Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5

УДК 514.772

ИНТЕГРАЛЬНАЯ СРЕДНЯЯ КРИВИЗНА И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ТРЕХМЕРНОМ РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. В. Нещадим

Аннотация. Найдена формула для производной интегральной средней кривизны поверхности в трехмерном римановом пространстве относительно бесконечно малого изгибания.

Ключевые слова: интегральная средняя кривизна, бесконечно малое изгибание.

Ю. Г. Решетняку к 85-летию

Пусть в римановом пространстве (M^3, g)

1) фиксирована поверхность S, в локальных координатах $x = (x^1, x^2, x^3)$ поверхность S задаваемая параметрически:

$$x^i = x^i(u), \quad \text{где } u = (u^1, u^2);$$

2) в некоторой окрестности поверхности S есть векторное поле $v^i = v^i(x)$, $i = 1, 2, 3$, которое порождает семейство поверхностей $S_t = \{x = x(u, t)\}$:

$$\frac{dx}{dt} = v(x), \quad x|_{t=0} = x(u);$$

3) на поверхности S_t рассматривается индуцированная метрика

$$a_{\alpha\beta}(u, t) = g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^q}{\partial u^\beta} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial x}{\partial u^\beta} \right\rangle.$$

Далее латинские индексы $i, j, k, \dots$ пробегают значения 1, 2, 3, а греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — значения 1, 2. Метрика g_{pq} и поверхность S предполагаются достаточно гладкими. Все используемые обозначения стандартны и могут быть найдены в классических учебниках по римановой геометрии (см., например, [1, 2]).

Если на поверхности S есть некоторая гладкая кривая l:

$$u^\alpha = u^\alpha(\tau), \quad \alpha = 1, 2, \ \tau_0 \le \tau \le \tau_1,$$

то в силу условия 2 имеется семейство кривых $l(t) \subset S_t$. Обозначим через $\Lambda(t)$ длину кривой $l(t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–92697), Математического отделения РАН (код проекта 1.3.1–2012), а также Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (код проекта 44–2012).

Определение. Векторное поле v называется *бесконечно малым изгибанием* поверхности S [3, 4], если для любой кривой l на поверхности S выполняется равенство

$$\left.\frac{d\Lambda(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Вторая квадратичная форма поверхности S определяется равенством [1, 2]

$$b_{\alpha\beta} = \langle \nabla_\beta x_\alpha, m\rangle,$$

где $m = (m^k)$ — вектор единичной нормали к поверхности S в пространстве (M^3, g). Здесь и далее ∇ — ковариантная производная в пространстве (M^3, g), а $\widetilde{\nabla}$ — ковариантная производная в пространстве (S, a). В частности, ∇_v — ковариантная производная вдоль векторного поля v, ∇_α — ковариантная производная по переменной u^α в пространстве (M^3, g), $\widetilde{\nabla}_\alpha$ — ковариантная производная по переменной u^α в пространстве (S, a). Будем использовать также обозначение $x_\alpha = \frac{\partial x}{\partial u^\alpha}$.

Средняя кривизна определяется равенством

$$H = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}.$$

Соответственно определяется интегральная средняя кривизна $H(S)$ поверхности S:

$$H(S) = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} a \, du^1 du^2,$$

где $a = \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}$.

При выполнении приведенных выше предположений справедлива

Теорема. *Для любой компактной ориентированной гладкой поверхности $S \subset (M^3, g)$ и любого ее бесконечно малого изгибания v имеет место формула*

$$\left.\frac{dH(S_t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial S} \langle \nabla_v m \times m, dx\rangle\Big|_{t=0} + \frac{1}{2} \int\limits_S a a^{\alpha\beta} \langle R(v, x_\beta) x_\alpha, m\rangle \, du^1 du^2,$$

где $R(v, x_\beta)x_\alpha = (\nabla_v \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_v) x_\alpha$ — оператор кривизны риманова многообразия (M^3, g), $\times$ — векторное произведение.

