Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5

УДК 517.54

ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ГРУППАХ КАРНО С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ГУРСА — ДАРБУ

Д. В. Исангулова

Аннотация. Доказана теорема Лиувилля о конформных отображениях при минимальных предположениях гладкости на одной бесконечной серии групп Карно $\mathbb{J}^k$ с субримановой метрикой с распределением Гурса — Дарбу, $k \geq 2$: всякое отображение с 1-ограниченным искажением связной области U на группе $\mathbb{J}^k$ равно сужению на U действия элемента конечномерной группы 1-квазиконфорных гладких отображений.

Ключевые слова: отображение с ограниченным искажением, группа Карно, коэрцитивная оценка.

Юрию Григорьевичу Решетняку
к 85-летнему юбилею

§ 1. Введение

Теорема Лиувилля о конформных отображениях при минимальных предположениях гладкости формулируется следующим образом: всякое непостоянное отображение с 1-ограниченным искажением связной области является сужением действия мёбиусова отображения. Другими словами, рассматривается отображение класса Соболева, дифференциал которого — общая ортогональная матрица почти всюду. Исходя из таких общих предпосылок, надо показать, что оно попадает в конечномерный класс гладких отображений. Теорема Лиувилля о конформных отображениях при минимальных предположениях гладкости в случае евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, была доказана Ю. Г. Решетняком в 1966 г. [1].

Очевидно, что теорема Лиувилля может быть сформулирована на различных метрических пространствах, в частности на субримановых. Субримановы пространства (также известные как пространства Карно — Каратеодори) являются пространствами, на геометрию которых наложены ограничения: движение возможно только вдоль заданного набора направлений, меняющихся от точки к точке. Субриманова геометрия активно изучается многими группами ученых в различных странах, поскольку субримановы структуры возникают в моделях неголономной и квантовой механики, термодинамики, нейробиологии,

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12–01–31205-мол-а) и Гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

в многомерном комплексном анализе, контактной и гиперболической геометриях, теории оптимального управления, теории субэллиптических уравнений и т. д. (см., например, [2]).

Квазиконформный анализ на группах Карно (связных односвязных нильпотентных группах Ли с градуированной алгеброй Ли с субримановой метрикой) стал предметом интенсивного исследования после того, как были установлены связь квазиконформных отображений и функциональных классов на однородных группах [3], а также жесткость типа Мостова гиперболических пространственных форм [4]. На данный момент на группах Карно заложены такие базовые понятие анализа, как дифференцируемость, теория пространств Соболева и отображений с ограниченным искажением (см. [5]), доказана C^∞-гладкость 1-квазиконформных отображений [6]. В субримановом случае аналог теоремы Лиувилля о конформных отображениях при минимальных предположениях гладкости доказан только на модельных примерах групп Карно: С. К. Водопьяновым на группах Гейзенберга [7] (позже, другим методом, Н. С. Даирбековым [8]) и автором на группе Энгеля [9].

В данной работе рассматриваются группы Карно $\mathbb{J}^k$, $k \geq 2$, с распределением Гурса — Дарбу, которые являются $(k+1)$-ступенчатыми $(k+2)$-мерными группами Карно с двумерным горизонтальным подрасслоением. Группа $\mathbb{J}^k$ изоморфна группе джетов $J^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ из [10]. Случай $k=1$ соответствует группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1$, а $k=2$ — группе Энгеля. На всех группах $\mathbb{J}^k$ известна нежесткость пространства, т. е. существование бесконечномерного множества контактных отображений (см., например, [10]).

Элементы группы $\mathbb{J}^k$ можно рассматривать в виде точек $\{\mathbf{x} = (x, y_0, y_1, \dots, y_k)\}$ из $\mathbb{R}^{k+2}$ с левоинвариантыми векторными полями

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_i = \sum_{j=i}^{k} \frac{x^{j-i}}{(j-i)!}\frac{\partial}{\partial y_j}, \quad i = 0, \dots, k. \tag{1}$$

Векторные поля X, Y_0 называются *горизонтальными* и удовлетворяют условию Хёрмандера, т. е. они своими коммутаторами порождают все касательное расслоение: $Y_{i+1} = [X, Y_i]$, $i = 0, \dots, k-1$, $[X, Y_k] = 0$.

Расстояние d (*внутренняя метрика Карно — Каратеодори*) между точками $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ из $\mathbb{J}^k$ определяется как точная нижняя грань длин горизонтальных кривых, соединяющих точки $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, и является неримановым (кусочно гладкая кривая называется *горизонтальной*, если ее касательный вектор принадлежит горизонтальному подрасслоению $H = \operatorname{span}\{X, Y_0\}$ п. в.). Поскольку векторные поля (1) удовлетворяют условию Хёрмандера, метрика d корректно определена и является конечной левоинвариантной метрикой (см., например, [11, теорема 19.1.3]).

Напомним метрическое определение квазиконформности: гомеоморфизм $F\colon \Omega \to \Omega'$ связных областей $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{J}^k$ называется *K-квазиконформным*, если

$$\varlimsup_{r\to+0} \frac{\max\limits_{\eta\in\Omega}\{d(F(\xi), F(\eta)) \mid d(\xi,\eta) = r\}}{\min\limits_{\eta\in\Omega}\{d(F(\xi), F(\eta)) \mid d(\xi,\eta) = r\}} \leq K < \infty \quad \text{для всякого } \xi \in \Omega. \tag{2}$$

На группе $\mathbb{J}^k$, $k > 1$, группа гладких 1-квазиконформных отображений M образована следующими отображениями [10]:

1) левый сдвиг $\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{J}^k$;

2) растяжение $\delta_s \mathbf{x} = (sx, sy_0, s^2 y_1, \dots, s^{k+1} y_k)$, $s > 0$;

3) отражения $\iota(\mathbf{x}) = (-x, y_0, -y_1, \dots, (-1)^k y_k)$, $\sigma(\mathbf{x}) = (-x, -y_0, y_1, \dots, (-1)^{k+1} y_k)$.

