Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 517.5

НЕЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТИ

Ш. А. Балгимбаева

Аннотация. Изучаются аппроксимативные свойства L_q-жадных алгоритмов по известной системе U^d, состоящей из сдвигов ядер Дирихле, на классах Никольского — Бесова $\mathrm{SB}^r_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ и Лизоркина — Трибеля $\mathrm{SF}^r_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ функций смешанной гладкости.

Ключевые слова: наилучшее m-членное приближение, жадный алгоритм, периодический всплеск, пространства Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля, смешанная гладкость.

1. Введение. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых и вещественных чисел соответственно; X — действительное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$; $\Phi = \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — система элементов из X такая, что ее линейная оболочка $\operatorname{span}\Phi$ плотна в X.

Наилучшим m-членным приближением элемента $f \in X$ по системе Φ называется величина

$$\sigma_m(f,\Phi,X) = \inf_{\Lambda\subset\mathbb{N},\sharp\Lambda=m}\Big\{\Big\|f - \sum_{k\in\Lambda} c_k\phi_k\Big\|_X; c_k\in\mathbb{R}\Big\},\quad m\in\mathbb{N};$$

здесь и ниже $\sharp A$ — число элементов конечного множества A. Для множества F из X положим $\sigma_m(F,\Phi,X) = \sup\{\sigma_m(f,\Phi,X) \mid f\in F\}$.

Предположим, что система Φ — базис пространства X, т. е. для любого элемента $f\in X$ существует единственная последовательность скаляров $\{c_k(f)\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\phi_k.$$

Определим «жадный» алгоритм, следуя [1]. Положим для $f\in X$

$$C_k(f,X,\Phi) := \|c_k(f)\phi_k\|_X,\quad k\in\mathbb{N},$$

обозначим через Λ_m множество из m натуральных чисел такое, что

$$\min_{k\in\Lambda_m} C_k(f,X,\Phi) \ge \max_{j\in\mathbb{N}\setminus\Lambda_m} C_j(f,X,\Phi),$$

Работа выполнена при поддержке грантов 0740/ГФ и 0245/ГФ3 МОиН Республики Казахстан.

и определим «X-жадный» алгоритм (X-greedy algorithm) по системе Φ следующим образом:

$$G_m^X(f,\Phi) := \sum_{k\in\Lambda_m} c_k(f)\phi_k, \quad m\in\mathbb{N}.$$

Жадные алгоритмы относятся к классу нелинейных методов аппроксимации, важны для приложений и активно изучаются. По поводу теории жадных алгоритмов и подробной истории вопроса см. фундаментальный недавний обзор [1], где можно найти также исчерпывающую библиографию.

Для множества $F\subset X$ положим

$$G_m^X(F,\Phi) := \sup_{f\in F}\big\|f - G_m^X(f,\Phi)\big\|_X, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

В настоящей работе изучаются аппроксимативные свойства жадных алгоритмов в случае, когда $X = L_q(\mathbb{T}^d)$ на классах Никольского — Бесова $\mathrm{SB}^r_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ и Лизоркина — Трибеля $\mathrm{SF}^r_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ функций смешанной гладкости (определение см. в разд. 2) по известной ортонормированной системе U^d типа кратных периодических всплесков, образованной сдвигами кратных ядер Дирихле [2; 1, гл. 1].

Более конкретно, устанавливаются точные в смысле порядка оценки величин

$$G_m^q(\mathrm{F},U^d) \equiv G_m^{L_q}(\mathrm{F},U^d),$$

где F — это либо $\mathrm{SB}^r_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$, либо $\mathrm{SF}^r_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ при определенных соотношениях между параметрами класса функций и пространства.

Введем некоторые обозначения. Пусть $e_d = \{1,\dots,d\}$; $d\in\mathbb{N}$; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$; $\mathbb{T}^d := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$ — d-мерный тор; $\mathbb{T}\equiv\mathbb{T}^1$. Для $x=(x_1,\dots,x_d), y = (y_1,\dots,y_d)\in\mathbb{R}^d$ положим

$$x<y(x\le y) \Leftrightarrow x_j<y_j(x_j\le y_j),\ j\in e_d; \quad (x,y) = x_1y_1+\dots+x_dy_d,$$

$|s| = \sum\limits_{k=1}^d s_k$ — длина мультииндекса $s\in\mathbb{N}_0^d$.

Пусть $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$ $(1\le p\le\infty)$ — пространство 2π-периодических по каждой переменной функций f, суммируемых в степени p (при $p=\infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{T}^d$, с нормой $\|f\|_p$, где

$$\|f\|_p = \left\{(2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}|f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \ (1\le p<\infty);$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| \mid x\in\mathbb{T}^d\}.$$

Приведем определение системы U^d, следуя [2]. Одномерная система U определяется следующим образом:

$$U \equiv \{U_I(x) \mid I\in D\}, \quad x\in\mathbb{T},$$

где

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(D_n^+\cup D_n^-)\cup D_0, \quad D_0 = \{[0,1)\},$$

$$D_n^+ := \{I = I_{n,k}^+ = [(k+1/2)2^{-n},(k+1)2^{-n}),\ k=0,1,\dots,2^n-1\},$$

$$D_n^- := \{I = I_{n,k}^- = [k2^{-n},(k+1/2)2^{-n}),\ k=0,1,\dots,2^n-1\}, \quad n\in\mathbb{N};$$

$$U_{[0,1)} \equiv 1, \quad U_{I^{\pm}_{n,k}}(x) = 2^{-n/2} e^{\pm i 2^n x} U_n(\pm(x - 2\pi k 2^{-n})), \quad U_n(x) := \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{ikx}.$$

В многомерном случае система U^d определяется как тензорное произведение одномерных систем U: если $I = I_1 \times \dots \times I_d$, $I_j \in D^{\varepsilon_j}_{s_j}$, $\varepsilon_j = \{-,+\}$, $j \in e_d$ $(x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d)$, то

$$U_I(x) := \prod_{j=1}^{d} U_{I_j}(x_j).$$

Для $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d_0$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \{-,+\}^d$ положим

$$D^{\varepsilon}_s := \bigl\{ I : I = I_1 \times \dots \times I_d, \ I_j \in D^{\varepsilon_j}_{s_j}, \ j \in e_d \bigr\}; \quad D_d := \bigcup_{s,\varepsilon} D^{\varepsilon}_s.$$

Для $f \in L_1$ обозначим через

$$f_I := (f, U_I) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x) \overline{U}_I(x) \, dx,$$

$$\hat{f}_k(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-i(k,x)} \, dx, \quad k \in \mathbb{Z}^d,$$

тригонометрические коэффициенты Фурье и через

$$\delta^{\varepsilon}_s(f) := \sum_{k \in \rho(s,\varepsilon)} \hat{f}(x) e^{i(k,x)}, \quad s \in \mathbb{N}^d_0, \ \varepsilon \in \{-,+\}^d,$$

— соответствующие двоичные пачки ее ряда Фурье, где

$$\rho(s,\varepsilon) := \varepsilon_1 [2^{s_1}, 2^{s_1+1} - 1) \times \dots \times \varepsilon_d [2^{s_d}, 2^{s_d+1} - 1).$$

Легко видеть, что для любых $s \in \mathbb{N}^d_0$ и $\varepsilon \in \{-,+\}^d$ имеет место равенство

$$\delta^{\varepsilon}_s(f) = \sum_{I \in D^{\varepsilon}_s} f_I U_I.$$

2. Классы функций

В этом разделе даются определения пространств Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля периодических функций смешанной гладкости.

