Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1

УДК 519.21

ПРИНЦИПЫ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А. А. Боровков, А. А. Могульский

Аннотация. Изучаются вероятности больших уклонений обобщенных процессов восстановления. Установлены локальный и «интегральный» принципы больших уклонений в фазовом пространстве процесса (т. е. для положения процесса в момент времени T, $T \to \infty$). Найдены условия асимптотически слабой зависимости приращений процесса (в смысле грубой асимптотики) и доказаны локальный и «интегральный» принципы больших уклонений для конечномерных распределений процесса.

Ключевые слова: обобщенный процесс восстановления, обобщенный процесс восстановления со стационарными приращениями, функция восстановления, функция уклонений, вторая функция уклонений, принцип больших уклонений, локальный принцип больших уклонений.

Введение

Пусть заданы случайный вектор (τ_0, ζ_0) и независимая от него последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов (τ, ζ), $(\tau_1, \zeta_1), (\tau_2, \zeta_2), \dots$, где $\tau_0 \geq 0$, $\tau > 0$. Обозначим

$$T_0 := 0, \quad T_n := \sum_{j=1}^{n} \tau_j \text{ при } n \geq 1; \quad T_{0,-1} := 0, \quad T_{0,n} := \tau_0 + T_n \text{ при } n \geq 0,$$

$$Z_0 := 0, \quad Z_n := \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \text{ при } n \geq 1; \quad Z_{0,-1} := 0, \quad Z_{0,n} := \zeta_0 + Z_n \text{ при } n \geq 0.$$

Пусть при $t \geq 0$

$$\eta(t) := \min\{k \geq 0 : T_{0,k} \geq t\}, \quad \nu(t) := \eta(t) - 1.$$

Ясно, что для всех $t > 0$ выполняется равенство

$$\nu(t) = \max\{k \geq -1 : T_{0,k} < t\}.$$

Обобщенный процесс восстановления (о.п.в.) $Z(t)$, $t \geq 0$, определяется равенством

$$Z(t) := Z_{0,\nu(t)}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 13–01–12415 офи-м, 14–01–0020-а).

Стандартная общепринятая модель о.п.в. предполагает, что время τ_0 появления первого скачка и величина ζ_0 этого скачка имеет совместное распределение, отличное, вообще говоря, от совместного распределения (τ, ζ) (см., например, [1, 2]). Это реализуется, например, для о.п.в. со стационарными приращениями (см. § 3). Если $(\tau_0, \zeta_0) =_d (\tau, \zeta)$, то процесс $Z(t)$ будем называть *однородным о.п.в.*, в противном случае — *неоднородным*.

Цель настоящей работы — найти грубую (логарифмическую) асимптотику вероятностей больших уклонений значений $Z(T)$ при $T \to \infty$ (принцип больших уклонений (п.б.у.) для $Z(T)$), а также п.б.у. для конечномерных распределений процесса $Z(t)$ на $[0, T]$. Если процесс $Z(t)$ однородный, случайные величины τ и ζ независимы и τ имеет экспоненциальное распределение, то процесс $Z(t)$ становится процессом с независимыми приращениями. П.б.у. для таких процессов установлены в [3, 4]. Аналогичные результаты имеют место, если случайные величины τ целочисленны и имеют геометрическое распределение.

Если $\tau_0 = \tau \equiv 1$, то процесс $Z(t)$ при $t = 0, 1, 2, \dots$ становится случайным блужданием, порожденным последовательностью сумм независимых случайных величин. П.б.у. для случайных блужданий установлены в [4–6; 7, гл. 4].

Если $\zeta_0 = \zeta \equiv 1$, то процесс $Z(t) = \nu(t) = \eta(t) - 1$ называется *простым* процессом восстановления. Для таких процессов распределение $Z(t)$ совпадает с точностью до 1 с рапределением времени $\eta(t)$ первого прохождения блужданием $\{T_{0,k}\}$ уровня t. Так как в нашем случае $\tau_j > 0$, то

$$\mathbf{P}(Z(t) \geq n) = \mathbf{P}(\eta(t) > n) = \mathbf{P}(T_{0,n} < t). \tag{0.1}$$

Если простой процесс однороден ($\tau_0 =_d \tau$), то изучение распределения $Z(t)$ в силу (0.1) сводится к изучению распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Названный объект хорошо исследован как в области нормальных, так и в области больших уклонений (см., например, [7, гл. 3; 8, гл. VIII; 9, гл. 9]). Подход, связанный с использованием соотношения (0.1), применен, например, в [10] для отыскания точной асимптотики вероятностей умеренно больших уклонений для значений $\eta(T)$ при $T \to \infty$. В [11] аналогичная задача рассматривалась для больших и сверхбольших уклонений. Распространение соответствующих результатов на неоднородный случай $\tau_0 \neq_d \tau$ можно найти в [7, гл. 2; 12, гл. 11; 13].

Следует отметить, что в более общем случае, когда τ принимает значения обоих знаков, задача отыскания точной асимптотики распределения $\eta(t)$ становится значительно более сложной (соотношение (0.1) не выполнено). Но и в этом случае нужную асимптотику удалось весьма полно изучить. В [14] при $\tau_0 =_d \tau$ найдена асимптотика распределения $\eta(T)$ при $T \to \infty$ (включая асимптотические разложения) во всей крамеровской области больших уклонений. В частности, в [14] можно найти полные асимптотические разложения в локальных предельных теоремах для $\mathbf{P}(\eta(T) = n)$.

В случае $\zeta \not\equiv \mathrm{const}$ в [15] найдена точная асимптотика $\mathbf{P}(Z(T) > \alpha T)$ при выполнении моментного условия Крамера (см. ниже) и ряда других чрезмерно завышенных условий (сравни с теоремой 2.1 ниже). В [16] установлен п.б.у. для значений $Z(T)$ в случае детерминированной зависимости $\zeta = F(\tau)$, где F — известная функция. В [17] для некоторого специального класса распределений (τ, ζ), $(\tau_0, \zeta_0) =_d (\tau, \zeta)$, доказан принцип умеренно больших уклонений для значений $Z(T)$.

В [18] рассмотрены произвольный неубывающий процесс $Y(u)$ и его обра-

щение
$$Z_t := \inf\{u \ge 0 : Y(u) \ge t\}.$$
Установлено, что значение $\frac{Y(U)}{U}$ удовлетворяет п.б.у. при $U \to \infty$ с функцией уклонений $I(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $\frac{Z_T}{T}$ удовлетворяет п.б.у. при $T \to \infty$ с функцией уклонений $J(\alpha) = \alpha I\big(\frac{1}{\alpha}\big)$. В качестве следствия получен п.б.у. для $\frac{\eta(T)}{T}$ при $T \to \infty$. Несколько более общая постановка задачи рассмотрена в [19].

Если рассматривать не одномерные распределения процесса $Z(t)$, а распределения траекторий процесса $Z(tT)$ на отрезке $[0,1]$, то отыскание точной асимптотики для распределений каких-либо функционалов от $Z(tT)$, $t \in [0,1]$, становится значительно более трудной и не всегда разрешимой задачей. В [20] аналитическими методами найдена точная асимптотика (включая асимптотические разложения) совместного распределения $(\max\limits_{t \le T} Z(t),\ Z_{\eta(T)},\ T_{\eta(T)})$. В [21] установлен п.б.у. в пространстве траекторий для простого однородного процесса восстановления $\frac{\eta(tT)}{T}$, $t \in [0,1]$.

Перейдем к описанию результатов, полученных в [7, § 4.10], которые являются отправными для рассмотрений в настоящей работе. В [7, § 4.10] установлен п.б.у. для $\frac{Z(T)}{T}$ при весьма широких предположениях и найден явный вид функции уклонений $\Lambda^Z(\alpha)$, т. е. функции, определяющей предел
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{T} Z(T) \in \Delta[\alpha)\right) = -\Lambda^Z(\alpha), \tag{0.2}$$
где $\Delta[\alpha) = [\alpha, \alpha+\Delta)$, $\Delta = \Delta_T \to 0$ достаточно медленно при $T \to \infty$. Соотношение (0.2) является локальным п.б.у. для положения процесса $Z(T)$ при $T \to \infty$ (см. [7, § 4.10]; определение локального п.б.у. см. в [6] и в [7, § 4.1]). Оно установлено в [7] в предположении, что случайные векторы $\xi_i = (\tau_i, \zeta_i)$ при всех $i \ge 0$ удовлетворяют моментному условию Крамера

$[\mathbf{C}_0]$. $\mathbf{E}e^{\delta|\xi_i|} < \infty$ *при некотором* $\delta > 0$, $i = 0, 1$.

Однако в [7] утверждение (0.2) (теорема 4.10.1) доказано при некоторых упрощающих предположениях. В § 2 настоящей работы эти упрощающие предположения снимаются. Установлен также «интегральный» п.б.у. в фазовом пространстве для значений $Z(T)$. При более ограничительных условиях в § 4 удается получить локальный и «интегральный» п.б.у. для конечномерных распределений процесса $Z(t)$. Для всего этого потребовалось более полное, чем в [7], изучение свойств функции уклонений $\Lambda^Z(\alpha)$ и других связанных с ней объектов (см. § 1). В § 3, 4 рассмотрены о.п.в. со стационарными приращениями и условия асимптотически слабой зависимости приращений о.п.в.

Все основные утверждения, полученные в настоящей работе для обобщенного процесса восстановления $Z(t)$, распространены на процессы
$$Z^{(q)}(t) := Z(t) + qt$$
с линейным сносом qt.

§ 1. Предварительные утверждения

Приведем краткую версию рассуждений из § 4.10 в [7], которые позволяют отыскать функцию $\Lambda^Z(\alpha)$ в (0.2). Обозначим
$$A(\lambda,\mu) := \ln \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta}, \quad A_0(\lambda,\mu) := \ln \mathbf{E}e^{\lambda\tau_0+\mu\zeta_0},$$

$$\mathscr{A} := \{(\lambda,\mu) : A(\lambda,\mu) < \infty\}, \quad \mathscr{A}_0 := \{(\lambda,\mu) : A_0(\lambda,\mu) < \infty\}.$$

В соответствии с условием $[\mathbf{C}_0]$ внутренности $(\mathscr{A})$, $(\mathscr{A}_0)$ множеств $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_0$ содержат точку $(\lambda,\mu) = (0,0)$. Положим $\xi := (\tau,\zeta)$, $\xi_j := (\tau_j,\zeta_j)$ при $j \geq 0$,

$$S_{0,n} := (T_{0,n},\ Z_{0,n}) = \xi_0 + S_n, \quad \text{где } S_0 := (0,0), \quad S_n := \sum_{j=1}^{n} \xi_j \text{ при } n \geq 1.$$

Мы будем использовать известные интегролокальные теоремы и локальный п.б.у. для сумм $S_{0,n}$ (см. [7, § 2.9]). Важную роль при изучении п.б.у. для сумм S_n играет функция уклонений

$$\Lambda(v,\alpha) := \sup_{(\lambda,\mu)} \{\lambda v + \mu\alpha - A(\lambda,\mu)\},$$

соответствующая случайному вектору $\xi = (\tau,\zeta)$. Это преобразование Лежандра над выпуклой непрерывной снизу функцией $A(\lambda,\mu)$, поэтому функция $\Lambda(v,\alpha)$ также выпукла и непрерывна снизу. Как вероятностная характеристика функция уклонений определена и изучена в [5; 7, § 1.1; 9, § 9.1].

В дальнейшем, чтобы избежать формальных и, как правило, несущественных затруднений в некоторых формулировках, мы будем предполагать, что случайный вектор ξ невырожденный, т. е. его распределение не сосредоточено на какой-нибудь одной прямой (не обязательно проходящей через начало координат). Если вектор ξ вырожденный, то распределение $\frac{S_n}{n}$ при всех n сосредоточено на той же прямой и функция уклонений $\Lambda(v,\alpha)$ принимает бесконечные значения вне этой прямой. В этом случае рассматриваемые ниже задачи упрощаются и сводятся к изучению сумм одномерных случайных величин.

Обратно, если вектор ξ невырожденный, то множество $\mathscr{L}$ конечности функции $\Lambda(\alpha)$ телесно. Действительно, допустим противное, что множество $\mathscr{L}$ не телесно. Так как множество $\mathscr{L}$ всегда выпукло, при нашем допущении оно с необходимостью лежит на некоторой прямой. В этом случае из экспоненциального неравенства Чебышева вытекает, что распределение вектора ξ сосредоточено на этой прямой, т. е. вектор ξ вырожденный. Получили противоречие, доказывающее требуемое утверждение.

Мы не будем вносить условие о невырожденности ξ в формулировки утверждений, так как эти утверждения остаются верными и для вырожденных ξ. Чтобы убедиться в этом, надо повторить все рассмотрения в вырожденном одномерном случае и иметь в виду, что $\Lambda(v,\alpha) = \infty$ вне соответствующей прямой.