Отметим, что в отличие от евклидовых пространств и групп Гейзенберга на группах $\mathbb{J}^k$, $k > 1$, не определены аналоги инверсий.

Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема (аналог теоремы Лиувилля). *Если F — отображение с 1-ограниченным искажением (см. определение 2) связной области $U \subset \mathbb{J}^k$, то F равно сужению на U действия элемента группы M.*

В евклидовом случае и на группах Гейзенберга доказательство теоремы Лиувилля о конформных отображениях при минимальных предположениях гладкости использует регулярность решений некоторых дифференциальных уравнений, которая в субримановой геометрии известна только на двухступенчатых группах Карно.

Наше доказательство аналога теоремы Лиувилля совершенно другое и основано на коэрцитивных оценках [12] для некоторого дифференциального оператора Q, ядро которого связано с алгеброй Ли группы конформных отображений. Этот метод реализован ранее автором на группе Энгеля — группе $\mathbb{J}^2$ [9]. Грубо говоря, оператор Q является линеаризацией дифференциального оператора, определяющего конформные преобразования.

Структура работы такова. В § 2 приведены такие понятия, как пространства Соболева, отображения с ограниченным искажением, однородные полиномы и однородные дифференциальные операторы на группах $\mathbb{J}^k$. Также в § 2 сформулированы и доказаны следующие вспомогательные результаты: лемма 1 о явном виде автоморфизма алгебры Ли, сохраняющем градуировку, и лемма 2 о свойствах отображений с ограниченным искажением. В § 3 рассмотрен оператор Q и доказана теорема.

§ 2. Определения и вспомогательные результаты

2.1. Автоморфизмы алгебры Ли. Мы рассматриваем группу Карно $\mathbb{J}^k = \{(x, y_0, \dots, y_k)\}$, $k \geq 2$, с левоинвариантными векторными полями (1) и градуированной алгеброй Ли $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_{k+1}$, где

$$V_1 = H = \operatorname{span}\{X, Y_0\}, \quad V_i = \operatorname{span}\{Y_{i-1}\} = [V_1, V_{i-1}], \quad i = 2, \dots, k+1.$$

Лемма 1. *Пусть A — автоморфизм алгебры Ли V, сохраняющий градуировку. Тогда в базисе $X, Y_0, \dots, Y_k$ автоморфизм A имеет блочно-диагональный вид*

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix},$$

где $c = 0$ и $\lambda_i = a^i d$, $i = 1, \dots, k$.

Доказательство. Имеем

$$AY_1 = A[X, Y_0] = [AX, AY_0] = [aX + bY_0, cX + dY_0] = (ad - bc)Y_1 = \lambda_1 Y_1,$$

$$0 = A[Y_0, Y_1] = [AY_0, AY_1] = [cX + dY_0, (ad - bc)Y_1] = c(ad - bc)Y_2.$$

Следовательно, $c = 0$ и $\lambda_1 = ad$. Далее,

$$AY_2 = A[X, Y_1] = [AX, AY_1] = [aX + bY_0, \lambda_1 Y_1] = a^2 dY_2,$$

и по индукции

$$AY_{j+1} = A[X, Y_j] = [AX, AY_j] = [aX + bY_0, a^j dY_j] = a^{j+1} dY_{j+1}$$

для всех $j = 2, \dots, k-1$. $\square$

2.2. Пространства Соболева и отображения с ограниченным искажением. Пусть Ω — область в $\mathbb{J}^k$. Мера Лебега $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^{k+2}$ является биинвариантной мерой Хаара. Символом $\|f\|_{q,\Omega}$ будем обозначать L_q-норму s-мерной функции $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^s$, $q \in [1, \infty]$, $s \in \mathbb{N}$.

Пространство Соболева $W_q^1(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$, состоит из функций $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, имеющих обобщенные производные Xf и $Y_0 f$ вдоль векторных полей X и Y_0 и конечную норму

$$\|f\|_{W_q^1(\Omega)} = \|f\|_{q,\Omega} + \|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{q,\Omega},$$

где $\nabla_{\mathscr{L}} f = (Xf, Y_0 f)$ — субградиент функции f. Если $f \in W_q^1(U)$ для каждого открытого множества U, компактно вложенного в Ω, то говорят, что f *принадлежит классу* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на линиях* ($f \in ACL(\Omega)$), если для любой области U, $\overline{U} \subset \Omega$, и слоений Γ_X и Γ_{Y_0}, определяемых векторными полями X и Y_0 соответственно, функция f абсолютно непрерывна на $\gamma \cap U$ относительно $\mathscr{H}^1$-меры Хаусдорфа для $d\gamma$-почти всех кривых $\gamma \in \Gamma_X \cup \Gamma_{Y_0}$.

Определение 1. Пусть Ω — область в $\mathbb{J}^k$. Отображение $F = (f, g_0, g_1, \dots, g_k) : \Omega \to \mathbb{J}^k$ *принадлежит классу Соболева* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{J}^k)$, если выполнены следующие условия:

(1) все координатные функции $f, g_0, \dots, g_k$ принадлежат $ACL(\Omega)$,
(2) $f, g_0 \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$,
(3) $XF(\mathbf{x}), Y_0 F(\mathbf{x}) \in H(F(\mathbf{x}))$ для почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$,
(4) $d(F(\mathbf{x}), \mathbf{e}) \in L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\mathbf{e} = (0, \dots, 0)$ — единица группы.