Данное утверждение обобщает аналогичный результат для евклидова пространства E^3 [5]. Отметим также, что в [6] приведена формула для произвольного эйнштейнова многообразия, связывающая вариацию объема, ограниченного семейством гиперповерхностей, и интеграл от вариации средней кривизны по гиперповерхности. Обзор результатов по теории изгибания поверхностей можно найти в [7].

Приведем несколько вспомогательных утверждений. Утверждения лемм 1–3 и их следствий известны и могут быть найдены в классической литературе по дифференциальной геометрии.

Лемма 1 (производная метрики поверхности вдоль векторного поля). *Для семейства поверхностей S_t в римановом многообразии (M^3, g), полученного при движении поверхности S вдоль векторного поля v, справедлива формула*

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} = (L_v g)_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^q}{\partial u^\beta},$$

где $L_v g$ — производная Ли тензора g вдоль векторного поля v:

$$(L_v g)_{pq} = v^k \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} + g_{kq} \frac{\partial v^k}{\partial x^p} + g_{pk} \frac{\partial v^k}{\partial x^q}.$$

Лемма 2 (производная длины кривой на поверхности вдоль векторного поля). *Имеет место формула*

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{1}{\sqrt{a_{\gamma\delta}\frac{du^\gamma}{d\tau}\frac{du^\delta}{d\tau}}}\frac{du^\alpha}{d\tau}\frac{du^\beta}{d\tau}\frac{\partial x^p}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^q}{\partial u^\beta}(L_v g)_{pq}\,d\tau. \tag{1}$$

Доказательство. По определению

$$\Lambda(t) = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\sqrt{a_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{d\tau}\frac{du^\beta}{d\tau}}\,d\tau.$$

Так как переменные u не зависят от параметра t, т. е. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, имеем

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{1}{\sqrt{a_{\gamma\delta}\frac{du^\gamma}{d\tau}\frac{du^\delta}{d\tau}}}\frac{\partial a_{\alpha\beta}(u(\tau),t)}{\partial t}\frac{du^\alpha}{d\tau}\frac{du^\beta}{d\tau}\,d\tau.$$

Остается применить лемму 1.

Следствие 1. *Если векторное поле v является бесконечно малым изгибанием поверхности S, то выполняется равенство*

$$(L_v g)_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^q}{\partial u^\beta}\bigg|_S = 0, \quad \alpha,\beta = 1,2, \tag{2}$$

или, равносильно,

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad \alpha,\beta = 1,2. \tag{3}$$

Действительно, в силу формулы (1) и определения бесконечно малого изгибания

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{1}{\sqrt{a_{\gamma\delta}\frac{du^\gamma}{d\tau}\frac{du^\delta}{d\tau}}}\frac{du^\alpha}{d\tau}\frac{du^\beta}{d\tau}\frac{\partial x^p}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^q}{\partial u^\beta}(L_v g)_{pq}\,d\tau\bigg|_S = 0.$$

Ввиду произвольности кривой l получаем требуемое утверждение.

В случае евклидова пространства $M^3 = \mathbb{R}^3$, $g_{pq} = \delta_{pq}$ и формула (2) принимает следующий вид:

$$\left(\delta_{kq}\frac{\partial v^k}{\partial x^p} + \delta_{pk}\frac{\partial v^k}{\partial x^q}\right)\frac{\partial x^p}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^q}{\partial u^\beta} = 0, \quad \alpha,\beta = 1,2,$$

или

$$\sum_{q=1}^{3}\left(\frac{\partial v^q}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^q}{\partial u^\beta} + \frac{\partial v^q}{\partial u^\beta}\frac{\partial x^q}{\partial u^\alpha}\right) = 0, \quad \alpha,\beta = 1,2,$$

что равносильно трем равенствам

$$\frac{\partial x}{\partial u^1}\frac{\partial v}{\partial u^1} = \frac{\partial x}{\partial u^2}\frac{\partial v}{\partial u^1} + \frac{\partial x}{\partial u^1}\frac{\partial v}{\partial u^2} = \frac{\partial x}{\partial u^2}\frac{\partial v}{\partial u^2} = 0.$$

Лемма 3 (конструкция векторного произведения). *Пусть даны два вектора $u = u^k$, $w = w^k$ в римановом пространстве (M^3, g) в некоторой точке x. Тогда вектор*

$$n^p = g^{pi}\varepsilon_{ikl}u^k w^l$$

имеет следующие свойства:

1) $\langle n, u\rangle = \langle n, w\rangle = 0$,
2) $|n| = |u| \cdot |w| \sin(\widehat{u, w})$.