Рассмотрим вероятность события $\left\{\frac{1}{T}Z(T) \in \Delta[\alpha)\right\}$ под знаком вероятности в (0.2). Пусть сначала $\alpha \neq 0$, так что полуинтервал $\Delta[\alpha)$ не содержит точку 0 при всех достаточно малых Δ (достаточно больших T, если $\Delta = \Delta_T$). Тогда для вероятности, присутствующей в (0.2), имеем

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{T}Z(T) \in \Delta[\alpha)\right) = \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(T_{0,n} \in dt,\ Z_{0,n} \in T\Delta[\alpha),\ \tau_{n+1} \geq T - t)$$

$$= \int_0^T H_0(dt, T\Delta[\alpha))\mathbf{P}(\tau \geq T - t), \quad (1.1)$$

где

$$H_0(B) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_{0,n} \in B), \quad B \subset \mathbb{R}^2,$$

есть функция (мера) восстановления для последовательности сумм $S_{0,n}$. Интеграл в правой части (1.1) мы можем «грубо» (имея в виду логарифмическую асимптотику) приближать суммой по k значений

$$H_0(T\Delta[k\Delta),\ T\Delta[\alpha))\mathbf{P}(\tau \geq T(1-k\Delta)), \quad \text{при } k=0,1,\dots,N-1,$$

считая для простоты, что $N=\frac{1}{\Delta}$ — целое число. Поясним, что при выполнении некоторого условия (см. условие (1.3) ниже) экспоненциальная часть $H_0(T\Delta[k\Delta),T\Delta[\alpha))$ при $T\to\infty$ будет иметь вид

$$\exp\{-TD(k\Delta,\alpha)\}, \tag{1.2}$$

и найдем одновременно вид функции $D(v,\alpha)$. Положим

$$\mathscr{A}^{\leq 0} := \{(\lambda,\mu) : A(\lambda,\mu)\leq 0\}.$$

В [7] показано (см. теорему 2.9.6), что при выполнении условия $\mathscr{A}^{\leq 0}\subset\mathscr{A}_0$ распределение первого слагаемого $\xi_0=(\tau_0,\zeta_0)$ в суммах $S_{0,n}$ не влияет на асимптотику экспоненциальной части (1.2). В [13] названное условие ослаблено до условия

$$\mathscr{A}^{\leq 0}\subset[\mathscr{A}_0] \tag{1.3}$$

($[B]$ есть замыкание множества B), которое оказывается необходимым и достаточным для того, чтобы экспоненциальная часть $H_0(T\Delta[k\Delta),T\Delta[\alpha))$ равнялась (1.2). Поэтому при выполнении (1.3) мы можем считать (для упрощения выкладок), что первое слагаемое $\xi_0=(\tau_0,\zeta_0)$ сумм $S_{0,n}$ совпадает по распределению со слагаемым $\xi=(\tau,\zeta)$. В этом случае функция восстановления H_0 имеет вид

$$H_0(T\Delta[k\Delta),T\Delta[\alpha)) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(T_n\in T\Delta[k\Delta),\ Z_n\in T\Delta[\alpha))$$

и можно воспользоваться известным видом экспоненциальной части каждого слагаемого в правой части последней формулы. В силу локального п.б.у. для сумм S_n экспоненциальная часть вероятности

$$\mathbf{P}(T_n\in T\Delta[k\Delta),\ Z_n\in T\Delta[\alpha))$$

имеет вид (см., например, § 2.9 в [7] или [13])

$$e^{-n\Lambda(\frac{vT}{n},\frac{\alpha T}{n})} = e^{-T\theta\Lambda(\frac{v}{\theta},\frac{\alpha}{\theta})}, \quad \text{где } \theta=\frac{n}{T},\ v=k\Delta.$$

Поэтому естественно ожидать, что экспоненциальная часть функции восстановления H_0 при $T\to\infty$ имеет вид

$$e^{-TD_\Lambda(v,\alpha)},$$

где

$$D_\Lambda(v,\alpha) := \inf_{\theta>0}\theta\Lambda\left(\frac{v}{\theta},\frac{\alpha}{\theta}\right), \tag{1.4}$$

так что

$$D_\Lambda(v,\alpha)\leq\Lambda(v,\alpha). \tag{1.5}$$

Это есть так называемая *вторая функция уклонений* (и результат тройного (!) преобразования над исходным распределением вектора $\xi=(\tau,\zeta)$), играющая определяющую роль в описании «грубой» асимптотики функции восстановления. В [22] (см. также [7, § 4.10]) установлены следующие свойства функции

$D_\Lambda(v,\alpha)$. Она неотрицательна и линейна вдоль любого луча, т. е. для $t>0$ и любых v,α

$$D_\Lambda(tv,t\alpha) = tD_\Lambda(v,\alpha). \tag{1.6}$$

Поскольку $\Lambda(v,\alpha)=0$ при $(v,\alpha)=(a_\tau,a_\zeta):=(\mathbf{E}\tau,\mathbf{E}\zeta)$, то

$$D_\Lambda(ta_\tau,ta_\zeta) = tD_\Lambda(a_\tau,a_\zeta) = 0. \tag{1.7}$$

Функция $D_\Lambda(v,\alpha)$ выпукла, т. е. для любых $p\ge 0$, $q\ge 0$, $p+q=1$; $(v,\alpha),(w,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$D_\Lambda(pv+qw,p\alpha+q\beta) \le pD_\Lambda(v,\alpha)+qD_\Lambda(w,\beta). \tag{1.8}$$

Из выпуклости (1.8) и линейности (1.6) следует полуаддитивность функции $D_\Lambda(v,\alpha)$:

$$D_\Lambda(v+w,\alpha+\beta) \le D_\Lambda(v,\alpha)+D_\Lambda(w,\beta). \tag{1.9}$$

Обозначим через $\mathscr{D}:=\{(v,\alpha):D_\Lambda(v,\alpha)<\infty\}$ область, в которой функция $D_\Lambda(v,\alpha)$ конечна. Внутри области $\mathscr{D}$ функция $D_\Lambda(v,\alpha)$ непрерывна в силу ее выпуклости. Вне области $\mathscr{D}$ она равна ∞, а на границе $\partial\mathscr{D}$ множества $\mathscr{D}$ будет иметь разрывы.

Как уже говорилось, естественно ожидать, что функция $D_\Lambda(v,\alpha)$ будет описывать асимптотику функции

$$-\frac{1}{T}\ln H_0(T\Delta[k\Delta),T\Delta[\alpha)) = -\frac{1}{T}\ln H_0(T\Delta[v),T\Delta[\alpha))$$

при $v=k\Delta$. Однако это не совсем так, поскольку функция от v и α, равная

$$-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln H_0(T\Delta[v),T\Delta[\alpha)),$$

непрерывна снизу (см. об этом также в § 4.1 в [7]), а функция $D_\Lambda(v,\alpha)$, определенная в (1.4), не является, вообще говоря, непрерывной снизу. Действительно, если, например, $\mathbf{P}(\zeta>0)=1$, то $\Lambda(0,0)=\infty$; поэтому $D_\Lambda(0,0)=\infty$. Но в силу (1.7)

$$\lim_{t\to 0}D_\Lambda(ta_\tau,ta_\zeta)=0<D_\Lambda(0,0)=\infty,$$

т. е. в точке $(v,\alpha)=(0,0)$ непрерывность снизу функции D_Λ отсутствует. Если же в точках границы $\partial\mathscr{D}$ (т. е. в точках разрывов функции D_Λ, если таковые существуют) «подправить» функцию $D_\Lambda(v,\alpha)$, заменив ее по непрерывности снизу функцией

$$D(v,\alpha):=\lim_{\varepsilon\to 0}D_\Lambda((v,\alpha)_\varepsilon),\quad \text{где } D_\Lambda(B):=\inf_{(w,\beta)\in B}D_\Lambda(w,\beta), \tag{1.10}$$

$(v,\alpha)_\varepsilon$ — ε-окрестность точки $(v,\alpha)\in\mathbb{R}^2$, а в остальных точках (v,α) (т. е. в точках $(v,\alpha)\notin\partial\mathscr{D}$) положить

$$D(v,\alpha):=D_\Lambda(v,\alpha),$$

то получим непрерывную снизу функцию $D(v,\alpha)$ (представление (1.10) справедливо для всех точек $(v,\alpha)\in\mathbb{R}^2$), сохраняющую все свойства (1.5)–(1.9) функции $D_\Lambda(v,\alpha)$. В дальнейшем, следуя § 2.9 в [7], функцию $D(v,\alpha)$ наряду с функцией $D_\Lambda(v,\alpha)$ также будем называть *второй функцией уклонений*, соответствующей случайному вектору $\xi=(\tau,\zeta)$.

Для функции D при всех $(v,\alpha)\in\mathbb{R}^2$ имеет место представление

$$D(v,\alpha)=\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathscr{A}^{\le 0}}\{\lambda v+\mu\alpha\}=\sup_{(\lambda,\mu)\in\partial\mathscr{A}^{\le 0}}\{\lambda v+\mu\alpha\}=\sup_{(\lambda,\mu)\in(\mathscr{A}^{\le 0})}\{\lambda v+\mu\alpha\}, \tag{1.11}$$

где ∂B, (B) — граница и открытая часть множества B соответственно (см. теорему 2.9.1 в [7])[1)].

Вернемся к отысканию функции $\Lambda^Z(\alpha)$, определенной в (0.2). В силу (1.1), (1.2) при $k\Delta=v\le 1$ получаем (см. также формулу (4.10.11) в [7]), что

$$-\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\left(\frac{1}{T}Z(T)\in\Delta[\alpha)\right)\sim\inf_{v\in[0,1]}\{D(v,\alpha)+L(T,v)\}\quad\text{при } T\to\infty, \tag{1.12}$$

где

$$L(T,v):=-\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(\tau>T(1-v)). \tag{1.13}$$

Предел правой части в (1.12) (если он существует) дает искомое значение функции $\Lambda^Z(\alpha)$.

Положим

$$\lambda_+^{(\tau)}:=\sup\{\lambda:\mathbf{E}e^{\lambda\tau}<\infty\},\quad \widehat{D}(\alpha):=\inf_{v\in[0,1]}\big\{D(v,\alpha)+(1-v)\lambda_+^{(\tau)}\big\}, \tag{1.14}$$

и пусть v_α — максимальное значение из отрезка $[0,1]$, при котором достигается точная нижняя грань в определении функции $\widehat{D}(\alpha)$. Если $\lambda_+^{(\tau)}=\infty$, то полагаем

$$v_\alpha\equiv 1,\quad \widehat{D}(\alpha)=D(1,\alpha).$$

Пусть далее $(\lambda_\alpha,\mu_\alpha)$ — точка из $\mathscr{A}^{\le 0}$, в которой достигается sup в представлении (1.11) для функции $D(1,\alpha)$ (в (1.11) следует положить $v=1$), так что

$$D(1,\alpha)=\lambda_\alpha+\mu_\alpha\alpha. \tag{1.15}$$

Заметим, что число $D(1,0)$ является тем значением, при котором прямая $\lambda=D(1,0)$ в плоскости (λ,μ) касается справа границы $\partial\mathscr{A}^{\le 0}$ выпуклого множества $\mathscr{A}^{\le 0}$, так как в силу (1.11)

$$D(1,0)=\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathscr{A}^{\le 0}}\lambda=\sup\{\lambda:\inf_\mu A(\lambda,\mu)\le 0\}. \tag{1.16}$$

Наряду с условием $[\mathbf{C}_0]$ рассмотрим более сильное условие Крамера на распределение вектора ξ:

$[\mathbf{C}_\infty]$. *Для любого μ*

$$\mathbf{E}e^{\mu|\xi|}<\infty.$$

Будем писать $\xi\Subset[\mathbf{C}_0]$ ($\xi\Subset[\mathbf{C}_\infty]$), если случайная величина или вектор ξ удовлетворяют условию $[\mathbf{C}_0]$ ($[\mathbf{C}_\infty]$).

В дальнейшем будет полезно следующее утверждение.

Лемма 1.1. (i) *Функции $\widehat{D}(\alpha)\le D(1,a)$ выпуклы и непрерывны снизу. Они неотрицательны, обращаются в 0 в единственной точке $\alpha=a:=\frac{\mathbf{E}\zeta}{\mathbf{E}\tau}$, и*

$$\widehat{D}(\alpha)=D(1,\alpha) \tag{1.17}$$

в окрестности точки $\alpha=a$.

[1)] В доказательстве представления (1.11) в [22] допущена ошибка.

(ii) *Если при заданном* α *существует точка* $(\lambda_\alpha, \mu_\alpha) \in \mathscr{A}^{\le 0}$, *обладающая свойством* (1.15), *и при этом* $\lambda_\alpha \le \lambda_+^{(\tau)}$, *то имеет место равенство* (1.17).

(iii) *Всегда*

$$\widehat{D}(0) = \min\{D(1,0)), \lambda_+^{(\tau)}\}.$$

Если

$$\lambda_+^{(\tau)} \ge D(1,0) \quad (\text{или, что то же, } \widehat{D}(0) = D(1,0)), \tag{1.18}$$

то равенство (1.17) *справедливо при всех* α.

Если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$\begin{cases} 1) \quad \tau \quad \text{и} \quad \zeta \quad \text{независимы}, \\ 2) \quad \mathbf{E}\zeta = 0, \\ 3) \quad \tau \Subset [\mathbf{C}_\infty] \quad \text{или} \quad \zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty], \end{cases} \tag{1.19}$$

то справедливы соотношения (1.17), (1.18).

(iv) *Если* $\xi = (\tau, \zeta) \Subset [\mathbf{C}_0]$, *то*

$$\varliminf_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} D(1, \pm\alpha) > 0. \tag{1.20}$$

Если дополнительно $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, *то*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} D(1, \pm\alpha) = \infty. \tag{1.21}$$

Соотношение (1.17) можно записать также в виде $v_\alpha \equiv 1$.

Утверждение, обратное к (1.18), вообще говоря, неверно, о чем будет сказано в комментариях к лемме 1.1 после ее доказательства.

Доказательство леммы 1.1. (i) Если $\lambda_+^{(\tau)} = \infty$, то $\widehat{D}(\alpha) = D(1,\alpha)$, где функция $D(1,\alpha)$ выпукла и непрерывна снизу.