Рассмотрим отображение класса Соболева $F\colon \Omega \to \mathbb{J}^k$. Матрица

$$D_h F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} Xf(\mathbf{x}) & Y_0 f(\mathbf{x}) \\ Xg_0(\mathbf{x}) & Y_0 g_0(\mathbf{x}) \end{pmatrix} : H(\mathbf{x}) \to H(F(\mathbf{x})),$$

определенная для п. в. $\mathbf{x} \in \Omega$, порождает сохраняющий градуировку гомоморфизм алгебр Ли $DF(\mathbf{x}) : V(\mathbf{x}) \to V(F(\mathbf{x}))$, называемый *формальным дифференциалом* (см. [5]). Определитель матрицы $DF(\mathbf{x})$ называется (*формальным*) *якобианом* отображения F и обозначается символом $J(\mathbf{x}, F)$.

Гладкое отображение, сохраняющее градуировку алгебры Ли, называется *контактным*. Поэтому отображение класса Соболева можно назвать (*слабо*)-*контактным*. Если $F = (f, g_0, \dots, g_k)$ — отображение класса Соболева, то п. в. выполняются так называемые *условия контактности*:

$$Y_0 f = 0, \quad Xg_i = \frac{f^i}{i!} Xg_0, \quad Y_0 g_i = \frac{f^i}{i!} Y_0 g_0, \quad i = 1, \dots, k. \tag{3}$$

Напомним, что непрерывное отображение $F\colon \Omega \to \mathbb{J}^k$, $\Omega \subset \mathbb{J}^k$, называется *открытым*, если образ открытого множества открыт, и *дискретным*, если прообраз $F^{-1}(\mathbf{y})$ любой точки $\mathbf{y} \in F(\Omega)$ состоит из изолированных точек.

Определение 2 [7]. Отображение $F\colon U \to \mathbb{J}^k$, определенное на открытом множестве U в $\mathbb{J}^k$, называют *отображением с ограниченным искажением*, если

(a) F непрерывно, открыто и дискретно,

(b) $F \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{J}^k)$, где $\nu = (k^2 + 3k + 4)/2$ — размерность по Хаусдорфу относительно метрики d,

(c) существует постоянная $K \geq 1$ такая, что неравенство $\|D_h F(\mathbf{x})\|^\nu \leq KJ(\mathbf{x}, F)$ выполняется п. в. в U. Наименьшая постоянная K в этом неравенстве называется (*внешним*) *коэффициентом искажения* отображения F и обозначается символом $K_O(F)$.

В евклидовом случае и на группах Гейзенберга требование открытости и дискретности избыточно, поскольку непрерывные отображения, удовлетворяющие пп. (b), (c), открыты и дискретны (см. [7, 8, 13]).

Гомеоморфные отображения с ограниченным искажением удовлетворяют метрическому условию квазиконформности (2) (см. [14]). Аналог теоремы Лиувилля показывает, в частности, что F гомеоморфно, как только $K_O(F) = 1$.

Лемма 2 (свойства отображений с ограниченным искажением). *Пусть F — отображение с ограниченным искажением области $\Omega \subset \mathbb{J}^k$, $k > 1$. Тогда*

1) $\|D_h F(\mathbf{x})\|^2 \leq K_1 |\det D_h F(\mathbf{x})|$ *для п. в.* $\mathbf{x} \in \Omega$, *где* $K_1 = \sqrt[k+1]{K_O(F)}$;

2) *если* $K_O(F) = 1$ *и* Ω *связно, то* $\det D_h F > 0$ *п. в. на* Ω *или* $\det D_h F < 0$ *п. в. на* Ω.

Доказательство. 1. Пусть $F = (f, g_0, \dots, g_k)$. Напомним, что $Y_0 f = 0$ п. в. в силу условий контактности (3). Покажем, что $\|D_h F\| \geq |Xf|$ п. в. Действительно, $\|D_h F\|^2$ — максимальное собственное число матрицы $(D_h F)^t \cdot D_h F$ и равно

$$\|D_h F\|^2 = \frac{1}{2}((Xf)^2 + (Xg)^2 + (Y_0 g_0)^2 \\ + \sqrt{((Xf)^2 + (Xg_0)^2 + (Y_0 g_0)^2)^2 - 4(Xf)^2 (Y_0 g_0)^2}).$$

Несложные вычисления показывают, что $\|D_h F\|^2 \geq (Xf)^2$.

Формальный дифференциал отображения класса Соболева определен п. в. и в силу леммы 1 имеет вид

$$DF = \begin{pmatrix} Xf & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Xg_0 & Y_0 g_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Xf\, Y_0 g_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (Xf)^k Y_0 g_0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$J(\mathbf{x}, F) = \det DF(\mathbf{x}) = (Xf(\mathbf{x}))^{(k^2+k+2)/2} (Y_0 g_0(\mathbf{x}))^{k+1} = \lambda^{k+1} (Xf(\mathbf{x}))^{k(k-1)/2},$$

где $\lambda = \det D_h F = Xf\, Y_0 g_0$. Используя $|Xf| \leq \|D_h F\|$ и $\nu = (k^2 + 3k + 4)/2$, получаем

$$\|D_h F\|^{(k^2+3k+4)/2} \leq K_O(F)\, \lambda^{k+1} Xf^{(k^2-k)/2} \leq K_O(F) |\lambda|^{k+1} \|D_h F\|^{(k^2-k)/2},$$

откуда вытекает искомое неравенство

$$\|D_h F\|^2 \leq \sqrt[k+1]{K_O(F)} |\lambda|.$$

2. Пусть $K_O(F) = 1$. Тогда $K_1(F) = 1$ и получаем равенство $\|D_hF\|^2 = |\det D_hF|$, которое означает, что D_hF является общей ортогональной матрицей. В частности, $Xf = \pm Y_0 g_0$, $Xg_0 = Y_0 f = 0$ и $Xg_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, k$ в силу условий контактности (3). Для доказательства п. 2 леммы надо показать, что Xf и $Y_0 g_0$ не меняют знака п. в. в Ω.