Пусть ℓ_θ $(1 \le \theta \le \infty)$ — пространство числовых последовательностей $\bigl\{a^{\varepsilon}_s\bigr\}_{s \in \mathbb{N}^d_0, \varepsilon \in \{-,+\}^d}$ с конечной нормой

$$\bigl\|\bigl\{a^{\varepsilon}_s\bigr\}\bigr\|_{\ell_\theta} = \biggl\{ \sum_{\varepsilon \in \{-,+\}^d} \sum_{s \in \mathbb{N}^d_0} |a^{\varepsilon}_s|^{\theta} \biggr\}^{1/\theta}, \ 1 \le \theta < \infty; \quad \bigl\|\bigl\{a^{\varepsilon}_s\bigr\}\bigr\|_{\ell_\infty} = \sup_{s \in \mathbb{N}^d_0, \varepsilon \in \{-,+\}^d} \bigl|a^{\varepsilon}_s\bigr|;$$

$\ell_\theta(L_p) \equiv \ell_\theta(L_p(\mathbb{T}^d))$ $(L_p(\ell_\theta) \equiv L_p(\mathbb{T}^d; \ell_\theta))$ — пространство функциональных последовательностей $\bigl\{f^{\varepsilon}_s(x)\bigr\}_{s \in \mathbb{N}^d_0, \varepsilon \in \{-,+\}^d}$, $x \in \mathbb{T}^d$, с конечной нормой

$$\bigl\|\bigl\{f^{\varepsilon}_s\bigr\} \mid \ell_\theta(L_p)\bigr\| = \bigl\|\bigl\{\bigl\|f^{\varepsilon}_s\bigr\|_p\bigr\}\bigr\|_{\ell_\theta}$$

(соответственно $\bigl\|\bigl\{f^{\varepsilon}_s\bigr\} \mid L_p(\ell_\theta)\bigr\| = \bigl\|\bigl\|\bigl\{f^{\varepsilon}_s\bigr\}\bigr\|_{\ell_\theta}\bigr\|_p$ с обычной модификацией при $\theta = \infty$).

Для функции $f(x)$, заданной на $\mathbb{T}^d$, пусть $\Delta_{h,j}^k f(x) = \underbrace{\Delta_{h,j} \ldots \Delta_{h,j}}_{k} f(x)$ — ее разность порядка $k \in \mathbb{N}_0$ в точке $x \in \mathbb{T}^d$ с шагом $h \in \mathbb{R}$ по переменной x_j, здесь

$$\Delta_{h,j} f(x) = f(\ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots) - f(x),$$

$$\Delta_{h,j}^1 f(x) := \Delta_{h,j} f(x), \quad \Delta_{h,j}^0 f(x) := f(x).$$

Если $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}_0^d$ и $h = (h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{R}^d$, то

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_{h_1,1}^{k_1} \Delta_{h_2,2}^{k_2} \ldots \Delta_{h_d,d}^{k_d} f(x)$$

— смешанная разность функции f порядка k в точке x с шагом h.

Приведем определение пространства Никольского — Бесова $SB_{p\,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ через смешанные разности [3, 4].

Определение 1. Пусть $1 \le p, \theta \le \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда *пространство Никольского — Бесова* $SB_{p\,\theta}^r = SB_{p\,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ есть совокупность всех функций $f \in L_p$, для которых

$$\bigl\| f \mid SB_{p\theta}^r \bigr\| = \|f\|_p + \sum_{\varnothing \ne e \subset e_d} \Biggl\{ \int\limits_{[0,2\pi]^{\sharp e}} \bigl\| \Delta_{h^e}^{k^e} f(\cdot) \bigr\|_p^\theta \prod_{j \in e} \frac{dh_j}{h_j^{1 + r_j \theta}} \Biggr\}^{1/\theta} < \infty, \qquad (2)$$

где $k > r$.

Приведем теорему характеризации пространства Никольского — Бесова $SB_{p\,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ с сопутствующей эквивалентной нормировкой [4, теорема 5.4].

Теорема А. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. Функция $f \in L_p$ принадлежит пространству $SB_{p\,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ тогда и только тогда, когда функциональная последовательность $\bigl\{2^{(r,s)} \delta_s^\varepsilon(f)\bigr\}$ принадлежит $\ell_\theta(L_p)$, при этом функционал*

$$\bigl\| f \mid SB_{p\theta}^r \bigr\| = \bigl\| \bigl\{ 2^{(r,s)} \delta_s^\varepsilon(f) \bigr\} \mid \ell_\theta(L_p) \bigr\|$$

является нормой пространства $SB_{p\theta}^r(\mathbb{T}^d)$, эквивалентной норме (2).

Здесь с учетом теоремы А нам удобно определить пространства Лизоркина — Трибеля $SF_{p\,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ следующим образом.

Определение 2. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда *пространство Лизоркина — Трибеля* $SF_{p\theta}^r = SF_{p\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ есть совокупность всех функций $f \in L_p$ с конечной нормой

$$\bigl\| f \mid SF_{p\theta}^r \bigr\| = \bigl\| \bigl\{ 2^{(r,s)} \delta_s^\varepsilon(f) \bigr\} \mid L_p(\ell_\theta) \bigr\|.$$

Через $\mathrm{SB}_{p\theta}^r = \mathrm{SB}_{p\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ и $\mathrm{SF}_{p\theta}^r = \mathrm{SF}_{p\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ обозначим единичные шары пространств $SB_{p\theta}^r$ и $SF_{p\theta}^r$ соответственно.

Отметим, что $SB_{p\,\infty}^r(\mathbb{T}^d) \equiv SH_p^r(\mathbb{T}^d)$ при $1 \le p \le \infty$ есть пространство функций с ограниченной смешанной разностью, впервые введенное и исследованное С. М. Никольским [5, 6] с точки зрения теории представления, вложения и интерполяции, а при $1 < p < \infty$ пространство $SF_{p\,2}^r(\mathbb{T}^d) \equiv SW_p^r(\mathbb{T}^d)$ есть пространство функций с ограниченной смешанной производной, впервые изученное с точки зрения теории приближений К. И. Бабенко [7, 8]; кроме того, теоремы вложения и граничные свойства пространств $SW_p^r([0,1]^d)$ впервые изучались в [9, 10]; подробнее о задачах теории приближений для классов $\mathrm{SW}_p^r(\mathbb{T}^d)$ и $\mathrm{SH}_p^r(\mathbb{T}^d)$ см. [11; 12, гл. 3], а также обзоры [1, 13].

Теория (представления, вложения, интерполяции) пространств $SB^r_{p\,\theta}(\mathbb{I}^d)$ ($\mathbb{I}=\mathbb{T}$ или $\mathbb{R}$) развита в [3] и достаточно подробно изложена в [14]. Теория пространств $SB^r_{p\,\theta}(\mathbb{R}^d)$ и $SF^r_{p\,\theta}(\mathbb{R}^d)$ на основе их фурье-аналитического определения дана в [15]; современное состояние теории пространств $SB^r_{p\,\theta}(\mathbb{I}^d)$ и $SF^r_{p\,\theta}(\mathbb{I}^d)$ ($\mathbb{I}=\mathbb{T}$ или $\mathbb{R}$) см. в недавнем обзоре [16].

3. Предварительные сведения

Далее будем использовать знаки $\ll$ и $\asymp$ порядкового неравенства и равенства: для функций $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ и $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ пишем $\varphi(u)\ll\psi(u)$ при $u\to\infty$, если найдется такая константа $C=C(\varphi,\psi)>0$, что верно неравенство $\varphi(u)\le C\psi(u)$ для $u\ge u_0>0$; $\varphi(u)\asymp\psi(u)$, если одновременно $\varphi(u)\ll\psi(u)$ и $\psi(u)\ll\varphi(u)$.

Ниже нам понадобится (многомерная) теорема Литтлвуда — Пэли (см. [17]).

Теорема B. *Пусть $1<p<\infty$. Тогда для любой функции $f\in L_p(\mathbb{T}^d)$ верно равенство*

$$\big\|\{\delta_s^\varepsilon(f)\}\mid L_p(\ell_2)\big\|\asymp\|f\|_p$$

с постоянными, зависящими только от p и d.