Если $\lambda_+^{(\tau)} < \infty$, то для любого α найдется значение $v_\alpha \in [0,1]$ такое, что

$$\widehat{D}(\alpha) = D(v_\alpha, \alpha) + (1 - v_\alpha)\lambda_+^{(\tau)}. \tag{1.22}$$

Поэтому в силу выпуклости функции $D(v,\alpha)$ для любых $p \ge 0$, $q \ge 0$, $p + q = 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} p\widehat{D}(\alpha) + q\widehat{D}(\beta) &= pD(v_\alpha, \alpha) + p(1 - v_\alpha)\lambda_+^{(\tau)} + qD(v_\beta, \beta) + q(1 - v_\beta)\lambda_+^{(\tau)} \\ &\ge D(pv_\alpha + qv_\beta, p\alpha + q\beta) + (1 - (pv_\alpha + qv_\beta))\lambda_+^{(\tau)} \ge \widehat{D}(p\alpha + q\beta). \end{aligned}$$

Выпуклость функции $\widehat{D}(\alpha)$ установлена.

Пусть теперь $\alpha_n \to \alpha$ при $n \to \infty$. Считая без ограничения общности, что последовательность $v_{(n)} := v_{\alpha_n}$ сходится к $v \in [0,1]$ при $n \to \infty$, получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} \widehat{D}(\alpha_n) = \varliminf_{n\to\infty} D(v_{(n)}, \alpha_n) + \lim_{n\to\infty}(1 - v_{(n)})\lambda_+^{(\tau)} \ge D(v, \alpha) + (1 - v)\lambda_+^{(\tau)} \ge \widehat{D}(\alpha).$$

Непрерывность снизу функции $\widehat{D}(\alpha)$ также доказана. Неравенство $\widehat{D}(\alpha) \le D(1,\alpha)$ следует непосредственно из определения (1.14).

В [7] установлено (см. теорему 4.10.1), что в окрестности точки $a = \frac{\mathbf{E}\zeta}{\mathbf{E}\tau}$ выполняется $\widehat{D}(\alpha) = D(1,\alpha)$ и при $\alpha \to a$

$$D(1,\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha - a)^2 D_a''[1 + o(1)],$$

где коэффициент
$$D''_a := \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} D(1,\alpha)|_{\alpha=a} \in (0,\infty)$$
найден в явном виде (см. [7, § 4.10]). Поэтому выпуклые функции $D(1,\alpha)$ и $\widehat{D}(\alpha)$ обращаются в нуль в единственной точке $\alpha = a$.

(ii) Если $\lambda_+^{(\tau)} = \infty$, то равенство (1.17) установлено в п. (i) доказательства леммы. Если $\lambda_+^{(\tau)} < \infty$, то для любого $v \in [0,1]$ имеем
$$\begin{aligned} D(v,\alpha) \geq \lambda_\alpha v + \mu_\alpha \alpha = \lambda_\alpha + \mu_\alpha\alpha - (1-v)\lambda_\alpha \\ \geq \lambda_\alpha + \mu_\alpha\alpha - (1-v)\lambda_+^{(\tau)} = D(1,\alpha) - (1-v)\lambda_+^{(\tau)}. \end{aligned}$$
Поэтому для любого $v \in [0,1]$ справедливо неравенство
$$D(v,\alpha) + (1-v)\lambda_+^{(\tau)} \geq D(1,\alpha),$$
из которого вытекает оценка
$$\widehat{D}(\alpha) \geq D(1,\alpha).$$
Так как обратное неравенство уже установлено, то равенство (1.17) доказано.

(iii) В силу свойства (1.6) имеем
$$D(t,0) = tD(1,0),$$
$$\widehat{D}(0) = \inf_{v\in[0,1]} \bigl\{vD(1,0) + (1-v)\lambda_+^{(\tau)}\bigr\} = \min\bigl\{D(1,0), \lambda_+^{(\tau)}\bigr\}.$$
Тот факт, что из (1.18) следует (1.17), доказан в [7] (лемма 4.10.1).

Если τ и ζ независимы, то при естественных соглашениях относительно обозначений имеем $A(\lambda,\mu) = A^{(\tau)}(\lambda) + A^{(\zeta)}(\mu)$ и в силу (1.16)
$$D(1,0) = \sup\{\lambda : A^{(\tau)}(\lambda) \leq -\inf_\mu A^{(\zeta)}(\mu)\} \leq \sup\{\lambda : A^{(\tau)}(\lambda) < \infty\} = \lambda_+^{(\tau)}$$
или, что то же, $\widehat{D}(0) = D(1,0)$.

Если $\mathbf{E}\zeta = 0$, то $A(0,\mu) > 0$ при $\mu \neq 0$, $A(\lambda,0) < 0$ при $\lambda < 0$, так что в силу (1.16) $D(1,0) = 0$ и соотношение (1.18) вновь выполнено.

Если $\tau \Subset [\mathbf{C}_\infty]$, то $\lambda_+^{(\tau)} = \infty$ и выполнение (1.18) очевидно.

Пусть теперь $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$. Установим сначала, что при любых $\lambda > \lambda_+^{(\tau)}$ и μ выполнено
$$A(\lambda,\mu) = \infty. \tag{1.23}$$
Допустим противное, т. е. что $A(\tilde\lambda,\tilde\mu) < \infty$ при некоторых $\tilde\lambda > \lambda_+^{(\tau)}$ и $\tilde\mu$. Так как $A^{(\zeta)}(-\mu) = \ln \mathbf{E}e^{-\mu\zeta} < \infty$ при любом μ, то для
$$\lambda \in (\lambda_+^{(\tau)}, \tilde\lambda), \quad p := \frac{\lambda}{\tilde\lambda},\ q := 1-p,\ \mu := \tilde\mu p,\ \mu^* := \frac{1}{q}\mu,$$
получим
$$e^{pA(\tilde\lambda,\tilde\mu)} = (\mathbf{E}e^{\tilde\lambda\tau+\tilde\mu\zeta})^p < \infty,$$
и в силу неравенства Гёльдера
$$\infty > e^{pA(\tilde\lambda,\tilde\mu)+qA^{(\zeta)}(-\mu^*)} = (\mathbf{E}e^{\tilde\lambda\tau+\tilde\mu\zeta})^p(\mathbf{E}e^{-\mu^*\zeta})^q \geq \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta-\mu\zeta} = \mathbf{E}e^{\lambda\tau} = \infty.$$

Полученное противоречие доказывает (1.23). Из (1.23), (1.16) вытекает, что множество $\mathscr{A}^{\le 0}$ лежит в полупространстве $\{(\lambda,\mu) : \lambda \le \lambda_+^{(\tau)}\}$, стало быть, $\lambda_+^{(\tau)} \ge D(1,0)$ и второе соотношение в (1.18) выполнено.

(iv) Соотношение (1.20) вытекает из выпуклости функции $D(1,\alpha) \ge 0$, которая обращается в нуль в единственной точке $a = \frac{\mathbf{E}\zeta}{\mathbf{E}\tau}$.

Установим соотношение (1.21) в случае $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$. Пусть функция $h_+(\lambda)$ при $\lambda \le 0$ определяет верхнюю ветвь границы $\partial\mathscr{A}^{\le 0}$ выпуклого множества $\mathscr{A}^{\le 0}$, а функция $h_-(\lambda)$ при $\lambda \le 0$ определяет ее нижнюю ветвь. Так как луч $\{(\lambda,\mu) : \lambda \le 0,\ \mu = 0\}$ целиком лежит в множестве $\mathscr{A}^{\le 0}$, то функция $h_+(\lambda)$ не отрицательна, выпукла вверх и не убывает при $|\lambda| \to \infty$ в области $\lambda \le 0$. Аналогично функция $h_-(\lambda)$ неположительна, выпукла вниз и не возрастает при $|\lambda| \to \infty$ в области $\lambda \le 0$. Поскольку при любом $N < \infty$ в силу неравенства Коши

$$\sup_{|\mu|\le N} \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta} \le \sup_{|\mu|\le N} \sqrt{\mathbf{E}e^{2\mu\zeta}}\sqrt{\mathbf{E}e^{2\lambda\tau}} \to 0$$

при $\lambda \to -\infty$, для всех достаточно больших R при $\lambda \le -R$ выполняется $h_-(\lambda) \le -N < N \le h_+(\lambda)$. Это означает, что

$$h_\pm(\lambda) \to \pm\infty \quad \text{при } \lambda \to -\infty. \tag{1.24}$$

Так как $(-\alpha,\ h_\pm(-\alpha)) \in \partial\mathscr{A}^{\le 0}$ при всех $\alpha > 0$, то в силу представления (1.11) имеем неравенства

$$D(1,\alpha) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\partial\mathscr{A}^{\le 0}} \{\lambda + \mu\alpha\} \ge -\alpha + h_+(-\alpha)\alpha = \alpha(h_+(-\alpha) - 1);$$

$$D(1,-\alpha) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\partial\mathscr{A}^{\le 0}} \{\lambda - \mu\alpha\} \ge -\alpha - h_-(-\alpha)\alpha = \alpha(-h_-(-\alpha) - 1).$$

Из этих неравенств и свойства (1.24) вытекает, что выпуклая непрерывная снизу функция $D(1,\alpha)$ при $|\alpha| \to \infty$ растет быстрее любой линейной функции, т. е. имеет место (1.21). Утверждение (iv) леммы 1.1 и сама лемма 1.1 доказаны.

Лемма 1.1 показывает, что альтернатива:

$$\text{либо } \lambda_+^{(\tau)} \ge D(1,0)\ (\widehat{D}(0) = D(1,0)),\ \text{либо } \lambda_+^{(\tau)} < D(1,0)\ (\widehat{D}(0) = \lambda_+^{(\tau)}), \tag{1.25}$$

фигурирующая в лемме 1.1, играет важную роль в дальнейшем изложении и в работе [23], в которой устанавливаются п.б.у. для траекторий процессов восстановления. Оказывается, что форма функционала уклонений существенно зависит от того, какая из возможностей (1.25) имеет место.

Как мы видели, первая возможность реализуется при выполнении хотя бы одного из четырех условий (1.19). Стало быть, вторая возможность в (1.25) с необходимостью означает зависимость τ и ζ, неравенство $\mathbf{E}\zeta \ne 0$ и конечность $\lambda_+^{(\tau)}$, $\min\{\mu_+^{(\zeta)},\ \mu_+^{(-\zeta)}\}$, где $\mu_+^{(\zeta)} := \sup\{\mu : \mathbf{E}e^{\mu\zeta} < \infty\}$.

Вторая возможность также реализуется. Действительно, рассмотрим случай $\zeta = \tau + \gamma$, где γ не зависит от τ. Для таких ζ при естественных соглашениях относительно обозначений будем иметь

$$A(\lambda,\mu) = \ln \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu(\tau+\gamma)} = A^{(\tau)}(\lambda+\mu) + A^{(\gamma)}(\mu),$$

$$\Lambda(v,\alpha) = \sup_{\lambda,\mu}\{\lambda v + \mu\alpha - A^{(\tau)}(\lambda+\mu) - A^{(\gamma)}(\mu)\}.$$

Полагая $r = \lambda + \mu$, получим

$$\Lambda(v, \alpha) = \sup_{r,\mu}\{rv + \mu(\alpha - v) - A^{(\tau)}(r) - A^{(\gamma)}(\mu)\} = \Lambda^{(\tau)}(v) + \Lambda^{(\gamma)}(\alpha - v),$$

$$D(v, \alpha) = \inf_{\theta>0} \theta \left[\Lambda^{(\tau)}\left(\frac{v}{\theta}\right) + \Lambda^{(\gamma)}\left(\frac{\alpha - v}{\theta}\right)\right] \geq D^{(\tau)}(v) + D^{(\gamma)}(\alpha - v),$$

$$D(1, 0) \geq D^{(\tau)}(1) + D^{(\gamma)}(-1).$$

При фиксированном распределении τ (и, стало быть, при фиксированном $\lambda_+^{(\tau)}$) значение $D^{(\gamma)}(-1)$, а вместе с ним и $D(1, 0)$ могут быть сделаны выбором распределения γ сколь угодно большими, так что неравенство $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$ в (1.25) всегда может быть реализовано. При этом с необходимостью $\mathbf{E}\zeta \neq 0$ (см. утверждение (iii) леммы 1.1), так что $a = \frac{\mathbf{E}\zeta}{\mathbf{E}\tau} \neq 0$. Получили, что в нашем примере $\widehat{D}(0) < D(1, 0)$, в то время как в окрестности точки $\alpha = a \neq 0$ выполняется $\widehat{D}(\alpha) = D(1, \alpha)$ (см. (1.17)). Таким образом, обратное утверждение к (1.18) о том, что выполнение (1.17) при каких-нибудь $\alpha \neq 0$ влечет за собой (1.18), неверно.

Если выполнено неравенство $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$, то для установления п.б.у. с необходимостью приходится предполагать «грубую» гладкость распределения τ:

$$\ln \mathbf{P}(\tau \geq T) \sim -\lambda_+^{(\tau)} T \quad \text{при } T \to \infty \tag{1.26}$$

(см. ниже теорему 2.1 и следствие 3.1).

Вероятностный смысл условия $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$ состоит в том, что в этом случае вероятность однородному процессу $Z(t)$ попасть в момент T в нуль одним скачком $\tau_1 \geq T$ (значение ζ_1 при этом роли не играет) существенно выше, чем вероятность попасть когда-либо в εT-окрестность точки $(T, 0)$ двумерным случайным блужданием $\{S_n\}$. Неравенство $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$ означает сильную форму зависимости τ и ζ в области больших уклонений. Именно, покажем, что в этом случае при $T \to \infty$ и некотором $\delta > 0$ имеет место соотношение

$$\ln \mathbf{P}(\tau \geq T,\ \zeta = o(T)) \leq -\big(\lambda_+^{(\tau)} + \delta\big)T, \tag{1.27}$$

так что условная вероятность $\mathbf{P}(\zeta = o(T) \mid \tau \geq T)$ экспоненциально (относительно T) мала и уклонения τ порядка T влекут за собой с высокой вероятностью уклонения $|\zeta|$ того же порядка. Именно, в доказательстве леммы 4.2 (см. (5.7)) будет показано, что в случае $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$ при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет место сходимость

$$\mathbf{P}(|\zeta| > \varepsilon T \mid \tau \geq T) \to 1 \quad \text{при } T \to \infty. \tag{1.28}$$

Неравенства (1.27), (1.28) реализуются, например, для зависимостей вида

$$\zeta = c\tau + \gamma, \quad c \neq 0, \tag{1.29}$$

где γ не зависит от τ, $\gamma \in [\mathbf{C}_0]$. Соотношение (1.27) вытекает из леммы 1.1 и следующего утверждения.