Шаг 1. Покажем вначале, что Xf на почти всей области Ω не меняет знака. Известно [7, теорема 4], что множество точек ветвления B_F имеет меру нуль для отображения с ограниченным искажением F. Следовательно, для всякого $\mathbf{x} \in \Omega \setminus B_F$ существует окрестность U такая, что F гомеоморфно на U. Покажем вначале, что Xf не меняет знака на U.

Рассмотрим интегральную кривую поля X, попадающую в U, т. е. кривую γ вида $\exp(tX)(\mathbf{y})\colon [t_1, t_2] \to U$. Предположим, что $f, g_0, \dots, g_k$ абсолютно непрерывны на γ (это условие необременительно, так как соболевские отображения (см. определение 1) абсолютно непрерывны вдоль почти всех интегральных линий горизонтальных векторных полей). Тогда $g_0, \dots, g_k$ постоянны на γ в силу $Xg_i = 0$, $i = 0, \dots, k$. Напомним, что отображение F инъективно на γ. Следовательно, f тоже должно быть инъективно на γ. Последнее означает, что $f(\gamma(t))$ монотонно и Xf не меняет знака на γ.

Таким образом, показали, что Xf не меняет знака на почти всех интегральных кривых поля X, попадающих в U. Предположим, что Xf имеет разные знаки на множествах ненулевой меры в U. Тогда существуют точки $\mathbf{x}_k \underset{k\to\infty}{\to} \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_n \in U$, $n = 0, 1, 2, \dots$, такие, что $Xf|_{\gamma_0} \geq 0$, $Xf|_{\gamma_n} \leq 0$, $n \geq 1$, где $\gamma_n(t) = \exp(tX)(\mathbf{x}_n)\colon [0, T] \to U$, $n \geq 0$. При этом, очевидно, $\gamma_n(T) \to \gamma_0(T)$ при $n \to \infty$. В силу непрерывности F имеем $F(\mathbf{x}_n) \to F(\mathbf{x}_0)$ и $F(\gamma_n(T)) \to F(\gamma_0(T))$ при $n \to \infty$. Получаем противоречие, поскольку $g_0, \dots, g_k$ постоянны на γ_n, а f возрастает на γ_0 и убывает на γ_n при $n > 0$.

Осталось показать, что Xf не меняет знака на почти всем Ω. Поскольку в силу теоремы Чернавского $\Omega \setminus B_F$ связно, то любые две точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \setminus B_F$ можно соединить цепью окрестностей U_i, $i = 1, \dots, n$, так, что $\mathbf{x} \in U_1$, $\mathbf{y} \in U_n$, $U_i \bigcap U_{i+1} \neq \varnothing$, $i = 1, \dots, n-1$, и Xf не меняет знака на каждом U_i. Следовательно, $\operatorname{sign} Xf(\mathbf{x}) = \operatorname{sign} Xf(\mathbf{y})$.

Шаг 2. Покажем, что $Y_0 g_0$ тоже не меняет знака на почти всем Ω. Рассмотрим, как и в шаге 1, множество U, компактно вложенное в Ω, на котором F гомеоморфно. Применяя левые сдвиги, без ограничения общности можно считать, что $f \geq 0$ на всем множестве U.

Рассмотрим интегральную кривую поля Y_0, попадающую в U, т. е. кривую τ вида $\exp(tY_0)(\mathbf{y})\colon [0, T] \to U$. Без ограничения общности будем предполагать, что $f, g_0, \dots, g_k$ абсолютно непрерывны на τ. Поскольку $Y_0 f = 0$, то $f \equiv c$ на τ. Тогда по правилу дифференцирования композиции и в силу условий контактности (3) получаем

$$\frac{d}{dt} g_i(\tau(t)) = Y_0 g_i(\tau(t)) = \frac{c^i}{i!} Y_0 g_0(\tau(t)) = \frac{c^i}{i!} \frac{d}{dt} g_0(\tau(t)), \quad i = 1, \dots, k,$$

следовательно,

$$g_i(\tau(t)) - g_i(\tau(0)) = \frac{c^i}{i!} (g_0(\tau(t)) - g_0(\tau(0))), \quad i = 1, \dots, k.$$

Предположим, что g_0 не инъективно на кривой τ, т. е. существуют точки t_1, t_2 такие, что $g_0(\tau(t_1)) = g_0(\tau(t_2))$. Тогда, как указано выше, $g_i(\tau(t_1)) = g_i(\tau(t_2))$

для всех $i = 1, \dots, k$. В итоге получаем $F(\tau(t_1)) = F(\tau(t_2))$, что противоречит гомеоморфности F на U.

Таким образом, получили, что g_0 инъективно на τ. Отсюда немедленно следует, что $g_0 \circ \tau$ — монотонная функция и $Y_0 g_0$ не меняет знака на τ. Далее, применяя те же рассуждения, что и в шаге 1, можно показать, что $Y_0 g_0$ не меняет знака на всем Ω. $\square$

Замечание. В случае четного k шаг 2 доказательства леммы становится тривиальным. По определению 2 отображения с ограниченным искажением сохраняют ориентацию ($J(\mathbf{x}, F) \geq 0$ п. в.) и, следовательно,

$$0 \leq J(\mathbf{x}, F) = (Xf(\mathbf{x}))^{(k^2+k+2)/2}(Y_0 g_0(\mathbf{x}))^{k+1}.$$

Отсюда следует, что $Y_0 g_0$ не меняет знака п. в. в Ω в случае четного k.

2.3. Однородные операторы и полиномы. Растяжения

$$\delta_t(\mathbf{x}) = (tx, ty_0, t^2 y_1, \dots, t^{k+1} y_k)$$

суть автоморфизмы группы $\mathbb{J}^k$. Отметим, что метрика Карно — Каратеодори d однородна относительно растяжения δ_t, т. е. $d(\delta_t \mathbf{x}, \delta_t \mathbf{y}) = t\, d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{J}^k$.