Кроме того, ниже будем часто использовать следующие свойства системы U^d (см. [2]). Справедлив аналог теоремы Марцинкевича: если $1<p<\infty$, то

$$\big\|\delta_s^\varepsilon(f)\big\|_p^p\asymp\sum_{I\in D_s^\varepsilon}\|f_IU_I\|_p^p; \tag{3}$$

кроме того, если $1<p,q<\infty$, то

$$\|U_I\|_p\asymp|I|^{1/p-1/2} \tag{4}$$

и как следствие

$$\|U_I\|_p\asymp\|U_I\|_q|I|^{1/p-1/q}. \tag{5}$$

Здесь $|I|$ — (d-мерный) объем параллелепипеда I, а постоянные в (3)–(5) зависят только от p и d.

4. Основная теорема

Сформулируем и обсудим основной результат работы — теорему 1. Всюду ниже считаем, не ограничивая общности, что вектор $r=(r_1,\dots,r_d)\in\mathbb{R}^d_+$ такой, что $r_1=\dots=r_\nu<r_j$, $j\in e_d\setminus e_\nu$, с некоторым $\nu\in e_d$. Таким образом, $r_1=\min\{r_j,\,j\in e_d\}$ и ν — количество минимальных компонент вектора r. Также всюду ниже $\tau_*=\min\{2,\tau\}$, $u=\min\{p,\theta\}$ и log — логарифм по основанию 2.

В [2] доказаны оценки наилучших m-членных приближений классов SH^r_p и SW^r_p по системе U^d в пространстве L_q при $1<p,q<\infty$ в случае $\nu=d$, т. е. $r=(r_1,\dots,r_1)$. Более точно, справедливы соотношения

$$\sigma_m\big(\mathrm{SH}^r_p,U^d,L_q(\mathbb{T}^d)\big)\asymp m^{-r_1}(\log m)^{(d-1)(r_1+\frac12)}, \tag{6}$$

причем $r_1>(1/p-1/q)_+$, если $q\ge2$, и $r_1>(\max(2/p,2/q)-1)/q$, если $q<2$ (здесь $a_+=\max\{a,0\}$);

$$\sigma_m\big(\mathrm{SW}^r_p,U^d,L_q(\mathbb{T}^d)\big)\asymp m^{-r_1}(\log m)^{(d-1)r_1}, \tag{7}$$

причем $r_1>\max(1/p,1/2)-1/q$, если $q\ge2$, и $r_1>(\max(2/p,2/q)-1)/q$, если $q<2$.

Основным результатом настоящей статьи является

Теорема 1. *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r \in \mathbb{R}^d_+$ *такой, что* $r_1 > \frac{1}{\min\{u,q\}} \frac{2}{q_*} - \frac{1}{q}$. *Тогда верны соотношения*

$$\sigma_m(\mathrm{F}, U^d, L_q) \asymp m^{-r_1} (\log m)^{(\nu-1)(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})},$$

где F — *это класс* $\mathrm{SB}^r_{p\theta}$ *или класс* $\mathrm{SF}^r_{p\theta}$.

Таким образом, теорема 1 развивает оценки (6), (7) в двух направлениях: рассматриваем, во-первых, две шкалы функциональных классов $\mathrm{SB}^r_{p\theta}$ и $\mathrm{SF}^r_{p\theta}$, которые включают в себя классы SH^r_p и SW^r_p соответственно (см. разд. 2); во-вторых, произвольный вектор смешанной гладкости $r = (r_1, \dots, r_d)$ вместо вектора $r = (r_1, \dots, r_1)$.

Как отмечалось во введении, наилучшие m-членные приближения и специальные нелинейные методы приближения на разных множествах (классах функций) с помощью разных систем Φ рассматриваются во многих работах. Здесь отметим лишь работы [18, 19], которые имеют прямое отношение к данной работе. В [18], в частности, получены оценки наилучших m-членных приближений по системе V, аналогичной U^d, которая строится на основе ядер Валле-Пуссена: при $1 < p, q < \infty$, $2 \le \theta \le \infty$

$$\sigma_m\big(\mathrm{SB}^r_{p\theta}, V, L_q(\mathbb{T}^d)\big) \asymp (m/\log^{\nu-1} m)^{-r_1} (\log^{\nu-1} m)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}},$$

$$\sigma_m\big(\mathrm{SW}^r_{p\theta}, V, L_q(\mathbb{T}^d)\big) \asymp (m/\log^{\nu-1} m)^{-r_1},$$

в [19] доказаны, в частности, оценки, аналогичные оценкам из теоремы 1 по системе, являющейся тензорным произведением одномерных систем периодизированных всплесков Мейера.

Подчеркнем, что при доказательстве оценок сверху следуем схеме из [2], а также [19].

5. Оценки сверху

При получении оценок сверху будет использовано очевидное неравенство

$$\sigma_m(\mathrm{F}, U^d, L_q) \ll G^q_m(\mathrm{F}, U^d) \tag{8}$$

для любого $\mathrm{F} \subset L_p$ и фактически будут доказаны оценки сверху для жадных алгоритмов на соответствующих классах функций.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r \in \mathbb{R}^d_+$ *такой, что* $r_1 > \frac{1}{\min\{u,q\}} \frac{2}{q_*} - \frac{1}{q}$. *Тогда справедливы оценки*

$$G^q_m\big(\mathrm{SB}^r_{p\theta}, U^d\big) \ll m^{-r_1} (\log m)^{(\nu-1)(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}, \tag{9}$$

$$G^q_m\big(\mathrm{SF}^r_{p\theta}, U^d\big) \ll m^{-r_1} (\log m)^{(\nu-1)(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}. \tag{10}$$

Для доказательства теоремы 2 понадобятся следующие леммы.

Для $1 < v < \infty$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ определим функцию (см. [19, разд. 6])

$$h^v_n(I) = \frac{2^{-n(r_1 + \frac{1}{v})} n^{(1-\nu)\frac{1}{\theta}}}{\|U_I\|_v}, \tag{11}$$

для $f \in L_1$ определим множество

$$A^v(f, n) := \big\{ I : |f_I| > h^v_n(I) \big\}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Лемма 1. *Пусть* $f \in \mathrm{SB}^r_{p\theta} \cup \mathrm{SF}^r_{p\theta}$, $1 < p, q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r \in \mathbb{R}^d_+$. *Тогда если* $r_1 > \frac{1}{u} - \frac{1}{v}$, *то имеет место оценка*

$$\sharp A^v(f,n) \ll 2^n n^{\nu-1}.$$

Доказательство. Возьмем $f \in \mathrm{SB}^r_{p\theta} \cup \mathrm{SF}^r_{p\theta}$ и обозначим $N^\varepsilon_s := A^v(f,n) \cap D^\varepsilon_s$. Можем записать

$$\sharp A^v(f,n) = \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma)<n} \sharp N^\varepsilon_s + \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma)\ge n} \sharp N^\varepsilon_s =: \sum\nolimits_n + \sum\nolimits^n,$$

где вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ выбран по вектору r так, что $\gamma_j = 1$, если $j \in e_\nu$, и $1 < \gamma_j < \frac{r_j}{r_1}$, если $j \in e_d \setminus e_\nu$.

Сначала оценим $\sum_n$. Тривиальным образом получаем

$$\sum\nolimits_n = \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma)<n} \sharp\big(A^v(f,n) \cap D^\varepsilon_s\big) \le \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma)<n} \sharp D^\varepsilon_s \asymp \sum_{(s,\gamma)<n} 2^{|s|} \asymp 2^n n^{\nu-1}. \quad (12)$$

Перейдем к оценке $\sum^n$.