Здесь ε_{ikl} — дискриминантный тензор:

$$\varepsilon_{ikl} = \begin{cases} \sqrt{g}\,\mathrm{sgn}\,\pi, \quad \pi = \begin{cases} 123 \\ ikl \end{cases} \text{— подстановка,} \\ \\ 0, \quad \pi \text{ не подстановка.} \end{cases}$$

Вектор n называется *векторным произведением* векторов u и w и обозначается через $n = u \times w$.

Следствие 2. *Вектор единичной нормали к поверхности S в точке $x(u)$ имеет вид*

$$m^p = \frac{1}{a}g^{pi}\varepsilon_{ikl}\frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^l}{\partial u^2},$$

где $a = \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}$ — элемент площади поверхности.

Лемма 4 (вектор бинормали). *Для вектора нормали m к поверхности S_t в римановом многообразии (M^3, g) справедливо равенство*

$$\langle \nabla_v m \times m, dx\rangle = -\varepsilon^{\alpha\beta}a_{\alpha\gamma}\langle \nabla_\beta v, m\rangle\, du^\gamma$$

при $t = 0$, где

$$a\varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = \beta, \\ -1, & \text{если } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что если w — векторное поле вдоль интегральных линий векторного поля v, то

$$\nabla_v(\rho w) \times (\rho w) = \rho^2 \nabla_v w \times w.$$

Действительно,

$$\nabla_v(\rho w) = \frac{d\rho}{dt}w + \rho\nabla_v w.$$

Операция векторного произведения $(u \times w)^p = g^{pi}\varepsilon_{ikl}u^k w^l$ кососимметрична по аргументам u, w, т. е. $w \times w = 0$. Поэтому

$$\nabla_v(\rho w) \times (\rho w) = \rho\frac{d\rho}{dt}w \times w + \rho^2\nabla_v w \times w = \rho^2\nabla_v w \times w.$$

Вспомним, что вектор нормали m имеет вид

$$m^p = \frac{1}{a}g^{pi}\varepsilon_{ikl}\frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^l}{\partial u^2}.$$

Следовательно,

$$\nabla_v m \times m = \frac{1}{a^2}\nabla_v w \times w,$$

где

$$w^p = g^{pi}\varepsilon_{ikl}\frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^l}{\partial u^2}.$$

Вектор w можно представить также в виде

$$w^p = g^{pi}\varepsilon_{ikl}\frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^l}{\partial u^2} = \frac{a}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}g^{pi}\varepsilon_{ikl}\frac{\partial x^k}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^l}{\partial u^\beta},$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta}$ — дискриминантный тензор поверхности S (определен выше). Следовательно,

$$w = \frac{a}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(x_\alpha \times x_\beta).$$

Так как $\frac{a}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}$ — постоянные числа и $\nabla_v(A\times B) = \nabla_v A\times B + A\times\nabla_v B$ для произвольных векторных полей A и B, то

$$\nabla_v w = \frac{a}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(\nabla_v x_\alpha\times x_\beta + x_\alpha\times\nabla_v x_\beta).$$

Далее, $\nabla_v x_\alpha = \nabla_\alpha v$, поэтому

$$\nabla_v w = \frac{a}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha v\times x_\beta + x_\alpha\times\nabla_\beta v)$$