Мультииндексу $I = (i_{-1}, i_0, \dots, i_k)$ соответствуют

- дифференциальный оператор $Y^I = X^{i_{-1}} Y_0^{i_0} \dots Y_k^{i_k}$,
- полином $\mathbf{x}^I = x^{i_{-1}} y_0^{i_0} \cdot \dots \cdot y_k^{i_k}$,
- вес $d(I) = i_{-1} + \sum\limits_{j=0}^{k} (j+1) i_j$.

В силу коммутационных соотношений $Y_i Y_j = Y_j Y_i$, $i, j = 0, \dots, k$, и $XY_j - Y_j X = Y_{j+1}$, $j = 0, \dots, k-1$, всякая композиция базисных векторных полей $Y_{n_1} Y_{n_2} \dots Y_{n_s}$, $n_1, \dots, n_s \in \{-1, 0, \dots, k\}$ (здесь мы обозначили $Y_{-1} \stackrel{df}{=} X$) представляется, во-первых, в виде линейной комбинации операторов вида Y^I и, во-вторых, в виде линейной комбинации горизонтальных векторных полей вида $Y_{m_1} Y_{m_2} \dots Y_{m_l}$, $m_1, \dots, m_l \in \{-1, 0\}$.

Легко видеть, что x^I — это однородный полином веса $d(I)$, т. е. $(\delta_t \mathbf{x})^I = t^{d(I)} \mathbf{x}^I$. Функция f является *полиномом* на $\mathbb{J}^k$, если $f(\mathbf{x}) = \sum\limits_I a_I \mathbf{x}^I$, где сумма берется по конечному множеству мультииндексов. Степень $d(f)$ полинома f равна максимальному весу мультииндексов, входящих в сумму. Обозначим через $\mathscr{P}_j$ линейное пространство однородных полиномов на $\mathbb{J}^k$ степени j, а через $\mathscr{R}_j = \bigcup\limits_{i \leq j} \mathscr{P}_i$ — множество полиномов степени не выше j. Очевидно, $Y^I \mathscr{P}_j = \mathscr{P}_{j-d(I)}$ и $Y^I \mathscr{R}_j = \mathscr{R}_{j-d(I)}$, если $d(I) \leq j$.

Пусть Ω — область на $\mathbb{J}^k$. Рассмотрим однородный дифференциальный оператор Q степени l с постоянными коэффициентами, переводящий векторнозначные функции u класса $W_p^k(\mathbb{J}^k, \mathbb{R}^s)$ в функции со значениями в $\mathbb{R}^m$:

$$(Qu(\mathbf{x}))_j = \sum_{n=1}^{s} \sum_{d(I)=l} c_{nj,I} X^I u_n(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, m.$$

Пусть $\nabla^n_{\mathscr{L}} = \{Y_{m_1} Y_{m_2} \dots Y_{m_n} : m_1, \dots, m_n \in \{-1, 0\}\}$ — однородный дифференциальный оператор порядка n с ядром $\ker \nabla^n_{\mathscr{L}} = \mathscr{R}_{n-1}$.

Приведем утверждения, которые понадобятся при доказательстве теоремы.

Предложение 1 (коэрцитивная оценка [12]). *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* B — *шар радиуса* r *в метрике* d *на* $\mathbb{J}^k$, Q — *однородный дифференциальный оператор степени* l *с постоянными коэффициентами и конечномерным ядром. Тогда существуют проектор* Π *на ядро оператора* Q *и число* $j \geq l$ *такие, что* $\ker Q \subset \mathscr{R}_j$ *и*

$$\|u - \Pi u\|_{p,B} \leq Cr^l \|Qu\|_{p,B}$$

для всякой функции $u \in W_p^k(\Omega, \mathbb{R}^s)$.

Лемма 3 (см., например, [12, с. 76]). *Пусть* Q — *однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и конечномерным ядром,* l — *степень оператора* Q. *Тогда существуют натуральное число* $n > l$ *и матрица* A *с постоянными коэффициентами такие, что*

$$\nabla^n_{\mathscr{L}} = A \nabla^{n-l}_{\mathscr{L}} Q.$$

Доказательство. Предположим, что ядро Q конечномерно, тогда существует $n > l$ такое, что $\mathscr{P}_n \cap \ker Q = \{0\}$. Это означает, что $\mathscr{P}_n \cap \ker \nabla^{n-l}_{\mathscr{L}} Q = \{0\}$.

С другой стороны, поскольку Q — однородный дифференциальный оператор, существует матрица B с постоянными коэффициентами такая, что $\nabla^{n-l}_{\mathscr{L}} Q = B \nabla^n_{\mathscr{L}}$. Таким образом, матрица B обратима, и $\nabla^n_{\mathscr{L}} = B^{-1} \nabla^{n-l}_{\mathscr{L}} Q$. $\square$

3. Оператор Q и доказательство теоремы

Пусть $k \geq 2$. Рассмотрим однородный дифференциальный оператор Q порядка 1, действующий на функциях $\varphi = (u, v) \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\Omega \subset \mathbb{J}^k$, как

$$\begin{pmatrix} Xu - Y_0 v \\ Y_0 u + Xv \\ Y_0 u \end{pmatrix}.$$

Лемма 4 (ядро оператора Q). *Пусть* $k \geq 2$.

1. *Ядро оператора* Q *на гладких функциях конечномерно и состоит из полиномиальных функций* $\varphi = (u, v)$.