I. Пусть $f \in \mathrm{SB}^r_{p\theta}$. Так как $\delta^\varepsilon_s(f) = \sum\limits_{I \in D^\varepsilon_s} f_I U_I$ и согласно (4) имеет место соотношение

$$\|U_I\|_q \asymp 2^{|s|(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})},$$

то, учитывая (11), получим

$$\sum\nolimits^n = \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma)\ge n} \sharp N^\varepsilon_s = \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma)\ge n} \sum_{I \in N^\varepsilon_s} 1 \le \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma)\ge n} \sum_{I \in D^\varepsilon_s} \left(\frac{|f_I|}{h^v_n(I)}\right)^u$$
$$\le 2^{n(r_1+\frac{1}{v})u} n^{(\nu-1)\frac{u}{\theta}} \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{|s|(\frac{1}{2}-\frac{1}{v})u} \sum_{I \in D^\varepsilon_s} |f_I|^u =: \mathfrak{K}_1.$$

Рассмотрим все возможные соотношения между p и θ.

(a) Если $u = p = \theta$, то

$$\mathfrak{K}_1 = 2^{n(r_1+\frac{1}{v})p} n^{(\nu-1)\frac{\theta}{\theta}} \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{|s|(\frac{1}{2}-\frac{1}{v})p} 2^{-|s|(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} 2^{|s|(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} \sum_{I \in D^\varepsilon_s} |f_I|^p$$
$$\asymp 2^{n(r_1+\frac{1}{v})p} n^{(\nu-1)} \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{-|s|[(\frac{1}{v}-\frac{1}{2})p+\frac{p}{2}-1]} \sum_{I \in D^\varepsilon_s} \|U_I\|^\theta_p |f_I|^\theta$$
$$\asymp 2^{n(r_1+\frac{1}{v})p} n^{(\nu-1)} \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{-|s|p(\frac{1}{v}-\frac{1}{p})} 2^{-(s,r)\theta} 2^{(s,r)\theta} \big\|\delta^\varepsilon_s(f)\big\|^\theta_p$$
$$\asymp 2^{n(r_1+\frac{1}{v})p} n^{(\nu-1)} 2^{-n(\frac{p}{v}-1)} \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{-|s|r_1 p} 2^{(s,r)\theta} \big\|\delta^\varepsilon_s(f)\big\|^\theta_p$$
$$\asymp 2^{nr_1p} n^{(\nu-1)} 2^n 2^{-nr_1p} \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{(s,r)\theta} \big\|\delta^\varepsilon_s(f)\big\|^\theta_p$$
$$\asymp 2^n n^{(\nu-1)} \big\|f \mid \mathrm{SB}^r_{p\theta}\big\|^\theta \le 2^n n^{(\nu-1)}.$$

(b) Если $u = p < \theta < \infty$, то, применяя неравенство Гёльдера с показателем $P = \frac{\theta}{p}$, $P' = \frac{\theta}{\theta-p}$, получим

$$\mathfrak{K}_1 = 2^{n(r_1+\frac{1}{v})p} n^{(\nu-1)\frac{p}{\theta}} \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{-|s|(\frac{1}{v}-\frac{1}{2})p} \sum_{I \in D^\varepsilon_s} |f_I|^p$$

$$= 2^{n(r_1+\frac{1}{v})p} n^{(\nu-1)\frac{p}{\theta}} \sum_{\varepsilon} \sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{-|s|(\frac{1}{v}-\frac{1}{2})p} 2^{-(s,r)p} 2^{-|s|(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} 2^{(s,r)p} \sum_{I\in D_s^\varepsilon} \|U_I\|_p^p |f_I|^p$$

$$\leq 2^{n(r_1+\frac{1}{v})p} n^{(\nu-1)\frac{p}{\theta}} \Big[\sum_{\varepsilon} \sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{[-|s|p(\frac{1}{v}-\frac{1}{p})-(s,r)p]\frac{\theta}{\theta-p}} \Big]^{\frac{\theta-p}{\theta}}$$

$$\times \Big[\sum_{\varepsilon} \sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{(s,r)p\frac{\theta}{p}} \big\|\delta_s^\varepsilon(f)\big\|_p^{p\frac{\theta}{p}} \Big]^{\frac{p}{\theta}} \leq 2^{n(r_1+\frac{1}{v})p} n^{(\nu-1)\frac{p}{\theta}} n^{(\nu-1)\frac{\theta-p}{\theta}}$$

$$\times 2^{-np(\frac{1}{v}+r_1)} 2^n \big\|f \mid \mathrm{SB}_{p\theta}^r\big\|^p \leq 2^n n^{\nu-1}.$$

(c) Если $u = p < \theta = \infty$, то

$$\mathfrak{K}_1 = 2^{n(r_1+\frac{1}{v})p} \sum_{\varepsilon} \sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{-|s|(\frac{1}{v}-\frac{1}{2})p} \sum_{I\in D_s^\varepsilon} |f_I|^p$$

$$= 2^{n(r_1+\frac{1}{v})p} \sum_{\varepsilon} \sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{-|s|(\frac{1}{v}-\frac{1}{p})p} 2^{-(s,r)p} \Big(2^{(s,r)} \Big[\sum_{I\in D_s^\varepsilon} (\|U_I\|_p |f_I|)^p \Big]^{\frac{1}{p}} \Big)^p$$

$$\leq 2^{n(r_1+\frac{1}{v})p} \sum_{\varepsilon} \sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{-|s|[(\frac{1}{v}-\frac{1}{p})+r_1]p} \big(\sup_{s\in\mathbb{N}_0^d} 2^{(s,r)} \big\|\delta_s^\varepsilon(f)\big\|_p \big)^p$$

$$\leq 2^{n(r_1+\frac{1}{v})p} 2^{-n[(\frac{1}{v}-\frac{1}{p})+r_1]p} n^{\nu-1} \big\|f \mid \mathrm{SB}_{p\theta}^r\big\|^p \leq 2^n n^{\nu-1}.$$

(d) Если $u = \theta < p$, то, применяя к внутренней сумме неравенство Гёльдера с показателем $Q = \frac{p}{\theta}$, $Q' = \frac{p}{p-\theta}$, получим

$$\mathfrak{K}_1 = 2^{n(r_1+\frac{1}{v})\theta} n^{(\nu-1)\frac{\theta}{\theta}} \sum_{\varepsilon} \sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{-|s|(\frac{1}{v}-\frac{1}{2})\theta} \sum_{I\in D_s^\varepsilon} |f_I|^\theta$$

$$= 2^{n(r_1+\frac{1}{v})\theta} n^{(\nu-1)} \sum_{\varepsilon} \sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{-|s|(\frac{1}{v}-\frac{1}{2})\theta} \sum_{I\in D_s^\varepsilon} 2^{-|s|(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\theta} \|U_I\|_p^\theta |f_I|^\theta$$

$$\leq 2^{n(r_1+\frac{1}{v})\theta} n^{(\nu-1)} \sum_{\varepsilon} \sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{-|s|(\frac{1}{v}-\frac{1}{2})\theta} \Big[\sum_{I\in D_s^\varepsilon} 2^{-|s|(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\theta\frac{p}{p-\theta}} \Big]^{\frac{p-\theta}{p}} \Big[\sum_{I\in D_s^\varepsilon} \|U_I\|_p^p |f_I|^p \Big]^{\frac{\theta}{p}}$$

$$= 2^{n(r_1+\frac{1}{v})\theta} n^{(\nu-1)} \sum_{\varepsilon} \sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{-|s|(\frac{1}{v}-\frac{1}{2})\theta} 2^{|s|\frac{p-\theta}{p}} 2^{-|s|(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\theta} \big\|\delta_s^\varepsilon(f)\big\|_p^{p\frac{\theta}{p}}$$

$$\leq 2^{n(r_1+\frac{1}{v})\theta} n^{(\nu-1)} \sum_{\varepsilon} \sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{-|s|(\frac{1}{v}-\frac{1}{2})\theta} 2^{|s|} 2^{-|s|\frac{\theta}{2}} 2^{-(s,r)\theta} 2^{(s,r)\theta} \big\|\delta_s^\varepsilon(f)\big\|_p^\theta$$

$$\leq 2^{n(r_1+\frac{1}{v})\theta} n^{\nu-1} 2^{-n(\frac{1}{v}-\frac{1}{2})\theta} 2^n 2^{-n\frac{\theta}{2}} 2^{-nr_1\theta} \sum_{\varepsilon} \sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{(s,r)\theta} \big\|\delta_s^\varepsilon(f)\big\|_p^\theta$$

$$\asymp 2^n n^{\nu-1} \big\|f \mid \mathrm{SB}_{p\theta}^r\big\|^\theta \leq 2^n n^{(\nu-1)}.$$

Итак, оценка $\sum^n$ установлена для всех соотношений между p и θ. Отсюда и из (12) находим, что для $f \in \mathrm{SB}_{p\theta}^r$ имеет место оценка $\sharp A^v(f,n) \ll 2^n n^{\nu-1}$, где постоянная не зависит от f и n.