и

$$\begin{aligned}\nabla_v w\times w &= \frac{a^2}{4}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\delta}(\nabla_\alpha v\times x_\beta + x_\alpha\times\nabla_\beta v)\times(x_\gamma\times x_\delta)\\ &= \frac{a^2}{4}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\delta}((\nabla_\alpha v\times x_\beta)\times(x_\gamma\times x_\delta) + (x_\alpha\times\nabla_\beta v)\times(x_\gamma\times x_\delta)).\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой

$$(A\times B)\times(C\times D) = (A,B,D)C - (A,B,C)D,$$

справедливой для любых векторов A, B, C, D. Здесь $(A,B,C) = \varepsilon_{ijk}A^iB^jC^k$ — смешанное произведение векторов A, B, C. Имеем

$$\begin{aligned}\nabla_v w\times w &= \frac{a^2}{4}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\delta}(x_\gamma(\nabla_\alpha v, x_\beta, x_\delta) - x_\delta(\nabla_\alpha v, x_\beta, x_\gamma))\\ &\quad+\frac{a^2}{4}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\delta}(x_\gamma(x_\alpha,\nabla_\beta v, x_\delta) - x_\delta(x_\alpha,\nabla_\beta v, x_\gamma))\\ &= \frac{a}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(x_1(\nabla_\alpha v, x_\beta, x_2) - x_2(\nabla_\alpha v, x_\beta, x_1))\\ &\quad+\frac{a}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(x_1(x_\alpha,\nabla_\beta v, x_2) - x_2(x_\alpha,\nabla_\beta v, x_1))\\ &= \frac{a}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}((\nabla_\alpha v, x_\beta, x_2) + (x_\alpha,\nabla_\beta v, x_2))x_1 - \frac{a}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}((\nabla_\alpha v, x_\beta, x_1) + (x_\alpha,\nabla_\beta v, x_1))x_2\\ &= ((\nabla_1 v, x_2, x_2) + (x_1,\nabla_2 v, x_2))x_1 - ((\nabla_1 v, x_2, x_1) + (x_1,\nabla_2 v, x_1))x_2\\ &= -(\nabla_2 v, x_1, x_2)x_1 + (\nabla_1 v, x_1, x_2)x_2 = -a\varepsilon^{\alpha\beta}x_\alpha(\nabla_\beta v, x_1, x_2).\end{aligned}$$

Итак,

$$\nabla_v w\times w = -a\varepsilon^{\alpha\beta}x_\alpha(\nabla_\beta v, x_1, x_2)$$

и

$$\nabla_v m\times m = \frac{1}{a^2}\nabla_v w\times w = -\frac{1}{a}\varepsilon^{\alpha\beta}x_\alpha(\nabla_\beta v, x_1, x_2) = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}x_\alpha(\nabla_\beta v, x_\xi, x_\eta)\varepsilon^{\xi\eta}.$$

Отсюда при $t=0$

$$\langle \nabla_v m \times m, dx\rangle = \langle \nabla_v m \times m, x_\gamma du^\gamma\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma}(\nabla_\beta v, x_\xi, x_\eta)\varepsilon^{\xi\eta} du^\gamma = -\varepsilon^{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma}\langle \nabla_\beta v, m\rangle du^\gamma.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $x=(x^1,x^2,x^3)$ — полугеодезические координаты в окрестности поверхности S, т. е. $x^1=u^1$, $x^2=u^2$ — координаты на поверхности S, а x^3 — расстояние от точки до поверхности S. Метрика в этой системе координат имеет вид

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + (dx^3)^2,$$

где $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^1,x^2,x^3)$, $\alpha,\beta = 1,2$.

Так как интегральная средняя кривизна поверхности S_t определяется формулой

$$H(S_t) = \frac{1}{2}\int\limits_{S_t} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} dS_t = \frac{1}{2}\int\limits_{S} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} a\, du^1 du^2,$$

где $a^{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — первая и вторая квадратичные формы поверхности S_t, дифференцированием по параметру t находим

$$\frac{dH(S_t)}{dt} = \frac{1}{2}\int\limits_S \frac{\partial(a a^{\alpha\beta})}{\partial t} b_{\alpha\beta}\, du^1 du^2 + \frac{1}{2}\int\limits_S a a^{\alpha\beta}\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t}\, du^1 du^2.$$