2. *Если* $\varphi = (f, g_0) \in \ker Q$ *продолжается до соболевского отображения* $F = (f, g_0, \dots, g_k)$, *то* $(f, g_0) = (a_1 + kx, a_2 + ky_0)$, $k \neq 0$, *и* $F = \pi_{\mathbf{a}} \circ \delta_k$ *при* $k > 0$, $F = \pi_{\mathbf{a}} \circ \sigma \circ \delta_{-k}$ *при* $k < 0$, *где* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{k+2}) \in \mathbb{J}^k$ *и* $\sigma(\mathbf{x}) = (-x, -y_0, y_1, \dots, (-1)^{k+1} y_k)$ — *отражение.*

Доказательство. 1. Рассмотрим пару гладких функций $(u, v) \in \ker Q$. Функция v не зависит от переменной x, и $Xu = Y_0 v$, поэтому

$$u = \psi + x \frac{\partial v}{\partial y_0} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial v}{\partial y_1} + \dots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \frac{\partial v}{\partial y_k}, \tag{4}$$

где ψ не зависит от x. Выражение

$$Y_0 u = \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\psi + x \frac{\partial v}{\partial y_0} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial v}{\partial y_1} + \dots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \frac{\partial v}{\partial y_k} \right)$$

является полиномом $(2k+1)$-й степени по x. Приравнивая к нулю коэффициенты при различных степенях x в уравнении $Y_0 u = 0$, получаем систему из $2k+2$ уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{1}{n!} \frac{\partial \psi}{\partial y_n} + \sum_{i+j=n-1} \frac{1}{i!(j+1)!} \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_i} = 0, \quad n = 0, \dots, k; \\ \sum_{i+j=n-1} \frac{1}{i!(j+1)!} \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_i} = 0, \quad n = k+1, \dots, 2k+1. \end{gathered} \tag{5}$$

В частности,
$$\frac{\partial\psi}{\partial y_0}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y_{k-1}\partial y_k}=\frac{\partial^2 v}{\partial y_k^2}=0. \tag{6}$$

Покажем по индукции, что ядро полиномиально на всех $\mathbb{J}^k$, $k>1$.

База индукции. Случай $k=2$. Отметим, что ядро оператора Q для случая $k=2$ выписано в явном виде в [9]. Приведем для краткости схему вычисления ядра Q. Система уравнений (5) записывается в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_0}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y_1}+\frac{\partial^2 v}{\partial y_0^2}=0,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial y_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_0}+\frac{\partial^2 v}{\partial y_0\partial y_1}=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y_0\partial y_2}+\frac{1}{6}\frac{\partial^2 v}{\partial y_2\partial y_0}=0,\quad \frac{1}{4}\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_2}+\frac{1}{6}\frac{\partial^2 v}{\partial y_2\partial y_1}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}=0,$$

что эквивалентно

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_0}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y_1}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y_0^2},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y_2}=-\frac{3}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y_0\partial y_1},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}=-\frac{4}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial y_0\partial y_2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}=0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^3 v}{\partial y_0^2\partial y_2}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial y_1\partial y_2}=\frac{3}{2}\frac{\partial^3 v}{\partial y_0\partial y_1^2}=-2\frac{\partial^3 v}{\partial y_0^2\partial y_2}\quad\text{и}\quad \frac{\partial^3 v}{\partial y_0^2\partial y_2}=0.$$

В силу

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial^2 v}{\partial y_0\partial y_2}=\frac{\partial}{\partial y_2}\frac{\partial^2 v}{\partial y_0\partial y_2}=0$$

получаем, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_0\partial y_2}=\operatorname{const}.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}=-\frac{4}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial y_0\partial y_2},\quad \frac{\partial^3 v}{\partial y_0^2\partial y_1}=\frac{\partial^3 v}{\partial y_0^3}=\frac{\partial^3 v}{\partial y_0\partial y_1^2}=0,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y_1^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial y_2^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial y_1\partial y_2}=0.$$

Несложные вычисления показывают, что u и v суть полиномы следующего вида:

$$\begin{aligned} u&=a_1+kx+c_1y_2+c_3y_1+x\Bigl(c_4y_2-\frac{1}{3}c_1y_1-c_3y_0\Bigr)+\frac{1}{2}x^2\Bigl(c_2-\frac{1}{3}c_1y_0-\frac{4}{3}c_4y_1\Bigr)\\ &\quad+\frac{1}{6}x^3(c_5+c_4y_0), \\ v&=a_2+ky_0-\frac{2}{3}c_4y_1^2+y_1\Bigl(c_2-\frac{1}{3}c_1y_0\Bigr)-\frac{1}{2}c_3y_0^2+c_4y_0y_2+c_5y_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Индукционное предположение. Предположим, что ядро оператора Q на группе $\mathbb{J}^{k-1}$ состоит из полиномов степени не выше s. Всюду далее мы все элементы группы $\mathbb{J}^{k-1}$, такие как векторные поля $X, Y_0, \dots, Y_{k-1}$, дифференциальные операторы Q и $\nabla^n_{\mathscr{L}}$, будем обозначать сверху значком $\widetilde{\cdot}$.

Рассмотрим гладкое отображение (u,v) из ядра оператора Q группы $\mathbb{J}^k$. Очевидно, что $(Y_ku, Y_kv)\in\ker Q$ и $\bigl(Y_k^2u, Y_k^2v\bigr)\in\ker Q$. В силу (6) имеем $Y_k^2v=$

$\frac{\partial^2 v}{\partial y_k^2} = 0$. Условия на ядро Q дают соотношения $XY_k^2 u = Y_0 Y_k^2 v = 0$ и $Y_0 Y_k^2 u = 0$, которые означают, что $Y_k^2 u \equiv \mathrm{const} = \lambda$.