II. Пусть $f \in \mathrm{SF}_{p\theta}^r$. Предположим сначала, что $p \leq \theta$. Хорошо известны вложения

$$SB_{p\min\{p,\theta\}}^r \hookrightarrow SF_{p\theta}^r \hookrightarrow SB_{p\max\{p,\theta\}}^r. \qquad (13)$$

В силу правой части (13) имеем

$$SF_{p\theta}^r \hookrightarrow SB_{p\theta}^r. \qquad (14)$$

Следовательно, из доказанного п. I получим

$$\sum\nolimits^n \ll 2^n n^{\nu-1} \big\| f \mid \mathrm{SB}^r_{p\theta} \big\|^\lambda \ll 2^n n^{\nu-1} \big\| f \mid \mathrm{SF}^r_{p\theta} \big\|^\lambda \ll 2^n n^{\nu-1}$$

(с некоторым $\lambda \geq 1$).

Пусть $1 \leq \theta < p$. В силу неравенства между нормами $\|\cdot\|_\theta \leq \|\cdot\|_p$ справедливо вложение

$$SF^r_{p\theta} \hookrightarrow SF^r_{\theta\theta} \equiv SB^r_{\theta\theta}. \tag{15}$$

Отсюда снова из п. I имеем

$$\sum\nolimits^n \ll 2^n n^{\nu-1} \big\| f \mid \mathrm{SB}^r_{\theta\theta} \big\|^\lambda \ll 2^n n^{\nu-1} \big\| f \mid \mathrm{SF}^r_{p\theta} \big\|^\lambda \ll 2^n n^{\nu-1}$$

(с некоторым $\lambda \geq 1$).

Итак, оценка $\sum^n$ установлена полностью. Отсюда и из (12) находим, что для $f \in \mathrm{SF}^r_{p\theta}$ имеет место оценка

$$\sharp A^v(f,n) \ll 2^n n^{\nu-1},$$

причем постоянная здесь не зависит от f и n.

Лемма 1 доказана полностью.

Пусть $f \in L_1$. Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$g_n(f) = \sum_{I \in A^v(f,n)} f_I U_I, \quad f^n := f - g_n(f).$$

Из определения функции f^n, очевидно, имеем

$$f^n_I = \begin{cases} f_I, & \text{если } |f_I| \leq h^v_n(I), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$\big| f^n_I \big| \leq \min\big\{ |f_I|, h^v_n(I) \big\}. \tag{16}$$

Лемма 2. *Пусть* $f \in \mathrm{SB}^r_{p\theta} \cup \mathrm{SF}^r_{p\theta}$, $1 < p, v < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $p^* \leq q < \infty$, $r \in \mathbb{R}^d_+$. *Тогда если* $r_1 > \frac{1}{v}\big(\frac{q}{u} - 1\big)$, *то имеет место оценка*

$$\|f^n\|_q \ll 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$$

с постоянной, не зависящей от f *и* M.

Доказательство. Так как по условию леммы $q \geq 2$, из теоремы B следует, что

$$\|f^n\|_q^2 \ll \sum_\varepsilon \sum_s \big\| \delta^\varepsilon_s(f^n) \big\|_q^2$$
$$= \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma) < n} \big\| \delta^\varepsilon_s(f^n) \big\|_q^2 + \sum_\varepsilon \sum_{(s,\gamma) \geq n} \big\| \delta^\varepsilon_s(f^n) \big\|_q^2 =: \sum\nolimits_n + \sum\nolimits^n.$$

Оценим сначала $\sum_n$. Поскольку $\big| f^n_I \big| \leq h^v_n(I)$, $I \in D^\varepsilon_s$, по определению множества $A^v(f,n)$ и с учетом леммы Г из [11] имеем

$$\big\| \delta^\varepsilon_s(f^n) \big\|_q^q \ll h^v_n(I)^q \sum_{I \in D^\varepsilon_s} \|U_I\|_q^q \asymp 2^{-n(r_1+\frac{1}{v})q} n^{(1-\nu)\frac{1}{\theta}q}$$
$$\times 2^{|s|(\frac{1}{v}-\frac{1}{2})q} 2^{|s|(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})q} 2^{|s|} \asymp \big(2^{-n(r_1+\frac{1}{v})} n^{(1-\nu)\frac{1}{\theta}}\big)^q 2^{|s|\frac{1}{v}q}.$$

Отсюда получаем

$$\sum\nolimits_n = \sum_{\varepsilon}\sum_{(s,\gamma)<n}\left\|\delta_s^{\varepsilon}(f^n)\right\|_q^2 \ll (2^{-n(r_1+\frac{1}{v})}n^{(1-\nu)\frac{1}{\theta}})^2$$

$$\times\sum_{(s,\gamma)<n}2^{|s|\frac{1}{v}2} \asymp 2^{-n(r_1+\frac{1}{v})2}n^{(1-\nu)\frac{2}{\theta}}2^{n\frac{1}{v}2}n^{(\nu-1)} = (2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})})^2. \quad (17)$$

Теперь оценим $\sum^n$. Пусть сначала $f\in \mathrm{SB}^r_{p\theta}$.

Применяя неравенство разных метрик (5) и неравенство $\left|f_I^n\right| \le |f_I|$, получим

$$\left\|\delta_s^{\varepsilon}(f^n)\right\|_q^q \ll \sum_{I\in D_s^{\varepsilon}}\left\|f_I^nU_I\right\|_q^q = \sum_{I\in D_s^{\varepsilon}}\left\|f_I^nU_I\right\|_q^{q-p}\left\|f_I^nU_I\right\|_q^p$$

$$\le \sum_{I\in D_s^{\varepsilon}}h_n^v(I)^{q-p}\|U_I\|_q^{q-p}\left\|f_I^nU_I\right\|_q^p \asymp h_n^v(I)^{q-p}2^{|s|(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})(q-p)}\sum_{I\in D_s^{\varepsilon}}\left\|f_I^nU_I\right\|_q^p$$

$$\ll \left[h_n^v(I)2^{|s|(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\right]^{q-p}2^{|s|(1-\frac{p}{q})}\sum_{I\in D_s^{\varepsilon}}\left\|f_I^nU_I\right\|_p^p$$

$$\asymp \left[2^{-n(r_1+\frac{1}{v})}n^{(1-\nu)\frac{1}{\theta}}2^{|s|(\frac{1}{v}-\frac{1}{2})}2^{|s|(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\right]^{q-p}2^{|s|(1-\frac{p}{q})}\left\|\delta_s^{\varepsilon}(f^n)\right\|_p^p.$$