Лемма 1.2. *Пусть $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$ и $\varepsilon = \varepsilon_T \to 0$ при $T \to \infty$. Тогда*

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tau > T,\ |\zeta| < \varepsilon T) \leq -D(1, 0). \tag{1.30}$$

Доказательство. Обозначим $B := \{(v,\alpha) : v > 1,\ |\alpha| < \varepsilon\}$ (B зависит от T через ε). Тогда событие под знаком вероятности в (1.30) можно записать в виде $\{(\tau,\zeta) \in TB\}$. Так как множество TB открыто и выпукло, то в силу экспоненциального неравенства Чебышева (см. § 4.4 в [7]) $\mathbf{P}((\tau,\zeta) \in TB) \le e^{-\Lambda(TB)}$. Поскольку ввиду (1.4), (1.10) $\Lambda(v,\alpha) \ge D_\Lambda(v,\alpha) \ge D(v,\alpha)$, имеем $\mathbf{P}((\tau,\zeta) \in TB) \le e^{-TD(B)}$, где $D(B) := \inf\limits_{(v,\alpha)\in B} D(v,\alpha)$. Поэтому для доказательства (1.30) осталось убедиться, что

$$\varliminf_{T\to\infty} D(B) \ge D(1,0).$$

Имеем

$$D(B) = \inf_{v>1,\ |\alpha|<\varepsilon} D(v,\alpha) = \inf_{v>1} v \inf_{|\alpha|<\varepsilon} D\left(1, \frac{\alpha}{v}\right)$$
$$= \inf_{v>1} v \inf_{|\beta|<\varepsilon/v} D(1,\beta) \ge \inf_{v>1} v \inf_{|\beta|<\varepsilon} D(1,\beta) = \inf_{|\beta|<\varepsilon} D(1,\beta) \inf_{v>1} v = \inf_{|\beta|<\varepsilon} D(1,\beta).$$

В силу непрерывности снизу функции $D(1,\beta)$

$$\varliminf_{T\to\infty} D(B) \ge \varliminf_{T\to\infty} \inf_{|\beta|<\varepsilon} D(1,\beta) = D(1,0).$$

Лемма доказана.

Сказанное выше означает, что вторая возможность в (1.25) является весьма специальной и «менее собирательной», чем первая. Отметим также, что соотношение (1.27) не может быть характеристическим для возможности $\lambda_+^{(\tau)} < D(1,0)$ в (1.25), поскольку, например, для зависимостей (1.29) при $\mathbf{E}\gamma = -c\mathbf{E}\tau$ одновременно реализуется первая возможность в (1.25) и выполнено неравенство (1.27).

Замечание 1.1. Пользуясь непрерывностью снизу функции $D(1,\beta)$, можно так же, как в доказательстве леммы 1.2, установить, что при фиксированном $\varepsilon > 0$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tau > T,\ |\zeta| < \varepsilon T) \le -D(1,0) + \delta(\varepsilon),$$

где $\delta(\varepsilon) > 0$ выбором ε можно сделать сколь угодно малым.

§ 2. Принципы больших уклонений для $Z(T)$

Основным утверждением этого раздела является

Теорема 2.1. *Пусть $\xi_0 = (\tau_0,\zeta_0) \Subset [\mathbf{C}_0]$, $\xi = (\tau,\zeta) \Subset [\mathbf{C}_0]$.*

I. *Предположим, что выполнено условие*

$$\mathscr{A}^{\le 0} \subset [\mathscr{A}_0]$$

(*см.* (1.3)). *Если $\lambda_+^{(\tau)} < D(1,0)$, то предполагается также, что выполнено условие* (1.26) *«грубой» гладкости распределения τ. Если $\alpha = 0$, то предполагается дополнительно к* (1.3), *что*

$$\lambda_+^{(\tau_0)} := \sup\{t : \mathbf{E}e^{t\tau_0} < \infty\} \ge \min\{D(1,0), \lambda_+^{(\tau)}\}. \tag{2.1}$$

При выполнении названных условий

(i) *Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\Lambda^Z(\alpha) = \widehat{D}(\alpha)$, т. е.*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{T} Z(T) \in \Delta[\alpha)\right) = -\widehat{D}(\alpha), \tag{2.2}$$

где $\Delta = \Delta_T \to 0$ *достаточно медленно при* $T \to \infty$.

(ii) *Для любого борелевского множества* $B \subset \mathbb{R}$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{T} Z(T) \in B\right) \le -\widehat{D}([B]), \tag{2.3}$$

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{T} Z(T) \in B\right) \ge -\widehat{D}((B)), \tag{2.4}$$

где $[B]$ *и* (B) — *замыкание и внутренность множества* B *соответственно,*

$$\widehat{D}(B) := \inf_{\alpha\in B} \widehat{D}(\alpha).$$

II. *Если* $\lambda_+^{(\tau)} \ge D(1,0)$ $(\widehat{D}(0) = D(1,0))$ *и справедлив локальный п.б.у.* (2.2), *то с необходимостью выполнены соотношения* (1.3) *и* (2.1).

Из теоремы 2.1 вытекает, что в случае неравенства $\lambda_+^{(\tau)} \ge D(1,0)$ для справедливости локального п.б.у. (0.2) необходимо и достаточно одновременное выполнение соотношений (1.3) и (2.1).

Если координаты τ_0 и ζ_0 независимы и выполнено (1.3), то $\lambda_+^{(\tau_0)} \ge D(1,0)$ и условие (2.1) также выполнено, так что для независимых τ_0 и ζ_0 (2.1) вытекает из (1.3). Если $\mathbf{E}\zeta = 0$, то $D(1,0) = 0$ и условие (2.1) выполнено всегда.

Утверждения леммы 1.1 и теоремы 2.1 показывают, что при выполнении хотя бы одного из условий (1.19), т. е. в случае $\lambda_+^{(\tau)} \ge D(1,0)$, вторая функция уклонений $D(v,\alpha)$, соответствующая случайному вектору ξ, оказывается при $v = 1$ «обычной» функцией уклонений $\Lambda^Z(\alpha)$, соответствующей последовательности $Z(T)$, $T \to \infty$. При этом она обладает многими основными свойствами функции уклонений, соответствующей случайной величине, в частности выпуклостью, непрерывностью снизу, и имеет миноранты (1.20), (1.21) при $|\alpha| \to \infty$ и условиях $[\mathbf{C}_0]$ и $[\mathbf{C}_\infty]$ соответственно. Но не всеми свойствами: например, при естественных соглашениях относительно обозначений справедливо равенство $\Lambda^{(\tau,\zeta+b)}(v,\alpha) = \Lambda^{(\tau,\zeta)}(v,\alpha-b)$ при $b = \mathrm{const}$, в то время как функция $D(v,\alpha)$ таким свойством, вообще говоря, не обладает. Исключение составляет случай $\tau \equiv 1$, когда $D(1,\alpha)$ совпадает с функцией уклонений случайной величины ζ. Если τ и ζ независимы, а распределение τ является либо показательным, либо геометрическим, то $D(1,\alpha)$ также совпадает с функцией уклонений, но для случайной величины $Z(1)$, где однородный процесс $Z(t)$ либо является соответственно обобщенным пуассоновским процессом, либо полностью определяется суммами независимых случайных величин $Z(n) - Z(n-1)$, $n \ge 1$ (о п.б.у. для таких процессов см. [7, гл. 4] или [6, ч. III]).

Утверждение (i) теоремы 2.1 при дополнительном предположении

$$(v_\alpha, \alpha) \notin \partial\mathscr{D}, \tag{2.5}$$

где v_α определено в (1.22), доказано в [7] (см. теорему 4.10.1).

Условие гладкости (1.26) означает, что распределение случайной величины τ удовлетворяет локальному п.б.у.: *для любого* $\alpha > 0$ *и* $\Delta = \Delta_T \to 0$ *достаточно медленно,*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tau \in T\Delta[\alpha)) = -\lambda_+^{(\tau)}\alpha.$$

Из теоремы 2.1 вытекает аналогичное этой теореме утверждение для обобщенного процесса восстановления

$$Z^{(q)}(t) = Z(t) + qt, \quad t \in [0,T],$$

с линейным сносом qt.

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда при любом* $q \in \mathbb{R}$ *для процесса* $Z^{(q)}(T)$ *имеют место все утверждения теоремы* 2.1 *с функцией уклонений*

$$\Lambda^{Z^{(q)}}(\alpha) = \widehat{D}(\alpha - q).$$

Доказательство теоремы 2.1. I(i). Как отмечалось, утверждение (i) теоремы 2.1 доказано в [7] (см. теорему 4.10.1) при упрощающем предположении (2.5). Приведем соответствующее доказательство, но уже без использования предположения (2.5).

Напомним (см. рассуждения после (1.3)), что при выполнении условия (1.3) экспоненциальная асимптотика (1.2) не зависит от распределения $\xi_0 = (\tau_0, \zeta_0)$. Поэтому мы можем считать, не ограничивая общности (для упрощения выкладок), что первое слагаемое ξ_0 в суммах $S_{0,n}$ совпадает по распределению со слагаемым $\xi = (\tau, \zeta)$.

Пусть сначала $\alpha \neq 0$. Обозначим

$$D_T(v, \alpha) := D(v, \alpha) + L(T, v), \quad \widehat{D}_T(\alpha) := \inf_{0 \le v \le 1} D_T(v, \alpha),$$

где функция $L(T, v)$ определена в (1.13). Как установлено в [7] при доказательстве теоремы 4.10.1, для доказательства соотношения (2.2) при $\alpha \neq 0$ достаточно убедиться, что

$$\lim_{T \to \infty} \widehat{D}_T(\alpha) = \widehat{D}(\alpha). \tag{2.6}$$

Докажем (2.6). Обозначим

$$\widehat{D}_+(\alpha) := \varlimsup_{T \to \infty} \widehat{D}_T(\alpha), \quad \widehat{D}_-(\alpha) := \varliminf_{T \to \infty} \widehat{D}_T(\alpha).$$

(a) Оценка сверху. Надо показать, что

$$\widehat{D}_+(\alpha) \le \widehat{D}(\alpha). \tag{2.7}$$

Очевидно, $\widehat{D}_T(\alpha) \le D(v_\alpha, \alpha) + L(T, v_\alpha)$. Если $v_\alpha = 1$, то в силу равенства $L(T, 1) = 0$ имеем $\widehat{D}_T(\alpha) \le D(1, \alpha) = \widehat{D}(\alpha)$. Отсюда следует соотношение (2.7). Если $v_\alpha < 1$ ($\widehat{D}(0) < D(1, 0)$), то ввиду (1.22)

$$\widehat{D}_+(\alpha) \le D(v_\alpha, \alpha) + \lim_{T \to \infty} L(T, v_\alpha) = D(v_\alpha, \alpha) + (1 - v_\alpha)\lambda_+^{(\tau)} = \widehat{D}(\alpha).$$

Соотношение (2.7) установлено.

(b) Оценка снизу. Надо показать, что

$$\widehat{D}_-(\alpha) \ge \widehat{D}(\alpha). \tag{2.8}$$

Рассмотрим сначала случай $\lambda_+^{(\tau)} < \infty$. Пусть $\Lambda^{(\tau)}(v)$ — функция уклонений, соответствующая величине τ, $\lambda^{(\tau)}(v) := (\Lambda^{(\tau)}(v))'$ — ее производная. Тогда в силу экспоненциального неравенства Чебышева при $T(1 - v) \ge a_\tau := \mathbf{E}\tau$ имеем

$$-L(T, v) \le -\frac{1}{T}\Lambda^{(\tau)}(T(1 - v)) = -\frac{1}{T} \int\limits_{a_\tau}^{T(1-v)} \lambda^{(\tau)}(u)\, du.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $R_\varepsilon \in (a_\tau, \infty)$ так, что при $u \ge R_\varepsilon$

$$\lambda^{(\tau)}(u) \ge (1 - \varepsilon)\lambda_+^{(\tau)}. \tag{2.9}$$

Тогда при $v \le 1 - \frac{R_\varepsilon}{T}$ выполняется $R_\varepsilon \le T(1-v)$. Поэтому

$$L(T,v) \ge \frac{1}{T} \int\limits_{R_\varepsilon}^{T(1-v)} \lambda^{(\tau)}(u)\,du \ge (1-v)(1-\varepsilon)\lambda_+^{(\tau)} - (1-\varepsilon)\lambda_+^{(\tau)}\frac{R_\varepsilon}{T}.$$

Имеем

$$\min_{0\le v\le 1-\frac{R_\varepsilon}{T}} D_T(v,\alpha) \ge (1-\varepsilon)\left[\min_{0\le v\le 1-\frac{R_\varepsilon}{T}} \bigl\{D(v,\alpha) + (1-v)\lambda_+^{(\tau)}\bigr\} - \lambda_+^{(\tau)}\frac{R_\varepsilon}{T}\right]$$

$$\ge (1-\varepsilon)\left[\min_{0\le v\le 1} \bigl\{D(v,\alpha)+(1-v)\lambda_+^{(\tau)}\bigr\} - \lambda_+^{(\tau)}\frac{R_\varepsilon}{T}\right] = (1-\varepsilon)\left[\widehat{D}(\alpha) - \lambda_+^{(\tau)}\frac{R_\varepsilon}{T}\right] =: X_T.$$