(I) Покажем вначале, что $Y_k u, Y_k v$ — полиномы. Обозначим через u_0, v_0 следующую пару однородных многочленов степени $k+1$:

$$u_0 = \lambda y_k + \sum_{i=0}^{[k/2]} \mu_i \Big(\frac{x^{i+1}}{(i+1)!} y_{k-i-1} + \frac{x^{k-i}}{(k-i)!} y_i \Big), \quad v_0 = \sum_{i=0}^{[k/2]} \mu_i y_i y_{k-i-1}.$$

Легко проверить, что $(u_0, v_0) \in \ker Q$ при условии

$$\frac{\lambda}{k!} + \sum_{i=0}^{[k/2]} \mu_i \bigg(\frac{1}{(i+1)!(k-i-1)!} + \frac{1}{(k-i)!i!} \bigg) = 0.$$

Тогда

$$Y_k u = u_1 + u_0, \quad Y_k v = v_1 + v_0,$$

где (u_1, v_1) принадлежат $\ker Q$ и не зависят от y_k. По индукционному предположению u_1, v_1 являются полиномами степени s, а следовательно, и $Y_k u, Y_k v$ тоже полиномы степени $\max\{s, k+1\}$.

(II) Покажем, что ядро Q состоит из полиномов. Для этого достаточно показать, что все производные некоторого порядка обращаются в нуль на u и v, $(u,v) \in \ker Q$, т. е. существует число $l > 0$ такое, что $Y^I u = Y^I v = 0$ для всех $I = (i_{-1}, i_0, \dots, i_k)$ таких, что $d(I) = l$. Разберем все возможные случаи.

(а) $I = (l, 0, \dots, 0)$, $Y^I = X^l$. Очевидно, что $X^l v = 0$ и

$$X^l u = X^{l-1} X u = X^{l-1} Y_0 v = X^{l-2} Y_1 v = \dots = X^{l-k-1} Y_k v = Y_k X^{l-k-1} v = 0,$$

если $l > k+1$.

(б) $I = (i_{-1}, i_0, \dots, i_k)$, $i_k > 0$. В этом случае

$$Y^I u = Y^{I'}(Y_k u) = 0, \quad Y^I v = Y^{I'}(Y_k v) = 0, \quad I' = (i_{-1}, i_0, \dots, i_{k-1}, i_k - 1),$$

при условии, что $d(I') = l - k - 1 > \max\{s, k+1\}$. (Здесь мы воспользовались тем, что $Y_k u, Y_k v$ — полиномы порядка $\max\{s, k+1\}$, что показано выше.)

(в) $I = (i_{-1}, i_0, \dots, i_{k-1}, 0)$, $i_{-1} < l$. В силу

$$Y_i = \widetilde{Y}_i + \frac{x^{k-i}}{(k-i)!} Y_k, \quad i = 0, \dots, k-1,$$

имеем

$$Y^I = X^{i_{-1}} \bigg(\widetilde{Y}_0 + \frac{x^k}{k!} Y_k \bigg)^{i_0} \dots \bigg(\widetilde{Y}_{k-1} + \frac{x}{1} Y_k \bigg)^{i_{k-1}} = \sum_{j=0}^{l-i} B_j(x, \widetilde{Y}) Y_k^j.$$

Покажем, что $B_j Y_k^j \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$ для всех $j = 0, \dots, l-i$ при некотором l.

(i) Поскольку $B_0 = X^i \widetilde{Y}_0^{i_0} \dots \widetilde{Y}_{k-1}^{i_{k-1}}$ представляется в виде линейной комбинации дифференциальных операторов из $\widetilde{\nabla}^l_{\mathscr{L}}$, достаточно показать, что $\widetilde{\nabla}^l_{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$. В силу леммы 3

$$\widetilde{\nabla}^l_{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \widetilde{\nabla}^{l-1}_{\mathscr{L}} \widetilde{Q} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \widetilde{\nabla}^{l-1}_{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} Xu - \widetilde{Y}_0 v \\ Xv + \widetilde{Y}_0 u \\ \widetilde{Y}_0 u \end{pmatrix}$$

$$= A \widetilde{\nabla}^{l-1}_{\mathscr{L}} Q \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + A \widetilde{\nabla}^{l-1}_{\mathscr{L}} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} Y_k v \\ -Y_k u \\ -Y_k u \end{pmatrix} = 0$$

при условии, что $l-1>k+\max\{k+1,s\}$. Здесь мы воспользовались тем, что $\widetilde{\nabla}^{l-1}_{\mathscr{L}}$ — однородный дифференциальный оператор порядка $l-1$ и на группе $\mathbb{J}^k$.

(ii) Обозначим $\widetilde{I}=(i_{-1},i_0,\dots,i_{k-1})$, $e_j=(0,\dots,0,\overset{j}{1},0,\dots,0)$. Тогда

$$B_1Y_k\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\sum_{\substack{J=\widetilde{I}-e_j,\\ i_j\neq 0}} i_j\widetilde{Y}^J\frac{x^{k-j}}{(k-j)!}\begin{pmatrix}Y_ku\\Y_kv\end{pmatrix}=0,$$

если $d(J)=l-j-1>k-j+\max\{s,k+1\}$ для всех $i_j\neq 0$.

(iii) Имеем

$$B_2Y_k^2\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\sum_{\substack{J=\widetilde{I}-e_j-e_p,\\ i_j,i_p\neq 0}} c_{jp}\widetilde{Y}^J\frac{x^{k-j}x^{k-p}}{(k-j)!(k-p)!}\begin{pmatrix}Y_k^2u\\Y_k^2v\end{pmatrix}=0,$$

если $d(J)=l-j-1-p-1>k-j+k-p$ для всех $i_j,i_p\neq 0$, так как Y_k^2u,Y_k^2v — полиномы степени 0.