Используя неравенство Гёльдера с показателем $P=\frac{q\theta}{2p}$, $P'=\frac{q\theta}{q\theta-2p}$, получим

$$\sum_{\varepsilon}\sum_{(s,\gamma)\ge n}\left\|\delta_s^{\varepsilon}(f^n)\right\|_q^2 \ll [2^{-n(r_1+\frac{1}{v})}n^{(1-\nu)\frac{1}{\theta}}]^{\frac{q-p}{q}2}$$

$$\times\sum_{\varepsilon}\sum_{(s,\gamma)\ge n}2^{|s|\frac{1}{v}\frac{q-p}{q}2}\left\|\delta_s^{\varepsilon}(f^n)\right\|_p^{\frac{2p}{q}}2^{-(s,r)\frac{2p}{q}}2^{(s,r)\frac{2p}{q}} \le [2^{-n(r_1+\frac{1}{v})}n^{(1-\nu)\frac{1}{\theta}}]^{\frac{q-p}{q}2}$$

$$\times\Big[\sum_{(s,\gamma)\ge n}2^{|s|\frac{1}{v}\frac{q-p}{q}2\frac{q\theta}{q\theta-2p}}2^{-|s|r_1\frac{2p}{q}\frac{q\theta}{q\theta-2p}}\Big]^{\frac{q\theta-2p}{q\theta}}$$

$$\times\Big[\sum_{\varepsilon}\sum_{(s,\gamma)\ge n}\left\|\delta_s^{\varepsilon}(f^n)\right\|_p^{\frac{2p}{q}\frac{q\theta}{2p}}2^{(s,r)\frac{2p}{q}\frac{q\theta}{2p}}\Big]^{\frac{2p}{q\theta}} \le [2^{-n(r_1+\frac{1}{v})}n^{(1-\nu)\frac{1}{\theta}}]^{\frac{q-p}{q}2}$$

$$\times[n^{\nu-1}2^{-n\frac{2\theta}{2p-q\theta}[\frac{1}{v}(q-p)-r_1p]}]^{\frac{q\theta-2p}{q\theta}}\left\|f\mid \mathrm{SB}^r_{p\theta}\right\|^{\frac{2p}{q}} \le (2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})})^2. \quad (18)$$

Из (17) и (18) получаем требуемую оценку для классов $\mathrm{SB}^r_{p\theta}$.

Предположим, что $f\in \mathrm{SF}^r_{p\theta}$. Рассуждения аналогичны рассуждениям при доказательстве леммы 1. При $\theta\ge p$ в силу вложения (14) находим, что для $f\in \mathrm{SF}^r_{p\theta}$ имеют место оценки

$$\|f^n\|_q \ll 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}\left\|f\mid \mathrm{SB}^r_{\min\{p,\theta\}q}\right\|^{\lambda}$$

$$\ll 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}\|f\mid \mathrm{SF}^r_{p\theta}\|^{\lambda} \le 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$$

(с некоторым $\lambda\ge 1$).

Пусть $1\le\theta<p$. В силу неравенства между нормами $\|\cdot\|_\theta \le \|\cdot\|_p$ справедливо вложение (15). Тогда

$$\|f^n\|_q \ll 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}\left\|f\mid \mathrm{SB}^r_{\theta\theta}\right\|^{\lambda}$$

$$\ll 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}\left\|f\mid \mathrm{SF}^r_{p\theta}\right\|^{\lambda} \le 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$$

(с некоторым $\lambda \ge 1$).

Лемма 2 доказана полностью.

Пусть $1 < v < \infty$. Рассмотрим теперь «L_v-жадный» алгоритм $G^v(\cdot, U^d)$: для $f \in L_1$ переставим последовательность $\{\|f_I U_I\|_v\}$ в убывающем порядке

$$\|f_{I_1} U_{I_1}\|_v \ge \|f_{I_2} U_{I_2}\|_v \ge \dots$$

и выпишем сумму

$$G_m^v(f, U^d) = \sum_{j=1}^{m} f_{I_j} U_{I_j}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Для множества $\mathrm{F} \subset L_q$ положим

$$G_m^v(\mathrm{F}, U^d, L_q) := \sup_{f \in F} \bigl\{ \bigl\| f - G_m^v(f, U^d) \bigr\|_q \bigr\}.$$

Теорема 3. *Пусть $1 < p, v < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $p^* \le q < \infty$, $r \in \mathbb{R}_+^d$ такой, что $r_1 > \max\bigl\{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}, \bigl(\frac{q}{u} - 1\bigr)\frac{1}{v}\bigr\}$. Тогда справедливы оценки*

$$G_m^v\bigl(\mathrm{SB}_{p\theta}^r, U^d, L_q\bigr) \ll m^{-r_1} (\log m)^{(\nu-1)(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})},$$

$$G_m^v\bigl(\mathrm{SF}_{p\theta}^r, U^d, L_q\bigr) \ll m^{-r_1} (\log m)^{(\nu-1)(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}.$$

Доказательство. Зададим $m \in \mathbb{N}$ и положим

$$n(m) := \max\bigl\{ n \in \mathbb{N} : \ \sharp A^v(f, n) \le m \ \forall\ f \in \mathrm{SB}_{p\theta}^r \cup \mathrm{SF}_{p\theta}^r \bigr\}.$$

Из леммы 1 следует, что

$$2^{n(m)} \asymp m (\log m)^{1-\nu}.$$

Рассмотрим разность

$$g := f - G_m^v(f, U^d).$$

По определению g имеем $g_I = 0$ при $I \in \{I_1, \dots, I_m\}$ и $g_I = f_I$ в противном случае. Пусть I, J — любые диадические параллелепипеды из D_d такие, что

$$|f_I| > h_{n(m)}^v(I), \quad h_{n(m)}^v(J) \ge |f_J|.$$

Тогда справедливо

$$\|f_I U_I\|_v > h_{n(m)}^v(I) \|U_I\|_v = h_{n(m)}^v(J) \|U_J\|_v \ge \|f_J U_J\|_v.$$

Так как по выбору $n(m)$ имеем $\sharp A^v(f, n(m)) \le m$, то $I \in \{I_1, \dots, I_m\}$. Поэтому $g_I = 0$. Следовательно, для g выполняется неравенство

$$|g_I| \le h_{n(m)}^v(I), \quad I \in D_s^\varepsilon. \tag{19}$$

Легко показать, что $cg \in \mathrm{SB}_{p\theta}^r$ ($cg \in \mathrm{SF}_{p\theta}^r$) с постоянной $c > 0$, не зависящей от f и $n(m)$.

Стало быть, по лемме 2 с учетом (19) имеем

$$G_m^v\bigl(\mathrm{SB}_{p\theta}^r, U^d, L_q\bigr) \ll 2^{-n(m) r_1} n(m)^{(\nu-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})} \asymp m^{-r_1} (\log m)^{(\nu-1)(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})},$$

соответственно

$$G_m^v\bigl(\mathrm{SF}_{p\theta}^r, U^d, L_q\bigr) \ll 2^{-n(m) r_1} n(m)^{(\nu-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})} \asymp m^{-r_1} (\log m)^{(\nu-1)(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}.$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 2. Доказательство проведем для классов $\mathrm{SB}^r_{p\theta}$. Для классов $\mathrm{SF}^r_{p\theta}$ доказательство совершенно аналогично.

(a) Пусть $2 \le q < \infty$. Рассмотрим все возможные соотношения между p и q.

(i) Пусть $1 < p \le q$. Применяя теорему 3 с $v = q$, получим требуемую оценку (9) и условие на параметры $r_1 > \frac{1}{u} - \frac{1}{q}$.

(ii) Пусть $q < p < \infty$. Из определения 1 и неравенства $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_p$ следует включение $\mathrm{SB}^r_{p\theta} \subset \mathrm{SB}^r_{q\theta}$. Тогда имеем неравенство

$$G^q_m\big(\mathrm{SB}^r_{p\theta}, U^d\big) \le G^q_m\big(\mathrm{SB}^r_{q\theta}, U^d\big), \quad \text{где } G^q_m\big(\mathrm{SB}^r_{p\theta}, U^d\big) := G^q_m\big(\mathrm{SB}^r_{p\theta}, U^d, L_q\big).$$

Таким образом, можем свести этот случай к случаю (i), и условие на параметры имеет вид $r_1 > \frac{1}{\min\{q,\theta\}} - \frac{1}{q}$.