Следовательно,

$$\varliminf_{T\to\infty} \min_{0\le v\le 1-\frac{R_\varepsilon}{T}} D_T(v,\alpha) \ge \varliminf_{T\to\infty} X_T = (1-\varepsilon)\widehat{D}(\alpha) =: X.$$

Изучим минимум функции $D_T(v,\alpha)$ по оставшейся части отрезка $[0,1]$:

$$\min_{1-\frac{R_\varepsilon}{T}\le v\le 1} D_T(v,\alpha) \ge \min_{1-\frac{R_\varepsilon}{T}\le v\le 1} D(v,\alpha).$$

В силу непрерывности снизу второй функции уклонений $D(u,\alpha)$ найдется точка $v_{(T)} \in \bigl[1-\frac{R_\varepsilon}{T}, 1\bigr]$ такая, что

$$\min_{1-\frac{R_\varepsilon}{T}\le v\le 1} D(v,\alpha) = D(v_{(T)},\alpha) =: Y_T.$$

Поэтому, опять в силу непрерывности снизу функции $D(v,\alpha)$ находим

$$\varliminf_{T\to\infty} \min_{1-\frac{R_\varepsilon}{T}\le v\le 1} D_T(v,\alpha) \ge \varliminf_{T\to\infty} D(v_{(T)},\alpha) \ge D(1,\alpha) =: Y.$$

Мы установили, что

$$\widehat{D}_T(\alpha) \ge \min\{X_T,\ Y_T\} \tag{2.10}$$

и при этом

$$\varliminf_{T\to\infty} X_T \ge X, \qquad \varliminf_{T\to\infty} Y_T \ge Y.$$

Тем самым

$$\widehat{D}_-(\alpha) = \varliminf_{T\to\infty} D_T(\alpha) \ge \min\{X,Y\}.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\widehat{D}_-(\alpha) \ge \min\{(1-\varepsilon)\widehat{D}(\alpha), D(1,\alpha)\} \ge (1-\varepsilon)\min\{\widehat{D}(\alpha), D(1,\alpha)\} = (1-\varepsilon)\widehat{D}(\alpha).$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то соотношение (2.8) в случае $\lambda_+^{(\tau)} < \infty$ доказано.

Рассмотрим случай $\lambda_+^{(\tau)} = \infty$. Повторим предыдущие рассуждения, заменив при этом в (2.9) величину $\lambda_+^{(\tau)}$ произвольным большим N и положив $\varepsilon = 0$. Тогда опять получим неравенство (2.10), в котором

$$\varliminf_{T\to\infty} X_T \ge \min_{0\le v\le 1}\{D(v,\alpha) + (1-v)N\} =: X, \quad \varliminf_{T\to\infty} Y_T \ge D(1,\alpha) =: Y.$$

Поэтому

$$\widehat{D}_-(\alpha) \ge \min\{X,Y\}.$$

Осталось заметить, что при всех достаточно больших N выполняется (см. доказательство леммы 1.1) $X = D(1,\alpha)$. Стало быть, для таких N

$$\widehat{D}_-(\alpha) \ge \min\{X, Y\} = D(1,\alpha) = \widehat{D}(\alpha).$$

Утверждение (2.2) для случая $\alpha \ne 0$ установлено.

Если $\alpha = 0$, то вместо (1.1) будем иметь равенство

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{T} Z(T) \in \Delta[0)\right) = \mathbf{P}(\tau_0 \ge T) + \int\limits_0^T H_0(dt, T\Delta[0))\mathbf{P}(\tau > T - t). \tag{2.11}$$

Мы уже установили, что второе слагаемое в правой части (2.11) имеет вид $e^{-T\widehat{D}(0)(1+o(1))}$. В силу экспоненциального неравенства Чебышева и предположения (2.1) первое слагаемое в правой части (2.11) допускает оценку

$$\mathbf{P}(\tau_0 \ge T) \le e^{-T\widehat{D}(0)(1+o(1))}.$$

Поэтому из равенства (2.11) находим

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{T} Z(T) \in \Delta[0)\right) = -\widehat{D}(0). \tag{2.12}$$

Утверждение (i) п. I теоремы 2.1 доказано.

I(ii). Поскольку локальный п.б.у. для $\frac{1}{T}Z(T)$ установлен, для доказательства «интегрального» п.б.у. достаточно убедиться (см., например, [7, § 4.1]), что для любого $N < \infty$ найдется $R = R_N < \infty$ такое, что

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{T}|Z(T)| \ge R\right) \le -N. \tag{2.13}$$

Заметим, что для произвольного $M < \infty$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{T}|Z(T)| \ge R\right) \le \mathbf{P}(\nu(T) \ge TM) + \mathbf{P}(|\zeta_0| + \cdots + |\zeta_{[TM]}| \ge RT), \tag{2.14}$$

где

$$\mathbf{P}(\nu(T) \ge TM) \le \mathbf{P}(T_{0,[MT]} \le T) \le \mathbf{P}(T_{[MT]} \le T).$$

Из экспоненциального неравенства Чебышева при M таком, что $\frac{T}{[MT]} < \mathbf{E}\tau$, получаем

$$\mathbf{P}(\nu(T) \ge TM) \le e^{-[MT]\Lambda^{(\tau)}(\frac{T}{[MT]})}.$$

Так как $\Lambda^{(\tau)}(v) \to \infty$ при $v \to 0$, то всегда можно выбрать M настолько большим, что

$$\mathbf{P}(\nu(T) \ge TM) \le e^{-NT}. \tag{2.15}$$

Поскольку случайные векторы $\xi_0 = (\tau_0, \zeta_0)$, $\xi = (\tau, \zeta)$, определяющие процесс $Z(T)$, удовлетворяют условию $[\mathbf{C}_0]$, с помощью экспоненциального неравенства Чебышева аналогично оценивается и второе слагаемое в правой части (2.14), так что в итоге выполнено (2.13). Утверждение (ii) п. I теоремы 2.1 доказано.

II. Необходимость. Пусть $\lambda_+^{(\tau)} \ge D(1,0))$ $(\widehat{D}(0) = D(1,0))$ и справедлив локальный п.б.у. (2.2).

1. Установим неравенство (2.1). Поскольку

$$\mathbf{P}(\tau_0 > T) \le \mathbf{P}\left(\frac{1}{T} Z(T) \in \Delta[0)\right),$$

то
$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(\tau_0>T)\le -D(1,0).$$
Отсюда вытекает, что для любого $\lambda<D(1,0)$ выполняется
$$\int\limits_0^\infty e^{\lambda t}\mathbf{P}(\tau_0>t)\,dt<\infty,$$
т. е. $\mathbf{E}e^{\lambda\tau_0}<\infty$. Последнее означает, что $\lambda_+^{(\tau_0)}\ge D(1,0)$ и неравенство (2.1) имеет место.

2. Докажем соотношение $\mathscr{A}^{\le 0}\subset[\mathscr{A}_0]$. Воспользуемся следующей оценкой сверху в «интегральном» п.б.у. для случайного вектора $\xi_0=(\tau_0,\zeta_0)$ (эту оценку мы докажем ниже): *для любого измеримого множества* $B\subset\mathbb{R}^2$
$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\left(\frac{\xi_0}{T}\in B\right)\le -D([B]).\tag{2.16}$$

Далее, для $\gamma=(\lambda,\mu)$ рассмотрим замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^2$:
$$\Pi_\gamma:=\{\beta\in\mathbb{R}^2:\langle\gamma,\beta\rangle\ge 1\}.$$
Пусть γ_0 лежит в выпуклом множестве $\mathscr{A}^{\le 0}$. Тогда для любого $\beta=(v,\alpha)\in\Pi_{\gamma_0}$ справедливо
$$D(v,\alpha)=\sup_{\gamma\in\mathscr{A}^{\le 0}}\langle\gamma,\beta\rangle\ge\langle\gamma_0,\beta\rangle\ge 1.$$
Поэтому
$$D(\Pi_{\gamma_0})=\inf_{(v,\alpha)\in\Pi_{\gamma_0}}D(v,\alpha)\ge 1$$
и в силу (2.16)
$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\left(\frac{\langle\gamma_0,\xi_0\rangle}{T}\ge 1\right)\le -D(\Pi_{\gamma_0})\le -1.\tag{2.17}$$
Для произвольного $\gamma\in(\mathscr{A}^{\le 0})$ найдется $q\in(0,1)$ такое, что $\gamma_0:=\frac{\gamma}{q}\in\mathscr{A}^{\le 0}$. Поэтому в силу (2.17)
$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{q}{qT}\ln\mathbf{P}\left(\frac{\langle\gamma,\xi_0\rangle}{qT}\ge 1\right)\le -1$$
и, стало быть,
$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{qT}\ln\mathbf{P}\left(\frac{\langle\gamma,\xi_0\rangle}{qT}\ge 1\right)\le -\frac{1}{q}=-(1+\delta),\quad\text{где }\delta>0.$$
Отсюда вытекает, что $\mathbf{E}e^{\langle\gamma,\xi_0\rangle}<\infty$, $\gamma\in\mathscr{A}_0$. Мы показали, что вложение $\gamma\in(\mathscr{A}^{\le 0})$ влечет вложение $\gamma\in\mathscr{A}_0$. Это значит, что $(\mathscr{A}^{\le 0})\subset\mathscr{A}_0$, $\mathscr{A}^{\le 0}\subset[\mathscr{A}_0]$. Соотношение (1.3) доказано. Для завершения доказательства теоремы 2.1 установим оценку (2.16).

Из условия $\xi_0=(\tau_0,\zeta_0)\in[\mathbf{C}_0]$ вытекает, что для любого $N<\infty$ найдется M такое, что
$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\left(\frac{\tau_0}{T}+\frac{|\zeta_0|}{T}\ge M\right)\le -N.$$

Поэтому для доказательства (2.16) достаточно убедиться, что для произвольных $v > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\tau_0}{T} \in (v)_\varepsilon,\ \frac{\zeta_0}{T} \in (\beta)_\varepsilon\right) \le -D(v,\beta), \tag{2.18}$$

где $(\alpha)_\varepsilon$ есть ε-окрестность точки α, последовательность $\varepsilon = \varepsilon(T)$ сходится к 0 произвольным образом. Поскольку для любого фиксированного $v > 0$ при $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{v}$, $\alpha = \frac{\beta}{v}$

$$\left\{\frac{\tau_0}{T} \in (v)_\varepsilon,\ \frac{\zeta_0}{T} \in (\beta)_\varepsilon\right\} = \left\{\frac{\tau_0}{vT} \in (1)_{\varepsilon'},\ \frac{\zeta_0}{vT} \in (\alpha)_{\varepsilon'}\right\}, \quad D(v,\beta) = vD(1,\alpha),$$

для доказательства (2.18) достаточно доказать, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\tau_0}{T} \in (1)_\varepsilon,\ \frac{\zeta_0}{T} \in (\alpha)_\varepsilon\right) \le -D(1,\alpha), \tag{2.19}$$

где последовательность $\varepsilon = \varepsilon(T)$ сходится к 0 произвольным образом. Вероятность в левой части (2.19) убывает при убывании ε. Поэтому неравенство (2.19) достаточно доказать для последовательностей $\varepsilon = \varepsilon(T)$, сходящихся к 0 достаточно медленно при $T \to \infty$. Неравенство (2.19) сохранится, если в нем множитель $\frac{1}{T}$ перед знаком логарифма заменить множителем $\frac{1-\varepsilon}{T}$. Поэтому для доказательства (2.19) достаточно показать, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\tau_0}{(1-\varepsilon)T} \in (1)_\varepsilon,\ \frac{\zeta_0}{(1-\varepsilon)T} \in (\alpha)_\varepsilon\right) \le -D(1,\alpha), \tag{2.20}$$

где последовательность $\varepsilon = \varepsilon(T)$ стремится к 0 достаточно медленно при $T \to \infty$.

Покажем, что событие

$$A = A(\alpha,T,\varepsilon) := \left\{\frac{\tau_0}{(1-\varepsilon)T} \in (1)_\varepsilon,\ \frac{\zeta_0}{(1-\varepsilon)T} \in (\alpha)_\varepsilon\right\},$$

стоящее под знаком вероятности в (2.20), с высокой вероятностью влечет за собой событие $\left\{\frac{Z(T)}{T} \in (\alpha)_{\varepsilon'}\right\}$ при $\varepsilon' = c\varepsilon$ и подходящем c. Отсюда и из локального п.б.у. для $Z(T)$ уже легко будет получить (2.20). Более точно, при

$$k = \left[\frac{3\varepsilon T}{a_\tau}\right] + 1, \quad \varepsilon k \to \infty \text{ при } T \to \infty,$$

рассмотрим высоковероятное событие

$$C = C(k,\varepsilon) := \{\max_{1\le i\le k} |S_i - ia| < \varepsilon k\}, \quad a = (a_\tau, a_\zeta),$$

и покажем, что

$$AC \subset \left\{\frac{Z(T)}{T} \in (\alpha)_{\varepsilon'}\right\} \tag{2.21}$$

при $T \to \infty$ и подходящем c. Действительно, по усиленному закону больших чисел

$$\mathbf{P}(C) \to 1 \tag{2.22}$$

для $\varepsilon \to 0$ достаточно медленно при $T \to \infty$. Кроме того,

$$AC \subset \{\tau_0 + T_k \ge T(1-2\varepsilon) + k(a_\tau - \varepsilon)\}.$$

Так как при достаточно больших T

$$T(1-2\varepsilon)+k(a_\tau-\varepsilon)\ge T\left[1-2\varepsilon+\frac{3\varepsilon}{a_\tau}(a_\tau-\varepsilon)\right]>T,$$

то $AC\subset\{\tau_0+T_k>T\}\subset\{\eta(T)\le k\}$ и, стало быть,

$$AC\subset\left\{\frac{Z(T)}{T}\in(\alpha)_{\varepsilon'}\right\}\quad \text{при } \varepsilon'=\varepsilon+\frac{3\varepsilon}{a_\tau}. \tag{2.23}$$

Это доказывает (2.21). Наконец, пользуясь независимостью событий A и C и соотношениями (2.22), (2.23), находим

$$\mathbf{P}(A)=\frac{\mathbf{P}(AC)}{\mathbf{P}(C)},$$

$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(A)=\varlimsup_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(AC)-\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(C)\right]$$
$$\le\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(AC)\le\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\left(\frac{Z(T)}{T}\in(\alpha)_{\varepsilon'}\right)\le -D(1,\alpha),$$

где последнее неравенство следует из локального п.б.у. для $Z(T)$. Соотношение (2.20), а вместе с ним и теорема 2.1 доказаны.