(iv) Наконец,

$$B_jY_k^j\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=B_j\begin{pmatrix}Y_k^ju\\Y_k^jv\end{pmatrix}=0,\quad j=3,\dots,l,$$

поскольку

$$\begin{pmatrix}Y_k^2u\\Y_k^2v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $Y^Iu=Y^Iv=0$ для всех I таких, что $d(I)=l$, если $l>\max\{s,k+1\}+k+1$, что и требовалось показать.

2. Пусть пара гладких функций $(f,g)\in\ker Q$ продолжается до соболевского отображения $F=(f,g_0,g_1,\dots,g_k)$.

Покажем, что f зависит от x линейно. В силу условий контактности (3) $Xg_i=0$ и $Y_0g_i=\frac{f^i}{i!}Y_0g_0$. Используя соотношение

$$0=[X,Y_k]g_i=XY_kg_i-Y_kXg_i=X(XY_{k-1}-Y_{k-1}X)g_i=\dots=X^{k+2}Y_0g_i,$$

получаем

$$0=X^{k+2}Y_0g_k=X^{k+2}\Big(\frac{f^i}{i!}Y_0g_0\Big)=X^{k+2}\Big(\frac{f^i}{i!}Xf\Big)=\frac{1}{(i+1)!}X^{k+3}(f^{k+1}).$$

Отсюда немедленно следует, что f зависит от x не более чем линейно, поскольку изначально f зависит от x полиномиально. Следовательно, в силу (4) g_0 есть не более чем линейная функция, зависящая только от y_0. Таким образом, $(f,g_0)=(a_1+\alpha x,a_2+\alpha y_0)$. Очевидно, что $\det D_hF\equiv\alpha^2\neq 0$ и (f,g_0) продолжается до композиции левого сдвига, растяжения на $|\alpha|$ и, возможно, отражения σ в случае $\alpha<0$. $\square$

Замечание. В случае группы Гейзенберга (эквивалентной $\mathbb{J}^1$) на соболевское отображение $F=(f,g_0,g_1)$ не накладывается условие $Y_0f=0$. Поэтому оператор Q задается как

$$Q\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Xu-Y_0v\\Y_0u+Xv\end{pmatrix}$$

и его ядро включает в себя все решения системы Коши — Римана в переменных x, y_0, т. е. ядро Q бесконечномерно.

Доказательство теоремы. Если $F = (f, g_0, g_1, \dots, g_k)$ — отображение с 1-ограниченным искажением связной области Ω, то $D_h F$ — общая ортогональная матрица и $\det D_h F$ не меняет знака на Ω по лемме 1. Без ограничения общности можно считать, что $\det D_h F \geq 0$, иначе мы рассмотрим отображение $\iota \circ F$. Поскольку $\det D_h F \geq 0$, то $Xf = Y_0 g_0$ и $Xg_0 = Y_0 f = 0$. Следовательно, $Q \begin{pmatrix} f \\ g_0 \end{pmatrix} = 0$, но ядро Q на соболевских функциях неизвестно.

В силу леммы 4 Q — однородный оператор первой степени с постоянными коэффициентами и конечномерным ядром на гладких фукциях, и, значит, для него выполняется коэрцитивная оценка из предложения 1: на каждом шаре B существуют проектор P_B на ядро $\ker Q$ и константа $C > 0$ такие, что для всякого $\varphi \in W_2^1(B, \mathbb{R}^2)$ выполняется

$$\|\varphi - P_B \varphi\|_{2,B} \leq C \|Q\varphi\|_{2,B}.$$

Отсюда ввиду $Q\varphi = 0$ п. в. и утверждения 2 леммы 4 вытекает

$$\varphi = (f, g_0) = P_B \varphi = (a_1 + \alpha x, a_2 + \alpha y_0).$$

Нетрудно показать, что пара $(f, g_0) = (a_1 + \alpha x, a_2 + \alpha y_0)$ определяет только контактное отображение $F = (f, g_0, \dots, g_k)$, равное композиции левого сдвига, растяжения на $|\alpha|$ и, возможно, отражения σ в случае $\alpha < 0$, что как раз и совпадает с элементом группы M гладких 1-квазиконформных отображений.

Поскольку область Ω связная и F непрерывно, отображение F представляется в виде комбинации отображений из группы M на всей области Ω. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Теорема Лиувилля о конформных отображениях при минимальных предположениях регулярности // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 4. С. 835–840.
2. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Math. Surv. Monogr.; N 91).
3. *Водопьянов С. К.* Геометрические свойства областей и отображений. Оценки снизу нормы оператора продолжения // Исследования по геометрии и математическому анализу Новосибирск, 1987. С. 70–101.
4. *Mostow G. D.* Strong rigidity of locally symmetric spaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1973. (Ann. Math. Stud; N 78).
5. *Водопьянов С. К.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 603–670.
6. *Capogna L., Cowling M.* Conformality and Q-harmonicity in Carnot groups // Duke Math. J. 2006. V. 135, N 3. P. 455–479.
7. *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным искажением и конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 764–804.
8. *Даирбеков Н. С.* Отображения с ограниченным искажением на группах Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 567–590.
9. *Исангулова Д. В.* Аналог теоремы Лиувилля о конформных отображениях при минимальных предположениях гладкости на одном примере трехступенчатой группы Карно // Докл. АН. 2013. Т. 452, № 5. С. 479–482.
10. *Warhurst B.* Jet spaces and nonrigid Carnot groups: Ph. D thesis. Sydney: The Univ. of New South Wales, 2005.
11. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F.* Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians. New York, NY: Springer, 2007. (Springer Monogr. Math.).

12. *Isangulova D. V., Vodopyanov S. K.* Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups // Eurasian Math. J. 2010. V. 1, N 3. P. 58–96.

13. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.

14. *Водопьянов С. К.* О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением // Мат. тр. 2002. Т. 5, № 2. С. 91–136.

Статья поступила 20 декабря 2013 г.

Исангулова Дарья Васильевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
dasha@math.nsc.ru