(b) Пусть $1 < q < 2$. Снова рассмотрим все возможные соотношения между p и q.

(iii) Пусть $1 < p \le q$. Из неравенства $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_2$ следует неравенство

$$G^q_m\big(\mathrm{SB}^r_{p\theta}, U^d\big) \le G^q_m\big(\mathrm{SB}^r_{p\theta}, U^d, L_2\big).$$

Используя теорему 3 для величины $G^q_m\big(\mathrm{SB}^r_{p\theta}, U^d, L_2\big)$, получим требуемую оценку (9) и условие на параметры $r_1 > \big(\frac{2}{u} - 1\big)\frac{1}{q}$.

(iv) Пусть $q < p < \infty$. Здесь, снова используя неравенство из п. (a)

$$G^q_m\big(\mathrm{SB}^r_{p\theta}, U^d\big) \le G^q_m\big(\mathrm{SB}^r_{q\theta}, U^d\big),$$

получим аналогично (i) оценку (9) и условие на параметры $r_1 > \big(\frac{2}{\min\{q,\theta\}} - 1\big)\frac{1}{q}$.

Теорема 2 доказана.

С учетом (8) из теоремы 2 получаем

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 справедливы оценки*

$$\sigma_m\big(\mathrm{SB}^r_{p\theta}, U^d, L_q\big) \ll m^{-r_1}(\log m)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})},$$

$$\sigma_m\big(\mathrm{SF}^r_{p\theta}, U^d, L_q\big) \ll m^{-r_1}(\log m)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

6. Оценки снизу

В этом разделе установим оценки снизу.

Теорема 4. *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r \in \mathbb{R}^d_+$ *такой, что* $r_1 > \big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\big)_+$. *Тогда справедливы оценки*

$$\sigma_m\big(\mathrm{SB}^r_{p\theta}, U^d, L_q\big) \gg m^{-r_1}(\log m)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}, \tag{20}$$

$$\sigma_m\big(\mathrm{SF}^r_{p\theta}, U^d, L_q\big) \gg m^{-r_1}(\log m)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{21}$$

Ниже понадобятся некоторые факты из теории базисов Хаара и дополнительные свойства системы U^d (см. [2]). Пусть $\mathscr{H} := \{H_I\}_I$ — одномерная система Хаара, где I — диадические интервалы вида $I = [(j-1)2^{-n}, j2^{-n})$, $j = 1, \dots, 2^n$; $n = 0, 1, \dots$, и

$$H_{[0,1)}(x) = 1, \quad x \in [0,1),$$

$$H_{[(j-1)2^{-n},j2^{-n})} = \begin{cases} 2n/2, & x \in \left[(j-1)2^{-n}, \left(j-\frac{1}{2}\right)2^{-n}\right), \\ 2{-}n/2, & x \in \left[\left(j-\frac{1}{2}\right)2^{-n}, j2^{-n}\right), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим многомерный базис Хаара $\mathscr{H}^d := \mathscr{H} \times \dots \times \mathscr{H}$, который состоит из функций

$$H_I(x) = \prod_{j=1}^{d} H_{I_j}(x_j), \quad I = I_1 \times \dots \times I_d,\ x = (x_1, \dots, x_d).$$

Будем говорить, что система $\Psi = \{\psi\}$ *L_q-эквивалентна системе Хаара* $\mathscr{H}^d$, если для любого конечного набора Λ и для любых коэффициентов $\{c_I\}$ имеем

$$C_1(\Psi, p, d)\Big\|\sum_{I\in\Lambda} c_I H_I\Big\|_q \le \Big\|\sum_{I\in\Lambda} c_I \psi_I\Big\|_q \le C_2(\Psi, p, d)\Big\|\sum_{I\in\Lambda} c_I H_I\Big\|_q.$$

Хорошо известно (см, например, [20]), что система Хаара удовлетворяет неравенству Литтлвуда — Пэли в строгой форме

$$\Big\|\sum_I c_I H_I\Big\|_q = \Big\|\Big(\sum_I |c_I H_I|^2\Big)^{1/2}\Big\|_q, \quad 1 < p < \infty. \tag{22}$$

В [21] доказано, что система U является безусловным базисом и L_q-эквивалентна системе Хаара $\mathscr{H}$ для любого $1 < q < \infty$. Отсюда легко следует, что кратная система U^d L_q-эквивалентна $\mathscr{H}^d$.

Доказательство теоремы 4. При получении оценок снизу, не ограничивая общности, возьмем $\nu = d$. Оценка (20) не зависит от p и q, поэтому ее достаточно доказать для случая $1 < q < 2 < p < \infty$.

I. Рассмотрим классы $\mathrm{SB}^r_{p\theta}$. Построим полином g по системе U^d следующим образом ($n \in \mathbb{N}$):

$$g(x) = g_n(x) = \sum_{|s|=n} \delta_s^{\bar\varepsilon}(g, x),$$

где $\bar\varepsilon = (+, \dots, +)$ и для каждого $s \in \mathbb{N}_0^d$

$$\delta_s^{\bar\varepsilon}(g) = n^{(1-d)\frac{1}{\theta}} 2^{-|s|(r_1+\frac{1}{2})} \sum_{I\in D_s^{\varepsilon}} U_I.$$

Подберем $n \in \mathbb{N}$ по $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\mathrm{T}_n := \sum_{|s|=n} \sharp D_s^{\bar\varepsilon}(g) \ge 2m, \quad 2^n n^{d-1} \asymp m.$$

В силу теоремы A и формул (3), (4) имеем

$$\begin{aligned}\big\|g \mid SB^r_{p\theta}\big\| &\asymp \Big\{\sum_s 2^{|s|r_1\theta}\Big[\sum_{I\in D_s^{\bar\varepsilon}} (|I|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}})^p\Big]^{\frac{\theta}{p}}\Big\}^{\frac{1}{\theta}} \\ &= n^{(1-d)\frac{1}{\theta}}\Big\{\sum_{|s|=n} 2^{|s|r_1\theta} 2^{-|s|(r_1+\frac{1}{2})\theta} 2^{|s|(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\theta}\big(\sharp D_s^{\bar\varepsilon}(g)\big)^{\frac{\theta}{p}}\Big\}^{\frac{1}{\theta}} \\ &\asymp n^{(1-d)\frac{1}{\theta}}\Big\{\sum_{|s|=n} 1\Big\}^{\frac{1}{\theta}} \asymp 2^{-n\frac{1}{\theta}} n^{(1-d)\frac{1}{\theta}}\Big\{\sum_{|s|=n} 2^{(s,\gamma)}\Big\}^{\frac{1}{\theta}}\end{aligned}$$

$$\asymp 2^{-n\frac{1}{\theta}} n^{(1-d)\frac{1}{\theta}} (2^n n^{\nu-1})^{\frac{1}{\theta}} = 1.$$

Следовательно, полином cg_n принадлежит классу $\mathrm{SB}^r_{p\theta}$ с постоянной c, не зависящей от n. Тогда, учитывая теорему A и формулу (22), имеем (ниже χ_I — характеристическая функция I)

$$\sigma_m\bigl(\mathrm{SB}^r_{p\theta}, U^d, L_q\bigr) \gg \sigma_m(g_n, U^d, L_q) \asymp \min_{\sharp\Lambda=m} \Bigl\| \Bigl(\sum_{|s|=n} \sum_{I\in D_s^{\bar\varepsilon}\setminus\Lambda} (|g_I H_I|)^2 \Bigr)^{\frac{1}{2}} \Bigr\|_q$$

$$= n^{(1-d)\frac{1}{\theta}} 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} \min_{\sharp\Lambda=m} \Bigl\| \Bigl(\sum_{|s|=n} \sum_{I\in D_s^{\bar\varepsilon}\setminus\Lambda} \chi_I \Bigr)^{\frac{1}{2}} \Bigr\|_q. \quad (23)$$