В силу следствия 1

$$\frac{dH(S_t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{2}\int\limits_S a a^{\alpha\beta}\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t}\bigg|_{t=0} du^1 du^2.$$

Пусть

$$\Phi = 2\bigg(\frac{dH(S_t)}{dt} - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial S}\langle \nabla_v m \times m, dx\rangle\bigg)_{t=0}.$$

Тогда

$$\Phi = \int\limits_S a a^{\alpha\beta}\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t}\bigg|_{t=0} du^1 du^2 - \int\limits_{\partial S}\langle \nabla_v m \times m, dx\rangle\bigg|_{t=0}.$$

В соответствии с леммой 4

$$\Phi = \int\limits_S a a^{\alpha\beta}\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t}\bigg|_{t=0} du^1 du^2 + \int\limits_{\partial S} \varepsilon^{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma}\langle \nabla_\beta v, m\rangle|_{t=0}\, du^\gamma.$$

Применяя ко второму интегралу формулу Стокса, получаем

$$\Phi = \int\limits_S a a^{\alpha\beta}\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t}\bigg|_{t=0} du^1 du^2 + \int\limits_S d(\varepsilon^{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma}\langle \nabla_\beta v, m\rangle du^\gamma)|_{t=0}.$$

Так как

$$d(\omega_\gamma du^\gamma) = \widetilde{\nabla}_\nu \omega_\gamma\, du^\nu \wedge du^\gamma$$

и $\widetilde{\nabla}_\nu \varepsilon^{\alpha\beta} = 0$, $\widetilde{\nabla}_\nu a_{\alpha\gamma} = 0$, имеем

$$\begin{aligned} d(\varepsilon^{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} \langle \nabla_\beta v, m\rangle du^\gamma) &= \varepsilon^{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} \widetilde{\nabla}_\nu \langle \nabla_\beta v, m\rangle \, du^\nu \wedge du^\gamma \\ &= \varepsilon^{\alpha\beta} (a_{\alpha 2} \widetilde{\nabla}_1 \langle \nabla_\beta v, m\rangle - a_{\alpha 1} \widetilde{\nabla}_2 \langle \nabla_\beta v, m\rangle) \, du^1 \wedge du^2 \\ &= -a \varepsilon^{\alpha\beta} a_{\alpha\xi} \widetilde{\nabla}_\eta \langle \nabla_\beta v, m\rangle \varepsilon^{\xi\eta} \, du^1 \wedge du^2. \end{aligned}$$

Итак,

$$\Phi = \int\limits_S \left(a a^{\alpha\beta} \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t} - a \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\xi\eta} a_{\alpha\xi} \widetilde{\nabla}_\eta \langle \nabla_\beta v, m\rangle \right)_{t=0} du^1 du^2.$$

В полугеодезической системе координат $m = \frac{\partial}{\partial x^3}$, поэтому $\nabla_3 m = 0$ и

$$\nabla_v m = v^\alpha \nabla_\alpha m + v^3 \nabla_3 m = v^\alpha \nabla_\alpha m = -v^\alpha b_{\alpha\beta} a^{\beta\gamma} x_\gamma.$$

В последнем равенстве использованы формулы Гаусса — Вейнгартена [1, 2].

Так как $b_{\alpha\beta} = \langle \nabla_\beta x_\alpha, m\rangle$, при $t = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \langle \nabla_\beta x, m\rangle &= \langle \nabla_v \nabla_\beta x_\alpha, m\rangle + \langle \nabla_\beta x_\alpha, \nabla_v m\rangle \\ &= \langle \nabla_v \nabla_\beta x_\alpha, m\rangle - \langle \nabla_\beta x_\alpha, v^\xi b_{\xi\eta} a^{\eta\gamma} x_\gamma\rangle \\ &= \langle \nabla_v \nabla_\beta x_\alpha, m\rangle - v^\xi b_{\xi\eta} a^{\eta\gamma} \big\langle \widetilde{\Gamma}^\nu_{\alpha\beta} x_\nu + b_{\alpha\beta} m, x_\gamma \big\rangle \\ &= \langle \nabla_v \nabla_\beta x_\alpha, m\rangle - v^\xi b_{\xi\eta} a^{\eta\gamma} \widetilde{\Gamma}^\nu_{\alpha\beta} a_{\nu\gamma} = \langle \nabla_v \nabla_\beta x_\alpha, m\rangle - v^\xi b_{\xi\eta} \widetilde{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta} \\ &= \langle R(v, x_\beta) x_\alpha + \nabla_\beta \nabla_v x_\alpha, m\rangle - v^\xi b_{\xi\eta} \widetilde{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta} \\ &= \langle R(v, x_\beta) x_\alpha, m\rangle + \langle \nabla_\beta \nabla_\alpha v, m\rangle - v^\xi b_{\xi\eta} \widetilde{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Здесь R — оператор кривизны всего риманова пространства (M, g) и $\widetilde{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta}$ — коэффициенты связности поверхности (S, a). Итак, при $t = 0$