Замечание 2.1. Если процесс $Z(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, то, очевидно, процесс $-Z(t)$ также удовлетворяет этим условиям. Поэтому локальный п.б.у. (2.2) допускает следующую эквивалентную (2.2) формулировку:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\left(\frac{Z(T)}{T}\in(\alpha)_\varepsilon\right)=-\widehat{D}(\alpha),$$

где $\varepsilon=\varepsilon_T\to 0$ достаточно медленно при $T\to\infty$. Отсюда, в свою очередь, нетрудно получить, что для любой последовательности $T_1\sim T$ при $T\to\infty$ выполняется

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\left(\frac{Z(T_1)}{T}\in(\alpha)_\varepsilon\right)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\left(\frac{Z(T)}{T_1}\in(\alpha)_\varepsilon\right)=-\widehat{D}(\alpha).$$

Замечание 2.2. Из доказательства теоремы 2.1 и замечания 2 в [13] видно, что утверждения этой теоремы остаются справедливыми и в том случае, когда распределение первого скачка (обозначим его через $\xi_{0,T}=(\tau_{0,T},\zeta_{0,T})$) зависит от T так, что при всех (λ,μ) и $T\ge T_0>0$

$$\psi_{0,T}(\lambda,\mu):=\mathbf{E}e^{\lambda\tau_{0,T}+\mu\zeta_{0,T}}\le c\psi_0(\lambda,\mu),\quad c=\mathrm{const}, \tag{2.24}$$

где $\psi_0(\lambda,\mu)$ — преобразование Лапласа над распределением некоторого фиксированного случайного вектора $\xi_0=(\tau_0,\zeta_0)$. При этом условия теоремы 2.1 следует относить к этому фиксированному вектору ξ_0.

Очевидно, что для однородных процессов восстановления $Z(t)$, для которых случайный вектор $\xi_0=(\tau_0,\zeta_0)$ имеет то же распределение, что и вектор $\xi=(\tau,\zeta)$, соотношения (1.3), (2.1) выполнены. Поэтому *для однородных процессов восстановления в теореме* 2.1 *и следствии* 2.1 *условия* (1.3), (2.1) *излишни* (выполняются автоматически).

Некоторые дополнения к теореме 2.1 содержатся в лемме 2.1 в [23].

§ 3. Процессы со стационарными приращениями

Обратимся к важному для приложений случаю, когда процесс $Z(t)$ имеет *стационарные приращения*, т. е. распределение разностей $Z(t+h)-Z(t)$ не зависит от $t \geq 0$. Как известно, процесс $Z(t)$ является процессом со стационарными приращениями (п.с.п.), если «начальный» вектор $\xi_0=(\tau_0,\zeta_0)$ выбран специальным образом так, что

$$\psi_0(\lambda,\mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_0+\mu\zeta_0} = \frac{1}{\lambda\mathbf{E}\tau}(\psi(\lambda,\mu)-\psi(0,\mu)), \tag{3.1}$$

где $\psi(\lambda,\mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta}$. Такой процесс можно представлять себе как предел (по распределению) при $N\to\infty$ последовательности суженных на $[0,\infty)$ однородных процессов $Z_N(t)$, которые стартуют не в точке $t=0$, а в момент $t=-N$. Тогда (см. также [7, § 4.10]) совместное предельное распределение первого положительного момента времени среди $-N+T_k$, $k=1,2,\ldots$, и скачка процесса $Z_N(t)$ в этот момент для неарифметических τ будет иметь в силу локальной теоремы восстановления следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\tau_0>u,\ \zeta_0\in B)\\
&\quad= \lim_{N\to\infty}\left[\mathbf{P}(\tau>N+u,\ \zeta\in B)+\int_0^N \mathbf{P}(\tau>N-t+u,\ \zeta\in B)H(dt)\right]\\
&\quad= \frac{1}{\mathbf{E}\tau}\int_0^\infty \mathbf{P}(\tau>v+u,\ \zeta\in B)\,dv. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Такой же результат справедлив и для арифметических τ, если $N\to\infty$ по целочисленным значениям. Нетрудно видеть, что преобразование Лапласа для распределения (3.2) имеет вид (3.1).

Возникает естественный вопрос: в каких случаях условия (1.3) и (2.1) теоремы 2.1 выполнены для процессов со стационарными приращениями? Ответ на этот вопрос отчасти содержится в следующем утверждении.

Лемма 3.1. *Пусть $Z(t)$ — п.с.п. (т. е. распределение ξ_0 определяется соотношением* (3.1)*). Тогда условие* (2.1) *выполнено всегда. Если τ и ζ независимы, или ζ удовлетворяет условию $[\mathbf{C}_\infty]$, то выполнено также условие* (1.3).

Доказательство. Так как в силу (3.1) для рассматриваемых процессов выполняется $\lambda_+^{(\tau_0)}=\lambda_+^{(\tau)}$, то условие (2.1) выполнено.

Если τ и ζ независимы, то при естественном соглашении относительно обозначений имеем $\psi(\lambda,\mu)=\psi^{(\tau)}(\lambda)\psi^{(\zeta)}(\mu)$ и в (3.1)

$$\psi_0(\lambda,\mu)=\frac{\psi^{(\zeta)}(\mu)(\psi^{(\tau)}(\lambda)-1)}{\lambda\mathbf{E}\tau}.$$

В этом случае $\mathscr{A}_0=\mathscr{A}$ и условие (1.3) всегда выполнено.

Если координата ζ удовлетворяет условию $[\mathbf{C}_\infty]$, то $\psi(0,\mu)$ конечно при любом μ и вновь $\mathscr{A}_0=\mathscr{A}$. Лемма доказана.

При зависимых τ и ζ может оказаться, что для п.с.п. существует точка $(\lambda,\mu)\in\mathscr{A}^{\leq 0}$ при $\lambda<0$ такая, что $\psi_0(\lambda,\mu)=\infty$, и условие (1.3) не будет выполнено. На это указывает следующий

Пример 3.1. Пусть $\zeta = \tau + \gamma$, где γ не зависит от τ. Тогда

$$\psi(\lambda,\mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu(\tau+\gamma)} = \psi^{(\tau)}(\lambda+\mu)\psi^{(\gamma)}(\mu)$$

и в силу (3.1)

$$\psi_0(\lambda,\mu) = \frac{1}{\lambda\mathbf{E}\tau}\psi^{(\gamma)}(\mu)[\psi^{(\tau)}(\lambda+\mu) - \psi^{(\tau)}(\mu)].$$

Выберем τ и γ так, что при некотором $\delta \in (0,1/2)$ имеют место следующие соотношения:

$$\psi^{(\gamma)}(\delta) < \infty, \quad \psi^{(\tau)}(1-\delta) = \infty, \quad \psi^{(\gamma)}(1) \le 1, \quad \psi^{(\gamma)}(1+\delta) < \infty.$$

Тогда при $(\lambda,\mu) = (-1+\delta_1, 1+\delta_2)$ и всех δ_1, δ_2 таких, что $|\delta_1| + |\delta_2| < \delta$, выполняется

$$\psi_0(\lambda,\mu) = \frac{1}{(-1+\delta_1)\mathbf{E}\tau}\psi^{(\gamma)}(1+\delta_2)[\psi^{(\tau)}(\delta_1+\delta_2) - \psi^{(\tau)}(1+\delta_2)] = \infty.$$

Это означает, что точка $(-1,1)$ вместе с некоторой окрестностью лежит вне множества $\mathscr{A}_0$, т. е. $(-1,1) \notin [\mathscr{A}_0]$. В то же время $\psi(-1,1) = \psi^{(\gamma)}(1) \le 1$, т. е. $(-1,1) \in \mathscr{A}^{\le 0}$. Таким образом, условие (1.3) не выполнено.

Везде в дальнейшем начальные скачки ξ_0 для п.с.п. будем обозначать через ξ_{st} для того, чтобы отличать их от начальных скачков в общем случае. Тем самым все обозначения, соответствующие ξ_{st}, поменяют индекс 0 на st. Например, функция $\psi_{st}(\lambda,\mu)$ равна правой части в (3.1),

$$\mathscr{A}_{st} := \{(\lambda,\mu) : \psi_{st}(\lambda,\mu) < \infty\}$$

и т. д. Из отмеченного выше и того, что соотношение $\xi \Subset [\mathbf{C}_0]$ влечет за собой соотношение $\xi_{st} \Subset [\mathbf{C}_0]$ (см. (3.1)), вытекает

Следствие 3.1. *Пусть $\xi \Subset [\mathbf{C}_0]$.*

I. *Предположим, что выполнено условие*

$$\mathscr{A}^{\le 0} \subset [\mathscr{A}_{st}]. \tag{3.3}$$

Если $\lambda_+^{(\tau)} < D(1,0)$ ($\widehat{D}(0) < D(1,0)$), то предполагается также, что выполнено условие (1.26) *«грубой» гладкости распределения τ. При выполнении названных условий для п.с.п. справедливы п.б.у.* (2.2)–(2.4).

II. *Если $\lambda_+^{(\tau)} \ge D(1,0)$ ($\widehat{D}(0) = D(1,0)$) и для п.с.п. справедлив п.б.у.* (2.2), *то с необходимостью выполнены условия* (3.3) *и $\lambda_+^{(\tau_{st})} \ge D(1,0)$.*

В лемме 3.1 названы два условия, достаточные для выполнения (3.3). В следующем параграфе будет приведено еще одно достаточное условие, тесно связанное с вопросом о слабой зависимости приращений процесса $Z(t)$.

§ 4. Условие выполнения п.б.у. для приращений процесса и для конечномерных распределений

Пусть выполнены условия п. I теоремы 2.1, и пусть $U < T$ неограниченно возрастает вместе с T так, что $T - U \to \infty$. Будут ли в этом случае выполнены условия, обеспечивающие выполнение п.б.у. для приращений $Z(T) - Z(U)$? Начальные скачки $\xi_{0,U}$ сужения процесса $Z(t)$ на $[U,T]$ имеют следующий вид:

$\xi_{0,U} = \xi(U) := (\chi(U), \zeta(U))$, где $\chi(U) := T_{\eta(U)} - U$, $\zeta(U) := \zeta_{\eta(U)}$. Распределение $\xi_{0,U}$ определяется соотношениями ($B \subset \mathbb{R}$)

$$P(u,B) := \mathbf{P}(\chi(U) \ge u,\ \zeta(U) \in B)$$
$$= \mathbf{P}(\tau_0 \ge U+u,\ \zeta_0 \in B) + \int\limits_0^U H_{0,1}(dt)\mathbf{P}(\tau \ge U-t+u,\ \zeta \in B),$$

где

$$H_{0,1}(dt) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(T_{0,n} \in dt) = H_0(dt, \mathbb{R}).$$

Так как $\int\limits_0^t H_{0,1}(du) \le c_1 t + c_2$ при некоторых c_1, c_2, то интегрированием по частям нетрудно убедиться, что

$$P(u,B) \le \mathbf{P}(\tau_0 \ge U+u,\ \zeta_0 \in B) + c_1 \int\limits_0^U \mathbf{P}(\tau \ge U-t+u,\ \zeta \in B)\,dt$$
$$\le \mathbf{P}(\tau_0 \ge U+u,\ \zeta_0 \in B) + c_1 \int\limits_0^\infty \mathbf{P}(\tau \ge t+u,\ \zeta \in B)\,dt.$$

Отсюда аналогично предыдущему находим

$$\psi_U(\lambda,\mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\chi(U)+\mu\zeta(U)} \le \mathbf{E}(e^{\lambda(\tau_0-U)+\mu\zeta_0}) + c_1 \frac{\psi(\lambda,\mu)-\psi(0,\mu)}{\lambda}$$
$$\le \psi_0(\lambda,\mu) + c_1 \mathbf{E}\tau\psi_{st}(\lambda,\mu), \quad (4.1)$$

$$\mathscr{A}_0 \cap \mathscr{A}_{st} \subset \mathscr{A}_U := \{(\lambda,\mu) : \psi_U(\lambda,\mu) < \infty\}.$$

Учитывая замечание 2.2 к теореме 2.1 (неравенство (4.1) можно представить в виде (2.24)), получаем

Следствие 4.1. *Условие*

$$\mathscr{A}^{\le 0} \subset [\mathscr{A}_0 \cap \mathscr{A}_{st}] \quad (4.2)$$

вместе с другими условиями п. I *теоремы* 2.1 *влекут за собой выполнение п.б.у. для* $Z(T) - Z(U)$.

Если $\lambda_+^{(\tau)} \ge D(1,0)$ ($\widehat{D}(0) = D(1,0)$), то, по-видимому, имеет место и утверждение о необходимости условия (4.2) в случае выполнения п.б.у. для приращений $Z(T) - Z(U)$ (сравни со следствием 3.1).