Легко видеть (см. также [1, введение]), что $\sum\limits_{|s|=n} 1 \asymp n^{d-1}$. Продолжим (23):

$$n^{(1-d)\frac{1}{\theta}} 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} \min_{\sharp\Lambda=m} \Bigl\| \Bigl(\sum_{|s|=n} \sum_{I\in D_s^{\bar\varepsilon}\setminus\Lambda} \chi_I \Bigr)^{\frac{1}{2}} \Bigr\|_q$$

$$= n^{(1-d)\frac{1}{\theta}} 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} \min_{\sharp\Lambda=m} \Bigl(\int\limits_{[0,1)^d} \Bigl(\sum_{|s|=n} \sum_{I\in D_s^{\bar\varepsilon}\setminus\Lambda} \chi_I \Bigr)^{\frac{q}{2}} dx \Bigr)^{\frac{1}{q}}$$

$$= n^{(1-d)\frac{1}{\theta}} 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} n^{-(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \min_{\sharp\Lambda=m} \Bigl(\int\limits_{[0,1)^d} \Bigl(\sum_{|s|=n} \sum_{I\in D_s^{\bar\varepsilon}\setminus\Lambda} \chi_I \Bigr)^{\frac{q}{2}} dx \Bigr)^{\frac{1}{q}}$$

$$\asymp n^{(1-d)(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} \min_{\sharp\Lambda=m} \Bigl(\int\limits_{[0,1)^d} \Bigl(\sum_{|s|=n} \sum_{I\in D_s^{\bar\varepsilon}\setminus\Lambda} \chi_I \Bigr)^{\frac{q}{2}} \Bigl(\sum_{|s|=n} \sum_{I\in D_s^{\bar\varepsilon}} \chi_I \Bigr)^{1-\frac{q}{2}} dx \Bigr)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geq n^{(1-d)(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} \min_{\sharp\Lambda=m} \Bigl(\int\limits_{[0,1)^d} \Bigl(\sum_{|s|=n} \sum_{I\in D_s^{\bar\varepsilon}\setminus\Lambda} \chi_I \Bigr)^{\frac{q}{2}} \Bigl(\sum_{|s|=n} \sum_{I\in D_s^{\bar\varepsilon}\setminus\Lambda} \chi_I \Bigr)^{1-\frac{q}{2}} dx \Bigr)^{\frac{1}{q}}$$

$$= n^{(1-d)(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} \min_{\sharp\Lambda=m} \Bigl(\int\limits_{[0,1)^d} \sum_{|s|=n} \sum_{I\in D_s^{\bar\varepsilon}\setminus\Lambda} \chi_I \, dx \Bigr)^{\frac{1}{q}}. \quad (24)$$

Наконец, с учетом выбора n (и T_n) по m, из (24) и (23) получим

$$\sigma_m\bigl(\mathrm{SB}^r_{p\theta}, U^d, L_q\bigr) \gg n^{(1-d)(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} \min_{\sharp\Lambda=m} \Bigl(\int\limits_{[0,1)^d} \sum_{|s|=n} \sum_{I\in D_s^{\bar\varepsilon}\setminus\Lambda} \chi_I \, dx \Bigr)^{\frac{1}{q}}$$

$$= n^{(1-d)(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} \min_{\sharp\Lambda=m} \Bigl(\sum_{|s|=n} \sum_{I\in D_s^{\bar\varepsilon}\setminus\Lambda} \chi_I 2^{-|s|} \Bigr)^{\frac{1}{q}}$$

$$\asymp n^{(1-d)(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} (2^{-n}(\mathrm{T}_n - m))^{\frac{1}{q}}$$

$$\asymp n^{(1-d)(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} n^{(d-1)\frac{1}{q}}$$

$$\gg 2^{-nr_1} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \gg m^{-r_1} (\log m)^{(d-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})},$$

что и требовалось.

II. Перейдем к рассмотрению класса $\mathrm{SF}^r_{p\theta}$. Если $q < p$, то по левому из вложений (13) и уже доказанной оценке для классов $\mathrm{SB}^r_{p\theta}$ получим

$$\sigma_m\bigl(\mathrm{SF}^r_{p\theta}, U^d, L_q\bigr) \gg \sigma_m\bigl(\mathrm{SB}^r_{p\theta}, U^d, L_q\bigr) \gg m^{-r_1} (\log m)^{(d-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Если $q > p$, то в силу включения $\mathrm{SB}^r_{\theta\theta} \subset \mathrm{SF}^r_{p\theta}$ и снова по доказанному выше имеем

$$\sigma_m\bigl(\mathrm{SF}^r_{p\theta}, U^d, L_q\bigr) \gg \sigma_m\bigl(\mathrm{SB}^r_{\theta\theta}, U^d, L_q\bigr) \gg m^{-r_1}(\log m)^{(d-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Таким образом, оценка (20) для классов $\mathrm{SF}^r_{p\theta}$ также доказана.

Теорема 4 доказана полностью.

Из следствия 1 и теоремы 4 следует теорема 1.

Выражаю признательность Д. Б. Базарханову за ценные советы и внимание к работе, а также за возможность ознакомиться с рукописью статьи [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Temlyakov V. N.* Greedy approximation // Acta Numerica. 2008. V. 17. P. 235–409.

2. *Temlyakov V. N.* Greedy algorithms with regard to multivariate systems with special structure // Constructive Approximation. 2000. V. 16, N 3. P. 399–425.

3. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(R_n)$ и $S^{(r)}_{p^*,\theta}B(R_n)$ $(0 \le x_j \le 2\pi; j = 1, \dots, n)$ // Тр. МИ АН СССР. 1965. Т. 77. С. 5–34.

4. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИ АН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.

5. *Никольский С. М.* Теорема о представлении одного класса дифференцируемых функций многих переменных посредством целых функций экспоненциального типа // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, № 3. С. 484–487.

6. *Никольский С. М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 6. С. 1342–1364.

7. *Бабенко К. И.* О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 2. С. 247–250.

8. *Бабенко К. И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 5. С. 982–985.

9. *Никольский С. М.* О граничных свойствах дифференцируемых функций многих переменных // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 3. С. 542–545.

10. *Никольский С. М.* Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных // Мат. сб. 1963. Т. 61, № 2. С. 224–252.

11. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 3–113.

12. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. New York: Nova Sci. Publ., 1993.

13. *Temlyakov V. N.* Nonlinear methods of approximation // Found. Comp. Math. 2003. V. 3, N 1. P. 33–107.

14. *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата: Наука КазССР, 1976.

15. *Schmeisser H.-J., Triebel H.* Topics in Fourier analysis and function spaces. Chichester: Wiley, 1987.

16. *Schmeisser H.-J.* Recent developments in the theory of function spaces with dominating mixed smoothness // Nonlinear analysis, function spaces and applications: Proc. Spring School held in Prague, May 30–June 6, 2006. Praha: Czech Acad. Sci., Math. Inst., 2007. V. 8. P. 145—204.

17. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

18. *Dung D.* Continuous algorithms in n-term approximation and non-linear widths // J. Approx. Theory. 2000. V. 102, N 2. P. 217–242.

19. *Базарханов Д. Б.* Нелинейные приближения классов периодических функций многих переменных // Тр. МИ РАН. 2014. Т. 284. С. 8–37.

20. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.

21. *Wojtaszczyk P.* On unconditional polynomial bases in L_p and Bergman spaces // Constructive Approximation. 1997. V. 13, N 1. P. 1–15.

Статья поступила 24 июня 2013 г.

Балгимбаева Шолпан Албановна
Институт математики и математического моделирования
МОиН Республики Казахстан,
отдел теории функций,
ул. Пушкина, 125, Алматы 050010, Казахстан
sc_s@mail.ru, balsholpan@yandex.ru