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t} = \langle R(v, x_\beta) x_\alpha, m\rangle + \langle \nabla_\beta \nabla_\alpha v, m\rangle - v^\xi b_{\xi\eta} \widetilde{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta}.$$

Заметим, что

$$\varepsilon^{\alpha\beta} a_{\alpha\xi} \varepsilon^{\xi\eta} = a^{\beta\eta}.$$

Следовательно, при $t = 0$

$$a a^{\alpha\beta} \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t} - a \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\xi\eta} a_{\alpha\xi} \widetilde{\nabla}_\eta \langle \nabla_\beta v, m\rangle = a a^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t} - \widetilde{\nabla}_\beta \langle \nabla_\alpha v, m\rangle \right).$$

Рассмотрим $\widetilde{\nabla}_\beta \langle \nabla_\alpha v, m\rangle$. Имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_\beta \langle \nabla_\alpha v, m\rangle &= \frac{\partial}{\partial u^\beta} \langle \nabla_\alpha v, m\rangle - \widetilde{\Gamma}^\xi_{\alpha\beta} \langle \nabla_\xi v, m\rangle \\ &= \langle \nabla_\beta \nabla_\alpha v, m\rangle + \langle \nabla_\alpha v, \nabla_\beta m\rangle - \widetilde{\Gamma}^\xi_{\alpha\beta} \langle \nabla_\xi v, m\rangle. \end{aligned}$$

С учетом полученных равенств при $t = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t} - \widetilde{\nabla}_\beta \langle \nabla_\alpha v, m\rangle &= \langle R(v, x_\beta) x_\alpha, m\rangle + \langle \nabla_\beta \nabla_\alpha v, m\rangle - v^\xi b_{\xi\eta} \widetilde{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta} \\ &\quad - \langle \nabla_\beta \nabla_\alpha v, m\rangle - \langle \nabla_\alpha v, \nabla_\beta m\rangle + \widetilde{\Gamma}^\xi_{\alpha\beta} \langle \nabla_\xi v, m\rangle \\ &= \langle R(v, x_\beta) x_\alpha, m\rangle - v^\xi b_{\xi\eta} \widetilde{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta} - \langle \nabla_\alpha v, \nabla_\beta m\rangle + \widetilde{\Gamma}^\xi_{\alpha\beta} \langle \nabla_\xi v, m\rangle \end{aligned}$$

(используем формулы Гаусса — Вейнгартена)

$$= \langle R(v, x_\beta)x_\alpha, m\rangle - v^\xi b_{\xi\eta}\widetilde{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta} + \langle \nabla_\alpha v, b_{\beta\xi}a^{\xi\eta}x_\eta\rangle + \widetilde{\Gamma}^\xi_{\alpha\beta}\langle \nabla_\xi v, m\rangle$$

$$= \langle R(v, x_\beta)x_\alpha, m\rangle - v^\xi b_{\xi\eta}\widetilde{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta} + b_{\beta\xi}a^{\xi\eta}\langle \nabla_\alpha v, x_\eta\rangle + \widetilde{\Gamma}^\xi_{\alpha\beta}\langle \nabla_\xi v, m\rangle$$