Перейдем к п.б.у. для конечномерных распределений процесса $Z(t)$. Для простоты начнем с двумерных распределений. Будем говорить, что *выполнен локальный п.б.у. для двумерных распределений с функцией уклонений* $D(1,\alpha)$, если при любом фиксированном $u \in (0,1)$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(uT)}{T} \in \Delta[\alpha),\ \frac{Z(T)-Z(uT)}{T} \in \Delta[\beta)\right)$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(uT)}{T} \in \Delta[\alpha)\right) + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(T)-Z(uT)}{T} \in \Delta[\beta)\right)$$
$$= -uD\left(1, \frac{\alpha}{u}\right) - (1-u)D\left(1, \frac{\beta}{1-u}\right) = -D(u,\alpha) - D(1-u,\beta). \quad (4.3)$$

Пусть, как и прежде, $\xi_0 \Subset [\mathbf{C}_0]$, $\xi \Subset [\mathbf{C}_0]$. Из теоремы 2.1 следует, что условия

$$\mathscr{A}^{\le 0} \subset [\mathscr{A}_0], \quad \lambda_+^{(\tau_0)} \ge D(1,0), \quad \widehat{D}(0) = D(1,0) \tag{4.4}$$

необходимы и достаточны для выполнения (одномерного) п.б.у. для $Z(T)$ с функцией уклонений $D(1,\alpha)$. Гипотеза о том, что аналогичное утверждение справедливо и для конечномерных распределений процесса $Z(tT)$, оказывается, вообще говоря, неверной.

Пример 4.1. Построим однородный о.п.в. ($\xi_0 =_d \xi$, $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}$), для которого $\widehat{D}(0) = D(1,0)$ (и, стало быть, выполнены условия (4.4)), но п.б.у. (4.3) не будет иметь места. Пусть $\mathbf{P}(\tau \ge t) = e^{-t}$, $\zeta = \pm\tau$ с вероятностями 1/2. Тогда $\mathbf{E}\zeta = 0$, $D(1,0) = 0$, $\lambda_+^{(\tau)} = 1$, $\lambda_+^{(\tau)} > D(1,0) = \widehat{D}(0) = 0$, и условия (4.4) выполнены. Рассмотрим для $u = \frac{1}{2}$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon T \to \infty$ при $T \to \infty$ вероятность

$$P := \mathbf{P}\left(\frac{Z(uT)}{T} \in (0)_\varepsilon,\ \frac{Z(T) - Z(uT)}{T} \in (1)_\varepsilon\right).$$

Ясно, что при $T \to \infty$ эта вероятность не меньше, чем

$$\frac{1}{3}\mathbf{P}(\tau \ge T(1-\varepsilon)) = \frac{1}{3}e^{-T(1-\varepsilon)}, \quad \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\ln P \ge -1.$$

В то же время $D(1,2) = \infty$, так как скорость роста $Z(t)$ не превышает 1 ($\mathbf{P}(Z(T) > T) = 0$). Поэтому равенство (4.3) неверно.

Сказанное означает, что для выполнения п.б.у. для конечномерных распределений нужно требовать в той или иной форме слабую зависимость (в области больших уклонений) приращений $Z(T) - Z(U)$ от предыстории.

Рассмотрим более сильное, чем (4.2), условие, обеспечивающее выполнение условного п.б.у. для $Z(T) - Z(U)$ относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_U$, порожденной траекториями процесса $Z(t)$ на $[0,U]$. Это условие тесно связано с условиями асимптотической независимости приращений процесса $Z(t)$. Для $B \subset \mathbb{R}^2$ имеем

$$\mathbf{P}(\xi_{0,U} \in B) = \mathbf{P}((\tau_0 - U,\ \zeta_0) \in B;\ \tau_0 \ge U) + \mathbf{P}(\xi(U) \in B;\ \tau_0 < U). \tag{4.5}$$

Как уже отмечалось, область конечности преобразования Лапласа над первым (несобственным) распределением в правой части (4.5) содержит в себе $\mathscr{A}_0$. Рассмотрим область конечности преобразования Лапласа над вторым (тоже несобственным) распределением в правой части (4.5). Вся зависимость траектории $Z(t)$ на $[U,T]$ от траектории на $[0,U]$ сосредоточена в значении $\gamma(U) := U - T_{\nu(U)}$. Для первого скачка $\xi_{0,U} = \xi(U) = (\chi(U), \zeta(U))$ процесса $Z(t)$ на $[U,T]$ на множестве $\{\gamma(U) \in dt\} \in \mathfrak{A}_U$ при $u \ge 0$, $v \ge 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\chi(U) \ge u,\ \zeta(U) \ge v \mid \mathfrak{A}_U) &= \mathbf{P}(\tau \ge t+u,\ \zeta \ge v \mid \tau \ge t), \\ \mathbf{P}(\chi(U) \ge u,\ \zeta(U) < -v \mid \mathfrak{A}_U) &= \mathbf{P}(\tau \ge t+u,\ \zeta < -v \mid \tau \ge t). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Введем в рассмотрение случайную величину $\xi_\infty = (\tau_\infty, \zeta_\infty)$ (возможно, несобственную), распределение которой при $u \ge 0$, $v \ge 0$ определяется соотношениями

$$\mathbf{P}(\tau_\infty \ge u,\ \zeta_\infty \ge v) := \sup_{t>0} \mathbf{P}(\tau \ge t+u,\ \zeta \ge v \mid \tau \ge t),$$

$$\mathbf{P}(\tau_\infty \ge u,\ \zeta_\infty \le -v) := \sup_{t>0} \mathbf{P}(\tau \ge t+u,\ \zeta \le -v \mid \tau \ge t).$$

«Хвосты» этого распределения равномерно по всем направлениям мажорируют соответствующие «хвосты» условных распределений (4.6). Будем предполагать, что $\xi_\infty \Subset [\mathbf{C}_0]$.

Пусть $\mathscr{A}_\infty := \{(\lambda,\mu) : \psi_\infty(\lambda,\mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_\infty+\mu\zeta_\infty} < \infty\}$. Тогда область $\mathscr{A}_\infty$ содержит некоторую окрестность нуля и вложена в область конечности преобразования Лапласа над начальными скачками $\xi_{0,U} = \xi(U)$ при всех U и любой предыстории из $\mathfrak{A}_U$. Стало быть, если $\mathscr{A}^{\le 0} \subset [\mathscr{A}_\infty]$, то условия вида $\mathscr{A}^{\le 0} \subset [\mathscr{A}_0]$ будут выполнены равномерно для всех начальных скачков $\xi_{0,U}$ сужений процесса $Z(t)$ на $[U,T]$.

Прежде чем формулировать соответствующее утверждение, остановимся на некоторых свойствах распределения (τ,ζ), связанных с выполнением или невыполнением условий

$$\mathscr{A}^{\le 0} \subset [\mathscr{A}_\infty] \quad \text{и} \quad \xi_\infty \Subset [\mathbf{C}_0]. \tag{4.7}$$

Отметим прежде всего, что условие $\xi_\infty \Subset [\mathbf{C}_0]$ весьма ограничительно. Оно не выполнено, если распределение τ имеет большие лакуны. Другой признак невыполнения условия $\xi_\infty \Subset [\mathbf{C}_0]$ сформулируем в виде леммы.

Лемма 4.1. *Пусть существуют последовательности*

$$t_n \uparrow t_\infty \le \infty \quad \text{и} \quad u_n \begin{cases} \ge ct_n, & \text{если} \quad t_\infty = \infty, \\ \to \infty, & \text{если} \quad t_\infty < \infty, \end{cases}$$

при $n \to \infty$, $c = \mathrm{const} > 0$ *такие, что*

$$\mathbf{P}(|\zeta| \ge u_n \mid \tau \ge t_n) \ge \begin{cases} e^{o(t_n)}, & \text{если} \quad t_\infty = \infty, \\ p > 0, & \text{если} \quad t_\infty < \infty. \end{cases} \tag{4.8}$$

Тогда $\zeta_\infty \not\Subset [\mathbf{C}_0]$.

Условие (4.8) свидетельствует о сильной зависимости ζ и τ. Оно всегда выполнено, например, для зависимостей вида (1.29) при $t_\infty = \infty$. В случае $t_\infty < \infty$ оно выполнено, например, для вектора (τ,ζ), где величина τ равномерно распределена на $[0,1]$, $t_n \uparrow 1$, $u_n = -\ln(1-t_n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $\zeta = \ln(1-\tau)+\gamma$, γ не зависит от τ, $\gamma \Subset [\mathbf{C}_0]$.

Доказательство леммы 4.1. При любом $\mu > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{\mu|\zeta|} \mid \tau \ge t_n) &\ge \mathbf{E}(e^{\mu|\zeta|}, \quad |\zeta| \ge u_n \mid \tau \ge t_n) \\ &\ge e^{\mu u_n}\mathbf{P}(|\zeta| \ge u_n \mid \tau \ge t_n) \ge \begin{cases} e^{\mu c t_n + o(t_n)}, & \text{если} \quad t_\infty = \infty, \\ pe^{\mu u_n}, & \text{если} \quad t_\infty < \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Правая часть этих соотношений неограниченно возрастает при $n \to \infty$. Это означает, что $\zeta_\infty \not\Subset [\mathbf{C}_0]$. Лемма доказана.

Сформулируем утверждение, которое показывает, что существование собственной случайной величины ζ_∞ несовместимо с неравенством $\lambda_+^{(\tau)} < D(1,0)$.

Лемма 4.2. *Если* $\mathbf{P}(|\zeta_\infty| < \infty) > 0$, *то* $\lambda_+^{(\tau)} \ge D(1,0)$ $(\widehat{D}(0) = D(1,0))$.

Таким образом, условия (1.19), достаточные для выполнения равенства $\widehat{D}(0) = D(1,0)$, можно дополнить условием $\mathbf{P}(|\zeta_\infty| < \infty) > 0$.

Лемма 4.2 будет доказана в § 5.

Приведем условия асимптотически слабой зависимости τ и ζ (в области б.у.) и слабой регулярности τ, которые обеспечивают выполнение условий (4.7).

Обозначим в соответствии с предыдущим через $\lambda_\pm^{(\tau)}$, $\mu_\pm^{(\zeta)}$ границы областей конечности преобразований Лапласа над распределениями τ, ζ соответственно, так что $\lambda_-^{(\tau)} = -\infty$. Ограничимся для простоты рассмотрением наиболее важного случая $\lambda_+^{(\tau)} < \infty$. Рассмотрим следующие условия асимптотически слабой зависимости и правильности:

1) имеет место включение

$$(\mathscr{A}) \subset \bigl(\lambda_-^{(\tau)},\ \lambda_+^{(\tau)}\bigr) \times \bigl(\mu_-^{(\zeta)},\ \mu_+^{(\zeta)}\bigr), \tag{4.9}$$

2) при любом фиксированном $\delta > 0$ и всех достаточно больших t, u, v

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{P}(\tau \ge t+v \mid \zeta \ge u) - \ln \mathbf{P}(\tau \ge t) &\le -\bigl(\lambda_+^{(\tau)} - \delta\bigr)v, \\ \ln \mathbf{P}(\tau \ge t+v \mid \zeta \le -u) - \ln \mathbf{P}(\tau \ge t) &\le -\bigl(\lambda_+^{(\tau)} - \delta\bigr)v. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Нетрудно убедиться, что равенства

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau \ge ut,\ \zeta \ge vt) = -u\lambda_+^{(\tau)} - v\mu_+^{(\zeta)},$$

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau \ge ut,\ \zeta < -vt) = -u\lambda_+^{(\tau)} + v\mu_-^{(\zeta)}$$

при любых $u \ge 0$, $v \ge 0$ влекут за собой (4.9).

Лемма 4.3. *Если выполнены условия* (4.9), (4.10), *то*

$$\mathscr{A} \subset [\mathscr{A}_\infty].$$

Ясно, что в случае $\xi \Subset [\mathbf{C}_0]$ выполнение $\mathscr{A} \subset [\mathscr{A}_\infty]$ влечет за собой выполнение условий (4.7).

Если τ и ζ независимы, то условие (4.9) всегда выполнено, а условие (4.10) превращается в условие

$$\ln \mathbf{P}(\tau \ge t+v \mid \tau \ge t) \le -\bigl(\lambda_+^{(\tau)} - \delta\bigr)v$$

при любом фиксированном $\delta > 0$ и всех достаточно больших t и v.

