$

Пусть $ml - 1 \leq k \leq (m+1)l - 2$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\|D^{k+1}\| \leq \|D^l\|^m \|D^{k+1-ml}\| \leq \|D^l\|^m \max\{1, \|D\|, \dots, \|D^{l-1}\|\}.$$

Поскольку $\|D^l\| < 1$ и $t < ((m+1)l - 1)\tau$, то

$$\|D^l\|^m \leq \|D^l\|^{\frac{t-(l-1)\tau}{l\tau}} = \|D^l\|^{\frac{1}{l}-1} \exp\left(\frac{t}{l\tau} \ln \|D^l\| \right).$$

Тогда в силу произвольности m имеем

$$\|D^{k+1}\| \leq \|D^l\|^{\frac{1}{l}-1} \max\{1, \|D\|, \dots, \|D^{l-1}\|\} \exp\left(\frac{t}{l\tau} \ln \|D^l\| \right)$$

для любого k. Учитывая оценку (3.16) для первого слагаемого в (3.15), приходим к неравенству (2.12).

Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Из оценок (2.8), (2.9), (2.12), установленных в теоремах 2–4, вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (1.1) при выполнении условий теоремы 1.

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

2. *Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D.* Introduction to the theory and applications of functional-differential equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. (Math. Appl.; V. 463).

3. *Gu K., Kharitonov V. L., Chen J.* Stability of time-delay systems. Control engineering. Boston: Birkhäuser, 2003.

4. *Кореневский Д. Г.* Дестабилизирующий эффект параметрического белого шума в непрерывных и дискретных динамических системах: авториз. пер. с укр. Киев: Академпериодика, 2008.

5. *Халанай А.* Теория устойчивости линейных периодических систем с запаздыванием // Acad. Républ. Popul. Roum., Rev. Math. Pures Appl. 1961. V. 6, N 4. P. 633–653.

6. *Hahn W.* On difference differential equations with periodic coefficients // J. Math. Anal. Appl. 1961. V. 3, N 1. P. 70–101.

7. *Stokes A. P.* A Floquet theory for functional differential equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1962. V. 48, N 8. P. 1330–1334.

8. *Зверкин А. М.* Дифференциально-разностные уравнения с периодическими коэффициентами // Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. С. 498–535.

9. *Шиманов С. Н.* Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами и запаздыванием. Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1983.

10. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

11. *Германович О. П.* Линейные периодические уравнения нейтрального типа и их приложения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.

12. *Комленко Ю. В., Тонков Е. Л.* Представление Ляпунова — Флоке для дифференциальных уравнений с последействием // Изв. вузов. Математика. 1995. № 10. С. 40–45.

13. *Долгий Ю. Ф.* Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1996.

14. *Шильман С. В.* Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука, 1978.

15. *Малыгина В. В.* Об устойчивости уравнений с периодическими параметрами // Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь, 1987. С. 41–43.

16. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

17. *Березанский Л. М.* Развитие W-метода Н. В. Азбелева в задачах устойчивости решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 5. С. 739–750.

18. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.

19. *Долгий Ю. Ф., Ким А. В.* К методу функционалов Ляпунова для систем с последействием // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1313–1318.

20. *Алексенко Н. В., Романовский Р. К.* Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 2. С. 147–153.

21. *Романовский Р. К., Троценко Г. А.* Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с почти периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 444–453.

22. *Хусаинов Д. Я., Кожаметов А. Т.* Сходимость решений неавтономных систем нейтрального типа // Изв. вузов. Математика. 2006. № 1. С. 68–72.

23. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

24. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

25. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.

26. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

27. *Матвеева И. И.* Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 122–132.

28. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, N 3. P. 119–130.

29. *Демиденко Г. В., Водопьянов Е. С., Скворцова М. А.* Оценки решений линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими отклонениями аргумента // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 53–60.

30. *Kharitonov V., Mondié S., Collado J.* Exponential estimates for neutral time-delay systems: an LMI approach // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. V. 50, N 5. P. 666–670.

31. *Baštinec J., Diblík J., Khusainov D.Ya., Ryvolová A.* Exponential stability and estimation of solutions of linear differential systems of neutral type with constant coefficients // Bound. Value Probl. 2010, Art. ID 956121, 20 pp.

Статья поступила 14 марта 2014 г.

Демиденко Геннадий Владимирович, Матвеева Инесса Изотовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru, matveeva@math.nsc.ru