(воспользуемся равенством $\langle \nabla_\xi v, m\rangle = -\langle x_\xi, \nabla_v m\rangle$)

$$= \langle R(v, x_\beta)x_\alpha, m\rangle - v^\xi b_{\xi\eta}\widetilde{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta} + b_{\beta\xi}a^{\xi\eta}\langle \nabla_\alpha v, x_\eta\rangle - \widetilde{\Gamma}^\xi_{\alpha\beta}\langle x_\xi, \nabla_v m\rangle$$

$$= \langle R(v, x_\beta)x_\alpha, m\rangle - v^\xi b_{\xi\eta}\widetilde{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta} + b_{\beta\xi}a^{\xi\eta}\langle \nabla_\alpha v, x_\eta\rangle + \widetilde{\Gamma}^\xi_{\alpha\beta}\langle x_\xi, v^\eta b_{\eta\nu}a^{\nu\gamma}x_\gamma\rangle$$

$$= \langle R(v, x_\beta)x_\alpha, m\rangle - v^\xi b_{\xi\eta}\widetilde{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta} + b_{\beta\xi}a^{\xi\eta}\langle \nabla_\alpha v, x_\eta\rangle + v^\eta b_{\eta\nu}\widetilde{\Gamma}^\nu_{\alpha\beta}$$

$$= \langle R(v, x_\beta)x_\alpha, m\rangle + b_{\beta\xi}a^{\xi\eta}\langle \nabla_\alpha v, x_\eta\rangle.$$

Поэтому при $t = 0$

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t} - \widetilde{\nabla}_\beta\langle \nabla_\alpha v, m\rangle = \langle R(v, x_\beta)x_\alpha, m\rangle + b_{\beta\xi}a^{\xi\eta}\langle \nabla_\alpha v, x_\eta\rangle.$$

Покажем, что

$$J \equiv a^{\alpha\beta}b_{\beta\xi}a^{\xi\eta}\langle \nabla_\alpha v, x_\eta\rangle_{t=0} = 0.$$

Действительно,

$$J \equiv a^{\alpha\beta}b_{\beta\xi}a^{\xi\eta}\langle \nabla_\alpha v, x_\eta\rangle_{t=0} = a^{\alpha\beta}b_{\beta\xi}a^{\xi\eta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\langle x_\alpha, x_\eta\rangle_{t=0} - \langle x_\alpha, \nabla_v x_\eta\rangle_{t=0}\right)$$

(воспользуемся равенством $\frac{\partial}{\partial t}\langle x_\alpha, x_\eta\rangle_{t=0} = 0$)

$$= -a^{\alpha\beta}b_{\beta\xi}a^{\xi\eta}\langle x_\alpha, v_\eta\rangle_{t=0}$$

(сделаем в этом выражении подстановку индексов $\alpha \mapsto \eta$, $\beta \mapsto \xi$, $\xi \mapsto \beta$, $\eta \mapsto \alpha$ и учтем симметричность тензоров $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $b_{\xi\eta} = b_{\eta\xi}$)

$$= -a^{\alpha\beta}b_{\beta\xi}a^{\xi\eta}\langle \nabla_\alpha v, x_\eta\rangle_{t=0} = -J.$$

Итак, $J = -J$, т. е. $J = 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.
2. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
3. *Решетняк Ю. Г.* О нежестких поверхностях вращения // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 4. С. 591–604.
4. *Сабитов И. Х.* Локальная теория изгибания поверхностей // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 48. С. 196–270. (Итоги науки и техники).
5. *Александров В. А.* Об интегральной средней кривизне нежестких поверхностей // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 963–966.
6. *Rivin I., Schlencer J.-M.* The Schlafli formula in Einstein manifolds with boundary // Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. 1999. V. 5, N 3. P. 18–23.
7. *Иванова-Каратопраклиева И., Марков П. Е., Сабитов И. Х.* Изгибание поверхностей. III // Фунд. и прикл. математика. 2006. Т. 12, № 1. С. 3–56.

Статья поступила 18 ноября 2013 г.

Нещадим Михаил Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
neshch@math.nsc.ru