Доказательство леммы 4.3. При $v \ge 0$, $u \ge 0$ имеем

$$\mathbf{P}(\tau_\infty,\ \zeta_\infty \ge u) = \sup_{t>0} \frac{\mathbf{P}(\tau \ge t+v,\ \zeta \ge u)}{\mathbf{P}(\tau \ge t)}; \tag{4.11}$$

аналогичное равенство справедливо для $\mathbf{P}(\tau_\infty,\ \zeta_\infty \le -u)$. Так как

$$\mathbf{P}(\tau \ge t) \ge \mathbf{P}(\tau \ge N) \quad \text{при всех } t \le N \text{ и любом } N > 0,$$

то sup в (4.11) по области $t \le N$ и любом $N > 0$ имеет (как функция от v и u) преобразование Лапласа, область конечности которого совпадает с $\mathscr{A}$. Поэтому область $\mathscr{A}_\infty$ совпадает с пересечением $\mathscr{A} \cap \mathscr{A}_*$ области $\mathscr{A}$ с областью $\mathscr{A}_*$ конечности преобразования Лапласа над распределением, которое определяется соотношением

$$\mathbf{P}(\tau_* \ge v,\ \zeta_* \ge u) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\mathbf{P}(\tau \ge t+v,\ \zeta \ge u)}{\mathbf{P}(\tau \ge t)} \tag{4.12}$$

и аналогичным равенством для $\mathbf{P}(\tau_* \ge v,\ \zeta_* \le -u)$. Пусть сначала $\bigl|\mu_\pm^{(\zeta)}\bigr| < \infty$. Тогда логарифм правой части (4.12) в силу (4.10) равен

$$\begin{aligned} &\varlimsup_{t\to\infty} \bigl[\ln \mathbf{P}(\zeta \ge u) + \ln \mathbf{P}(\tau \ge t+v \mid \zeta \ge u) - \ln \mathbf{P}(\tau \ge t)\bigr] \\ &\qquad\qquad \le -\bigl(\mu_+^{(\zeta)} - \delta\bigr)u - \bigl(\lambda_+^{(\tau)} - \delta\bigr)v \end{aligned} \tag{4.13}$$

при любом $\delta > 0$ и всех достаточно больших u и v. Соотношения (4.12), (4.13) и аналогичные соотношения для $\mathbf{P}(\tau_*,\ \zeta_* \le -u)$ означают, что

$$\left(-\infty,\ \lambda_+^{(\tau)}\right) \times \left(\mu_-^{(\zeta)},\ \mu_+^{(\zeta)}\right) \subset \mathscr{A}_*, \tag{4.14}$$

так что в силу (4.9) и равенства $\mathscr{A}_\infty = \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_*$ имеем

$$(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}_* = \mathscr{A}_* \cap (\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}_* \cap \mathscr{A} = \mathscr{A}_\infty, \quad \mathscr{A} \subset [\mathscr{A}_\infty]. \tag{4.15}$$

Если $\mu_+^{(\zeta)} = \infty$, то в правой части (4.13) вместо $\mu_+^{(\zeta)} - \delta$ следует поставить произвольное $N > 0$. Тогда вложения (4.14), (4.15) сохранятся. То же справедливо в случае $\mu_-^{(\zeta)} = -\infty$. Лемма 4.3 доказана.

Вернемся к вопросу об условиях, которые обеспечивали бы выполнение условных п.б.у. для приращений $Z(T) - Z(U)$, равномерное относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_U$, порожденной траекториями процесса $Z(t)$ на $[0, U]$. Из отмеченного выше вытекает

Следствие 4.2. *Условия* (4.7) *и*

$$\mathscr{A}^{\le 0} \subset [\mathscr{A}_0], \quad \lambda_+^{(\tau_0)} \ge D(1, 0)$$

влекут за собой равномерное по всем элементарным событиям $\omega \in \mathfrak{A}_U$ выполнение условного п.б.у. для траекторий $Z(T) - Z(U)$:

$$\lim_{T-U\to\infty} \frac{1}{T-U} \ln \mathbf{P}\left(\frac{Z(T) - Z(U)}{T-U} \in \Delta[\alpha) \mid \mathfrak{A}_U\right) = -D(1, \alpha)$$

(*сравни с* (2.2)).

Из следствия 4.2, в свою очередь, вытекает

Теорема 4.1. *Пусть $\xi_0 \Subset [\mathbf{C}_0]$, $\xi \Subset [\mathbf{C}_0]$, $\mathscr{A}^{\le 0} \subset [\mathscr{A}_0]$, $\lambda_+^{(\tau_0)} \ge D(1,0)$ и выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:*

1) $\mathscr{A}^{\le 0} \subset [\mathscr{A}_\infty]$, $\xi_\infty \Subset [\mathbf{C}_0]$;

2) $\zeta \Subset [\mathbf{C}_\infty]$.

Тогда при любом фиксированном $u \in (0, 1)$ приращения $Z(uT)$ и $Z(T) - Z(uT)$ асимптотически независимы в смысле грубой асимптотики, т. е. справедлив локальный п.б.у. (4.3) *для двумерных распределений.*

Напомним, что согласно лемме 4.3 условия слабой асимптотической зависимости (в области б.у.) (4.9), (4.10) достаточны для выполнения условий 1 теоремы 4.1.

Доказательство. Первое утверждение вытекает непосредственно из следствия 4.2 и леммы 4.2. Второе утверждение следует из п.б.у. для нормированных траекторий $z_T(t) = \frac{Z(tT)}{T}$, $t \in [0, 1]$, доказанного в теореме 4.1 в [23].

Теорема 4.1 доказана.

Из теоремы 4.1 очевидным образом вытекает п.б.у. для конечномерных распределений процесса $Z(t)$ в моменты u_jT, $j = 0, \ldots, k$; $0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_k = 1$.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Тогда при любых α_j, $j = 1, \ldots, k$*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} \left\{\frac{1}{T}(Z(u_jT) - Z(u_{j-1}T)) \in \Delta[\alpha_j)\right\}\right) = -I(f), \tag{4.16}$$

где

$$I(f) := \int\limits_0^1 D(1, f'(t))\,dt,$$

$f(t)$ — непрерывная ломаная на $[0,1]$, $f(0)=0$, с узловыми точками $\left(u_j, \sum\limits_{i=0}^{j} \alpha_i\right)$, $j = 0, \ldots, k$.

Справедлив также «интегральный» п.б.у. для конечномерных распределений процесса $Z(t)$: для любых измеримых множеств $B_j \subset \mathbb{R}$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} \left\{\frac{1}{T}(Z(u_jT) - Z(u_{j-1}T)) \in B_j\right\}\right) \le -I([B]), \tag{4.17}$$

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} \left\{\frac{1}{T}(Z(u_jT) - Z(u_{j-1}T)) \in B_j\right\}\right) \ge -I((B)), \tag{4.18}$$

где

$$I(B) := \inf_{f\in B} I(f),$$

B есть совокупность непрерывных ломаных $f(t)$ (с изломами на отрезке $[0,1]$ в точках u_j, $j = 1, \ldots, k$) таких, что $f(0) = 0$, $f(u_j) - f(u_{j-1}) \in B_j$ при $j = 1, \ldots, k$; $[B]$ и (B) означают замыкание и внутренность множества B соответственно в равномерной метрике.

Интегральный п.б.у. (4.17), (4.18) устанавливается с помощью локального п.б.у. (4.16) так же, как это делается в доказательстве теоремы 2.1.

§ 5. Доказательство леммы 4.2

Для доказательства леммы 4.2 и в дальнейшем нам понадобится

Лемма 5.1. *Справедливо равенство*

$$l^{(\tau)} := \varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tau \ge T) = -\lambda_+^{(\tau)}. \tag{5.1}$$

Доказательство. В силу экспоненциального неравенства Чебышева при $T \ge \mathbf{E}\tau$ и естественных соглашениях относительно обозначений имеем

$$\mathbf{P}(\tau \ge T) \le e^{-\Lambda^{(\tau)}(T)}.$$

Поскольку

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \Lambda^{(\tau)}(T) = \lambda_+^{(\tau)},$$

то

$$l^{(\tau)} \ge \lambda_+^{(\tau)}. \tag{5.2}$$

Если при этом $\lambda_+^{(\tau)} = \infty$, то $l^{(\tau)} = \infty$ и равенство (5.1) доказано.

Установим обратное к (5.2) неравенство в случае $\lambda_+^{(\tau)} < \infty$. Допустим противное: для некоторого $\delta > 0$ справедливо равенство

$$l^{(\tau)} = \lambda_+^{(\tau)} + \delta. \tag{5.3}$$

Это означает, что

$$\mathbf{P}(\tau \ge t) \le e^{-\lambda_+^{(\tau)} t - \delta t + o(t)} \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Из этого неравенства вытекает, что для всех $\lambda \in \big[0,\ \lambda_+^{(\tau)} + \delta\big)$ выполняется $\mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty$, т. е. $\lambda_+^{(\tau)} \ge \lambda_+^{(\tau)} + \delta$; противоречие. Лемма доказана.

Доказательство леммы 4.2. Докажем, что в случае $\lambda_+^{(\tau)} < D(1,0)$ выполнено равенство $\mathbf{P}(|\zeta_\infty| = \infty) = 1$ и, стало быть, неравенство $\lambda_+^{(\tau)} < D(1,0)$ несовместимо с условием $\mathbf{P}(|\zeta_\infty| < \infty) > 0$.

Итак, пусть

$$\lambda_+^{(\tau)} < D(1,0)\ (\widehat{D}(0) < D(1,0)).$$

При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ и любой последовательности $t_n \to \infty$ имеем

$$\mathbf{P}(\tau \ge t_n,\ |\zeta| \ge \varepsilon t_n) = \mathbf{P}(\tau \ge t_n) - \mathbf{P}(\tau \ge t_n,\ |\zeta| < \varepsilon t_n). \tag{5.4}$$

По лемме 5.1 существует последовательность $t_n \to \infty$, $n \to \infty$, такая, что

$$\mathbf{P}(\tau \ge t_n) = e^{-\lambda_+^{(\tau)} t_n + o(t_n)}. \tag{5.5}$$

Поэтому в силу замечания 1.1 к лемме 1.2

$$\mathbf{P}(\tau \ge t_n,\ |\zeta| < \varepsilon t_n) \le e^{-(D(1,0) - \delta(\varepsilon)) t_n + o(t_n)}, \tag{5.6}$$

где $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\delta(\varepsilon) < \frac{D(1,0) - \lambda_+^{(\tau)}}{2} =: r$. Тогда $D(1,0) - \delta(\varepsilon) > \lambda_+^{(\tau)} + r$ и правая часть в (5.6) не будет превосходить

$$e^{-(\lambda_+^{(\tau)} + r) t_n + o(t_n)}.$$

Так как $r > 0$, то вместе с (5.5) это означает, что второе слагаемое в правой части (5.4) будет пренебрежимо мало при $n \to \infty$ по сравнению с первым и, стало быть,

$$\mathbf{P}(\tau \ge t_n,\ |\zeta| \ge \varepsilon t_n) \sim \mathbf{P}(\tau \ge t_n), \quad \mathbf{P}(|\zeta| \ge \varepsilon t_n \mid \tau \ge t_n) \to 1 \tag{5.7}$$

при $n \to \infty$. Поэтому при любом $N > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|\zeta_\infty| \ge N) &= \mathbf{P}(\zeta_\infty \ge N) + \mathbf{P}(\zeta_\infty \le -N) \\ &= \sup_{t>0} \mathbf{P}(\zeta \ge N \mid \tau \ge t) + \sup_{t>0} \mathbf{P}(\zeta \le -N \mid \tau \ge t) \\ &\ge \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(\zeta \ge N \mid \tau \ge t_n) + \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(\zeta \le -N \mid \tau \ge t_n) \\ &\ge \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\zeta| \ge N \mid \tau \ge t_n) = 1, \end{aligned}$$

так что $\mathbf{P}(|\zeta_\infty| = \infty) = 1$. Лемма 4.2 доказана.

Для доказательства несовместимости условий $\lambda_+^{(\tau)} < D(1,0)$ и $\zeta_\infty \in [\mathbf{C}_0]$ можно было бы также воспользоваться леммой 4.1, так как в силу (5.7) условие (4.8) этой леммы выполнено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кокс Д. Р., Смит В. Л.* Теория восстановления. М.: Сов. Радио, 1967.
2. *Asmussen S., Albrecher H.* Ruin probabilities. Word Sci., 2010. (Adv. Ser. Stat. Sci. Appl. Probab.; V. 14).
3. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Неравенства и принципы больших уклонений для траекторий процессов с независимыми приращениями // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 286–297.
4. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Умеренно большие уклонения для траекторий случайных блужданий и процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. 2013. Т. 58, № 4. С. 648–671.
5. *Боровков А. А.* Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах // Теория вероятностей и ее применения. 1967. Т. 12, № 4. С. 635–654.
6. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Принципы больших уклонений для траекторий случайных блужданий. I, II, III // Теория вероятностей и ее применения. I: 2011. Т. 56, № 4. С. 627–655; II: 2012. Т. 57, № 1. С. 3–34; III: 2013. Т. 58, № 1. С. 37–52.
7. *Боровков А. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстроубывающие распределения скачков. М.: Физматлит, 2013.
8. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
9. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2009.
10. *Serfozo R. F.* Large deviations of renewal processes // Stochastic Processes Appl. 1974. V. 2, N 3. P. 295–301.
11. *Jiang T. F.* Large deviations for renewal processes // Stochastic Processes Appl. 1994. V. 50, N 1. P. 57–71.
12. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Медленно убывающие распределения скачков. М.: Физматлит, 2008.
13. *Боровков А. А., Могульский А. А.* О принципах больших уклонений для сумм случайных векторов и соответствующих функций восстановления в неоднородном случае. Мат. тр. (В печати).
14. *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.
15. *Zhiyi Chi.* Uniform convergence of exact large deviations for renewal processes // Ann. Appl. Probab. 2007. V. 17, N 3. P. 1019–1048.
16. *Lefevere R., Mariani M.* Large deviations for renewal processes // Stochastic Processes Appl. 2011. V. 121, N 10. P. 2243–2271.
17. *Tsirelson B.* From uniform renewal theorem to uniform large and moderate deviations for renewal-reward processes // Electron. Commun. Probab. 2013. V. 18, N 52. P. 1–13.
18. *Glynn P. W., Whitt W.* Large deviations behavior of counting processes and their inverses // Queueing Systems Appl. 1994. V. 17. P. 107–128.
19. *Duffield N. G., Whitt W.* Large deviations of inverse processes with nonlinear scaling // Ann. Appl. Probab. 1998. V. 8, N 4. P. 995–1026.
20. *Боровков А. А., Рогозин Б. А.* Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9, № 3. С. 401–430.
21. *Puhalskii A., Whitt W.* Functional large deviation principles for first-passage-time processes // Ann. Appl. Probab. 1997. V. 7, N 2. P. 362–381.
22. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Вторая функция уклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных блужданий // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 745–782.
23. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Принципы больших уклонений для траекторий обобщенных процессов восстановления. I, II // Теория вероятностей и ее применения (в печати).

Статья поступила 25 августа 2014 г.

Боровков Александр Алексеевич, Могульский Анатолий Альфредович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
mogul@math.nsc.ru, borovkov@math.nsc.ru